

## О Т Ч Е Т

Ключевые слова: OFDM, ITU model, адаптация, пилот-сигнал, случайное поле, фильтр Калмана, модуляция, ортогональные сигналы, QPSK, QAM, квадратурные составляющие, оценочно-корреляционный прием, дисперсия ошибки, корреляционная функция.

В настоящем отчете приведены результаты исследований, выполненных в рамках технического задания по разработке алгоритмов синхронизации в системах OFDM.

Основные исполнители:

К.К. Васильев, д.т.д., профессор

С.М. Наместников, аспирант

В.Р. Крашенинников, д.т.д., профессор

М.А. Служивый, аспирант

А.Г. Ташлинский, д.т.д., профессор (руководитель работ)

## СОДЕРЖАНИЕ

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД НЕСУЩИХ ПО ПИЛОТ-СИГНАЛАМ В OFDM СИСТЕМАХ	
1.1. Корреляционные функции квадратурных компонент	3
1.2. Математические модели квадратурных компонент	5
1.3. Алгоритмы оценивания полей квадратурных компонент	7
2. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПИЛОТ-СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ITU CHANNEL MODEL	
2.1. Оптимальный квазикогерентный прием сообщений в системе с пилот-сигналами	12
2.2. Вероятности ошибок в системах с многозначными сигналами	13
2.3. Помехоустойчивость системы с пилот-сигналами для бинарных символов	14
2.4. Анализ показателей качества при оптимизации положения пилот-сигналов	15
2.5. Структура адаптивной системы связи с пилот-сигналами	16
3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗРАБОТАННЫХ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД НЕСУЩИХ И РАССТАНОВКИ ПИЛОТ-СИГНАЛОВ	
3.1. Расчёт параметров поля время-частота по параметрам ITU-channel model	18
3.2. Оптимизация расстановки пилот-сигналов	19
3.3. Выводы	27
4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СОКРАЩЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД НЕСУЩИХ	
4.1. Постановка задачи	28
4.2. Возможные подходы к решению задачи фильтрации	31
4.3. Выводы	43
5. АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ITU CHANNEL MODEL	42
6. ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО АДАПТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ ITU CHANNEL MODEL	
6.1. Подходы к адаптации	48
6.2. Псевдоградиентные адаптивные алгоритмы	51
6.3. Выводы	50
7. ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО РАЗВИТИЮ ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕСКОЛЬКИХ АНТЕНН	51
8. ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ	54
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	56
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	58

# 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД НЕСУЩИХ ПО ПИЛОТ-СИГНАЛАМ В СИСТЕМАХ С OFDM

## 1.1. Корреляционные функции квадратурных компонент

Предположим, что излучаются два монохроматических колебания на частотах  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$ , которые запишем в виде:

$$u_1(t) = u_m \cos \omega t, \quad u_2(t) = u_m \cos(\omega + \Delta\omega)t \quad (1.1)$$

Приемник на движущемся со скоростью  $\vartheta$  объекте примет на штыревую антенну при вертикальной поляризации поля следующие сигналы:

$$\begin{aligned} u_{np1}(t) &= x_c(t) \cos \omega t - x_s(t) \sin \omega t, \\ u_{np2}(t) &= \tilde{x}_c(t) \cos(\omega + \Delta\omega)t - \tilde{x}_s(t) \sin(\omega + \Delta\omega)t, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $x_c(t)$  и  $x_s(t)$  - квадратурные составляющие.

При наличии  $n$  лучей, проходящих под углами  $\alpha_n$  к движущемуся объекту и имеющих задержки  $\tau_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  доплеровские добавки будут равны  $\omega_i = \omega_{\max} \cos \alpha_i$ ,  $\omega_{\max} = 2\pi\vartheta/\lambda$ ,  $\lambda$  - длина волны. Тогда

$$x_c(t) = E_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \cos(\omega_i t - \omega \tau_{ij}), \quad (1.3)$$

$$x_s(t) = E_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \sin(\omega_i t - \omega \tau_{ij}),$$

$$\tilde{x}_c(t) = E_0 \sum \sum c_{ij} \cos(\omega_i t - (\omega + \Delta\omega)\tau_{ij}), \quad (1.4)$$

$$\tilde{x}_s(t) = E_0 \sum \sum c_{ij} \sin(\omega_i t - (\omega + \Delta\omega)\tau_{ij}),$$

где  $E_0$  - амплитуда принятого сигнала;  $c_{ij}$  - коэффициенты передачи, зависящие от формы диаграммы направленности и рассеяния лучей по пространству.

Поскольку взаимные корреляционные функции (КФ) синфазной и квадратурных составляющих нулевые, а их автокорреляционные функции совпадают, найдем только КФ

$$R(\tau, \Delta\omega) = M \{x_c(t) \cdot \tilde{x}_c(t + \tau)\}.$$

Будем считать, что задержки  $\tau_{ij}$  и углы прихода  $\alpha_i$  непрерывно изменяются и имеют совместную плотность распределения вероятностей

$w(T, \alpha)$ . Если диаграмма направленности описывается выражением  $G(\alpha)$ , то с учетом (1.3) и (1.4) получаем

$$R(\tau, \Delta\omega) = b_0 \int_0^{2\pi} G(\alpha) \int_0^{\infty} w(T, \alpha) \cos(\omega_{\max} \tau \cos \alpha - \Delta\omega T) d\alpha dT$$

Анализ экспериментальных данных [1] показывает, что хорошей аппроксимацией в условиях города может быть равномерное распределение углов прихода  $w(\alpha) = 1/2\pi$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , и экспоненциальное распределение времени  $T$  задержки:  $w(T) = \lambda e^{-\lambda T}$ , где  $1/T$  - среднеквадратическое время задержки. Принимая также равномерную диаграмму направленности  $G(\alpha) = \text{const} = 1$ , получим

$$R(\tau, \Delta\omega) = b_0 \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda T} \cos(\omega_{\max} \tau \cos \alpha - \Delta\omega T) d\lambda dT = \frac{\sigma^2 J_0(\omega_m \tau)}{(1 + \Delta\omega^2 \tau_{ck}^2)} \quad (1.5)$$

где  $J_0$  - функция Бесселя 1 рода нулевого порядка;  $\tau_{ck} = 1/\lambda$  - среднеквадратическая задержка,  $\sigma^2$  - мощность сигнала.

Отсюда следует, что КФ случайного поля квадратурной составляющей на плоскости время-частота представляет собой произведение КФ по времени

$$R_1(\tau) = J_0(\omega_m \tau) \quad (1.6)$$

на КФ по частоте

$$R_2(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + \Delta\omega^2 \tau_{ck}^2}. \quad (1.7)$$

Другая модель может быть получена в предположении равномерного распределения задержки по времени:

$$\omega(T) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau_{\max}}, & |\tau| \leq \tau_{\max} \\ 0, & |\tau| > \tau_{\max} \end{cases}$$

Тогда, после интегрирования (1.5), находим

$$R_2(\Delta\omega) = \frac{\sin \Delta\omega \tau_{\max}}{\Delta\omega \tau_{\max}}. \quad (1.8)$$

Важным свойством двумерной КФ  $R(\tau, \Delta\omega)$  является ее представление в виде произведения КФ по времени и частоте. Это позволяет в качестве математических моделей использовать так называемые разделимые случайные поля дискретного аргумента [2,3,4], приводящие к калмановским и, в конечном счете, к рекуррентным по времени и частоте процедурам оценивания квадратурных компонент. На этом этапе исследования мы

ограничимся аппроксимацией КФ, заданной ITU-моделью с учетом (1.5) следующей экспоненциальной КФ

$$R(\tau, \Delta\omega) = r^{|\tau/\tau_c|} \rho^{|\Delta\omega/\Delta\omega_c|}, \quad (1.9)$$

где  $\tau_c$  и  $\omega_c$  - длительность сигнала с учетом защитного интервала и полоса частот, занимаемая одним частотным каналом;  $r$  - коэффициент корреляции между отсчетами компонент комплексной огибающей в одном частотном канале, отстоящими на  $\tau_c$  по времени;  $\rho$  - коэффициент корреляции между отсчетами компонент комплексной огибающей в одном временном интервале, отстоящими друг от друга по частоте на  $\Delta\omega_c$ .

Параметры  $r$  и  $\rho$  подбирались таким образом, чтобы интервал корреляции КФ ITU-модели и КФ (1.9) совпадали на уровне  $0,5(\tau, \Delta\omega)$ . При этом дисперсия ошибки оценивания квадратурных компонент, рассчитанных в пункте 1.3 с помощью модели (1.9), дает верхнюю границу для реальной, более низкой, дисперсии ошибки. Возможности улучшения предложений аппроксимации рассматриваются в восьмом разделе настоящего отчета.

## 1.2 Математические модели квадратурных компонент

Поскольку нет оснований считать отличающимися модели двух квадратурных компонент комплексного случайного поля (СП)  $\tilde{x}_{ij}$ , рассмотрим возможные классы моделей одной из составляющих, т.е. действительного СП  $\tilde{x}_{ij}$ ,  $i=1,2,\dots, j=1,2,\dots,N$ ;  $N$  - число частотных каналов систем с OFDM.

В настоящее время известно довольно большое число классов СП на двумерных сетках [2,4]. Среди них следует особо выделить каузальные авторегрессионные модели, линейные СП, волновые и гиббсовские СП. Для того, чтобы выбрать из множества названных моделей подходящие, сформулируем основные требования, которым должна удовлетворять математическая модель СП, предназначенная для решения основной задачи адаптивного позиционирования тест-сигналов:

1) модель должна быть каузальной, т.е. описывать очередное состояние  $x_{ij}$  системы только на основе предыдущих пространственно-временных значений;

2) модель должна содержать ограниченное число параметров, обеспечивая возможность их подстройки при изменении свойств реальных многочастотных каналов связи;

3) модель должна обеспечивать возможность рекуррентного оценивания СП  $x_{ij}$  по наблюдениям  $z_{ij} = x_{ij} + \theta_{ij}$ , где  $\theta_{ij}$  - ошибка оценивания СП по наблюдению очередного пилот-сигнала.

Анализ показывает, что всем поставленным условиям удовлетворяют только два класса моделей. К первому классу отнесем обычную векторную марковскую последовательность. Запишем все значения  $x_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  в виде одного вектора  $\bar{x}_i$ . Тогда последовательность векторов, содержащих информацию о фазовых набегках на  $N$  частотах, может быть представлена в виде векторного стохастического разностного уравнения

$$\bar{x}_i = \rho_i \bar{x}_{i-1} + v_i \bar{\xi}_i, \quad (1.10)$$

где  $\rho_i$  и  $v_i$  -  $N \times N$  - матрицы изменяющихся параметров модели;  $\bar{\xi}_i$  - вектор белых гауссовских шумов с ковариационной матрицей  $V_\xi$ . При заданных матрицах  $\rho_i$ ,  $v_i$  и внутрочастотных ковариациях  $V_{x1} = M\{\bar{x}_1 \bar{x}_1^T\}$  в начальный момент времени модель (1.10) полностью определяет изменяющиеся в дискретном времени СП. Наоборот, при заданных матрицах межчастотных  $V_{xi} = M\{\bar{x}_i \bar{x}_i^T\}$  и время-частотных  $V_{X_{i/i-1}} = M\{\bar{x}_i \bar{x}_{i-1}^T\}$  ковариаций можно найти параметры  $\rho_i$  и  $v_i$  модели (1.10), т.е. решить задачу синтеза модели по результатам анализа наблюдаемых сигналов.

Второй широкий класс описывается известным стохастическим разностным уравнением

$$x_{ij} = \sum_{(j_1, j_2) \in D_{ij}} \alpha_{j_1 j_2} x_{j_1 j_2} + \xi_{ij}, \quad (1.11)$$

где  $D_{ij}$  - неупреждающая по отношению к время-частотной развертке область локальных состояний;  $\alpha_{j_1 j_2}$  - параметры модели;  $\xi_{ij}$  - СП независимых гауссовских случайных величин. К сожалению, в общем случае связи между параметрами  $\alpha_{j_1 j_2}$  и корреляционными свойствами СП (1.11) оказываются очень сложными. Значительного упрощения решения задач синтеза и анализа (1.11) можно достичь для случая разделимых СП (1.5), построенных на основе одномерных авторегрессий с простыми или кратными [4] корнями характеристических уравнений. При этом достигается минимальное число параметров модели, которые должны подстраиваться в процессе функционирования адаптивной системы.

Поскольку в процессе исследований нам будет необходимо использовать как векторное (1.10), так скалярное (1.11) представление СП с КФ (1.9), конкретизируем представленные формулы для решения задачи аппроксимации ИТУ-модели.

Векторная модель (1.10) КФ (1.9) запишется в виде

$$\bar{x}_i = r\bar{x}_{i-1} + v_i \bar{\xi}_i, \quad i=1,2,\dots, \quad (1.12)$$

где  $v_i$  - нижнетреугольная матрица получена разложением симметрической матрицы вектора наблюдений

$$V_x = M\{\bar{x}_i \bar{x}_i^T\} \sigma_x^2 (1-r^2) \mathcal{N} v^T = \sigma_x^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{N-1} & \rho^{N-1} & \rho^{N-2} & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$\sigma_x^2$  - дисперсия квадратурной компоненты;  $n\{\bar{\xi}_i\} = \bar{0}$ ;  $M\{\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_i^T\} = E$ ;  $E$  - единичная матрица.

Анализ показывает, что матрица  $v$  имеет следующий вид

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p & \sqrt{1-p^2} & \dots & \dots & 0 \\ p^2 & p\sqrt{1-p^2} & \sqrt{1-p^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{N-1} & p^{N-2}\sqrt{1-p^2} & p^{N-3}\sqrt{1-p^2} & \dots & \sqrt{1-p^2} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Случайное поле с КФ (1.9) может быть сформировано также с помощью модели (1.11), известной как модель Хабиби и имеющей следующий вид:

$$x_{ij} = rx_{(i-1)j} + \rho x_{i(j-1)} - r\rho x_{(i-1)(j-1)} + \sigma_x^2 \sqrt{(1-\rho^2)(1-r^2)} \xi_{ij}, \quad (1.14)$$

где  $\xi_{ij}$  - СП независимых гауссовских случайных величин с ненулевым средним и единичными дисперсиями.

Таким образом, две рассмотренные модели (1.13) и (1.14) эквивалентны в том смысле, что они представляют гауссовское СП на сетке отсчетов  $\{i, j\}$  с одной и той же КФ.

### 1.3. Алгоритмы оценивания полей квадратурных компонент

После передачи пилот-сигналов в моменты времени  $l=1,2,\dots,i$  при заданных частотных позициях  $M$  пилот-сигналов  $v=1,2,\dots,M_l$  наблюдаются две квадратурные компоненты, каждая из которых имеет следующий вид

$$z_{lv} = x_{lv} + \theta_{lv}, \quad l=1,2,\dots,i, \quad v=1,2,\dots,M_l, \quad (1.15)$$

где  $\theta_{lv}$  - погрешности оценивания квадратурной компоненты  $x_{lv}$ , которые будем считать гауссовскими, независимыми с известными дисперсиями  $\sigma_\theta^2$ .

На основе анализа необходимо дать оценки всех значений  $x_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , и найти апостериорную дисперсию ошибки  $\varepsilon_{ij} = x_{ij} - \hat{x}_{ij}$  такого восстановления.

### Фильтр Винера

Для оптимальной оценки  $\hat{x}_{ij}$  значения  $x_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , квадратурной компоненты, используется линейное суммирование

$$\hat{x}_{ij} = \sum_{l=1}^i \sum_{v=1}^{M_l} C_{lvij} Z_{lv}, \quad (1.16)$$

где  $C_{lvij}$  - весовые коэффициенты, оптимальные значения которых могут быть найдены из условия минимума дисперсии ошибки  $\sigma_{ij}^2 = M \{ (x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2 \}$

После подстановки в эту формулу линейной комбинации (1.16), нахождения математического ожидания, дифференцирование по  $C_{lvij}$  и приравнивая производных нулю, получим известную систему уравнений Винера-Хопфа, которая в рассматриваемом случае может быть записана в виде:

$$\sum_{l=1}^i \sum_{v=1}^{M_l} C_{lvij} R_z(l_1 - l, v_1 - v) = R_x(l_1 - i, v_1 - j), \quad (1.17)$$

где  $l_1 = 1, 2, \dots, i; v_1 = 1, 2, \dots, M_l; R_z(m, n) = M \{ z_{lv} z_{(l+m)(v+n)} \} = R_x(m, n) + \sigma_\theta^2;$   
 $R_x(m, n) = M \{ x_{ij} x_{(i+m)(j+n)} \} = \sigma_x^2 r^{|m|} p^{|n|}$

Полученная система  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_i$  линейных уравнений после решения определяет совокупность такого же числа оптимальных коэффициентов  $C_{lvij}$ , необходимых для взвешивания наблюдаемых отсчетов  $z_{lv}, l = 1, 2, \dots, i; v = 1, 2, \dots, M_l$  в области всех пилот-сигналов. Безусловно, формулы (1.16) и (1.17) не могут быть непосредственно использованы для восстановления фазового поля из-за возрастающего со временем  $i = 1, 2, \dots$  объема вычислений. Поэтому переходят к квазиоптимальным алгоритмам оценивания СП на основе не всех, а только  $L$  последних по времени групп наблюдений. В этом случае формула (1.16) переписывается в виде:

$$\hat{x}_{ij} = \sum_{l=1-L+1}^i \sum_{v=1}^{M_l} C_{lvij} Z_{lv}. \quad (1.18)$$

Однако вычислительные сложности применения (1.18) с учетом скорректированного уравнения Винера-Хопфа (1.17) остаются значительными. Важным обстоятельством является также практическая неосуществимость адаптивного изменения расположения пилот-сигналов в зависимости, например, от измеренных коэффициентов корреляции  $r = r(i)$ ,  $\rho = \rho(i)$  или, тем более,  $r = r(i, j)$ ,  $\rho = \rho(i, j)$ . Действительно, для



каждого такого расположения пилот-сигналов необходимо хранить в памяти матрицу из  $N \times M_i \times M_{i-1} \times \dots \times M_{i-L+1}$  весовых коэффициентов или, что тем более нереально, решать для каждой конфигурации пилот-сигналов систему уравнений (1.17). Достоинством процедуры Винера-Хопфа является теоретическая возможность учета действительного вида КФ (1.5) квадратурных компонент.

### *Фильтр Калмана и рекурсивные вычисления*

Калмановские оценки могут быть построены на основе векторной модели СП (1.12). При этом наблюдения во всех  $N$  частотных каналах на очередном ( $i$  - м) временном интервале запишем в форме

$$\bar{z}_i = l_i \bar{x}_i + \bar{\theta}_i, i = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

где  $\bar{z}_i = (z_{i1} \ z_{i2} \ \dots \ z_{iM_i})^T$ ;  $M_i$  – число пилот-сигналов на  $i$ -м временном такте;  $c_i - M_i \times N$  матрица:

$$C_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

единичные элементы каждой строки которой соответствуют расположению одного из  $M_i$  пилот-сигналов;  $\bar{x}_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{iN})^T$  – оцениваемый вектор отсчетов квадратурной компоненты в  $N$  частотных каналах;  $\bar{\theta}_i = (\theta_{i1} \ \theta_{i2} \ \dots \ \theta_{iM_i})$  – вектор независимых гауссовских погрешностей оценивания, имеющих дисперсию  $\sigma_\theta^2$ .

Для заданных моделей наблюдений (1.19) и состояния системы (1.12) оптимальная оценка определяется следующим рекуррентным (по времени) соотношением:

$$\hat{x}_i = r \hat{x}_{i-1} + P_i \frac{C_i^T}{\sigma_\theta^2} (\bar{z}_i - C_i r \hat{x}_{i-1}), i = 1, 2, \dots, \quad (1.20)$$

где  $\hat{x}_0 = 0$ ;  $P_i = M \{(\bar{x}_i - \hat{x}_i)(\bar{x}_i - \hat{x}_i)^T\}$  – точная матрица ковариаций ошибок; диагональные элементы  $P_{si}$  этой матрицы представляют собой дисперсии ошибок оценивания (интерполяции) соответствующего значения  $x_{is}$ ,  $\sigma = 1, 2, \dots, N$ ;  $P_{si} = M \{(x_{is} - \hat{x}_{is})^2\}$ . Матрицы  $P_i$  могут быть вычислены до эксперимента при известных коэффициентах корреляции  $r$  и  $\rho$  с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$P_i = P_{ei} \left( E + \frac{1}{\sigma_\theta^2} c_i P_{\Delta i} c_i^T \right)^{-1}, \quad (1.21)$$

где  $P_{ei} = r^2 P_{i-1} + \sigma_x^2 (1 - r^2) V V^T$  – ковариационная матрица ошибок  $(x_{ij} - r \hat{x}_{(i-1)j})$  прогнозирования;  $P_{e1} = V_x = \sigma_x^2 V V^T$ .

Таким образом, оценивание СП  $x_{ij}$ , основанное на векторной модели (1.12), предполагает совместную одновременную обработку данных, полученных с помощью пилот-сигналов на всех частотах в момент времени  $i$  (на очередном такте). Это приводит к соответствующей стратегии позиционирования пилот-сигналов. Недостатками рассмотренного подхода к оцениванию являются большой объем вычислений и меньшая гибкость, чем у следующего варианта рекуррентного по времени и частоте оценивания.

Рассмотрим теперь возможности применения каузальных моделей СП вида (1.14) для построения рекуррентных оценок.

Одним из первых методов рекуррентного оценивания марковского СП (1.14) разработал А.Хабиби [2]. Синтез алгоритма основан на предположении, что структура оценки описывается такой же динамической моделью. При этом задача синтеза сводится к оптимизации соответствующих коэффициентов линейного рекурсивного двумерного фильтра. Мы не будем приводить эти результаты из-за их громоздкости. И, самое главное, значительного проигрыша по отношению к процедуре (1.20), (1.21).

Лучшие результаты могут быть получены с применением рекуррентных оценок, найденных в работах Д.Вудса (J.Woods) и его коллег [2]. Однако при этом задача фильтрации двумерного СП  $z_{ij}$  вновь приводится к задаче калмановской фильтрации многомерной случайной последовательности. Для этого в расширенный вектор состояния  $\bar{x}_{ij}$  включаются элементы всех строк (временных сечений частотно-временного СП), пересекающих область локальных состояний. Общее число операций, требуемых для вычисления оценок  $\hat{\bar{x}}_{ij}$ , совпадает с числом операций (1.20)-(1.21), но появляется возможность контролировать и прогнозировать качество оценивания фазовых характеристик каналов после приема каждого пилот сигнала.

Существенного сокращения числа операций за счет рекуррентности оценивания с одновременным сохранением качества оценок удастся достичь с помощью специально построенных алгоритмов фильтрации, включающих интерполяцию оценок.

Суть предложенных авторами настоящего отчета рекуррентных методов заключается в следующем. Будем рассматривать линейную комбинацию наблюдений

$$\hat{u}_i = P_i C_i^T \frac{1}{\sigma_\theta^2} (\bar{z}_i - c_i r \hat{x}_{\Delta i}) \quad (1.22)$$

в формуле (1.20) как оптимальный нерекурсивный фильтр (фильтр Винера) для вспомогательной последовательности, образованной разностями  $x_{ij} - x_{(i-1)j}, j = 1, 2, \dots, N$ . Для преобразования нерекурсивной винеровской оценки в рекурсивную допустим, что эти разности описываются специальными авторегрессионными уравнениями вида (1.14). При этом можно получить скалярный рекуррентный алгоритм оценивания  $x_{ij}$  по наблюдениям  $z_{ij}$ , функционирование которого происходит в три этапа. После получения очередных оценок  $\hat{x}_{(i-1)j}$  осуществляется прогнозирование и вычисление разностей  $(z_{ij} - \hat{x}_{\Delta ij})$ . На основе этих разностей выполняется рекуррентное оценивание  $\hat{u}_{ij}$  вспомогательных переменных  $\hat{u}_{ij}, j = 1, 2, \dots, N$ . Затем выполняется калмановская интерполяция  $\hat{u}_{ij}$  и получаются оценки  $\hat{x}_{ij}$  параметров канала связи [2,3].

Анализ показал, что предложенный подход позволяет получить алгоритмы фильтрации двумерного СП, объем вычислений которого снижен в  $N$  раз по сравнению с процедурой (1.20), (1.21) при сохранении того же качества оценивания.

Таким образом, возможны три подхода к решению задачи оценивания характеристик многочастотного канала связи с помощью пилот-сигналов. Один основан на фильтре Винера (1.16), второй – на векторной модели СП (1.20) и приводит к необходимости одновременной обработки данных полученных на всех частотах. Третий подход основан на представлении СП с помощью модели (1.14) и дает возможность контролировать качество оценок параметров канала связи последовательно и по частотам и по времени.

## 2. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПИЛОТ-СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ITU CHANNEL MODEL

### 2.1. Оптимальный квазикогерентный прием сообщений в системе с пилот-сигналами

Предположим, что передатчик базовой станции излучает многоуровневый сигнал вида

$$u_k(t) = u_0 A_k \cos(\omega t + \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (2.1)$$

где  $\omega$  - несущая частота;  $A_k$  и  $\varphi_k$  определяют любой возможный вид используемой модуляции в системах с OFDM. Например, если  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = -1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , то это соответствует BPSK; если  $A_1 = 1$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $A_2 = \sqrt{2}$ ,  $\varphi_2 = \pi/4$ ,  $A_3 = 1$ ,  $\varphi_3 = \pi/2$ ,  $A_4 = \sqrt{2}$ ,  $\varphi_4 = 3\pi/4$ ,  $A_5 = 1$ ,  $\varphi_5 = \pi$ ,  $A_6 = \sqrt{2}$ ,  $\varphi_6 = 5\pi/4$ ,  $A_7 = 1$ ,  $\varphi_7 = 3\pi/2$ ,  $A_8 = \sqrt{2}$ ,  $\varphi_8 = 7\pi/4$  то это 8-QAM и т.д.

На приемной стороне с помощью пилот-сигналов оцениваются две квадратурные составляющие на момент приема

$$\hat{B}_c = B_c + \varepsilon_c \quad \text{и} \quad \hat{B}_s = B_s + \varepsilon_s, \quad (2.2)$$

где  $B_c = B \cos \varphi$ ,  $B_s = B \sin \varphi$  - точные значения квадратур при фазовом набеге в канале равном  $\varphi$ ;  $\varepsilon_c$  и  $\varepsilon_s$  - независимые гауссовские случайные величины с ненулевыми средними и дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ , определяемыми алгоритмами оценивания квадратурных компонент (п. 1.3). Оптимальная обработка принимаемого цифрового сигнала

$$u_{bx}(t) = 2E_0 A_k \cos(\omega t + \varphi_k + \varphi) + n(t), \quad t \in (0, T) \quad (2.3)$$

на фоне белого шума  $n(t)$  со спектральной плотностью  $N_0$  заключается в вычислении оценочно-корреляционных интервалов

$$\Lambda_l = \int_0^T A_l (u_c(t) \hat{B}_c^l - u_s(t) \hat{B}_s^l) dt, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (2.4)$$

где  $u_c(t)$  и  $u_s(t)$  - квадратурные компоненты  $u_{bx}(t)$ ;  $\hat{B}_c^l = B \cos(\varphi_l + \varphi) + \varepsilon_1$ ;  $\hat{B}_s^l = -B \sin(\varphi_l + \varphi) + \varepsilon_2$  - оценки квадратурных компонент для сигнала  $u_l(t)$ , имеющего номер  $l = 1, 2, \dots, M$ . Такие оценки могут быть получены, например, в виде  $\hat{B}_c^k = \hat{B}_c \cos \varphi_k - \hat{B}_s \sin \varphi_k$ ,  $\hat{B}_s^k = \hat{B}_c \sin \varphi_k + \hat{B}_s \cos \varphi_k$ . При этом  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  будут гауссовскими некоррелированными величинами с дисперсиями  $\sigma_\varepsilon^2$ .

После вычисления  $\Lambda_l, l = 1, 2, \dots, M$ , решение принимается в пользу  $k$ -ого сигнала, если  $\Lambda_k > \Lambda_l, l = 1, 2, \dots, M, l \neq k$ .

Для бинарных сигналов правило принятия решения упрощается и принимает вид. Если

$$\Lambda = \int_0^T \left( A_1 \left( u_c(t) \hat{B}_c^1 - u_s(t) \hat{B}_s^1 \right) - A_2 \left( u_c(t) \hat{B}_c^2 - u_s(t) \hat{B}_s^2 \right) \right) dt > 0, \quad (2.5)$$

то передан сигнал  $u_1(t)$ . Если  $\Lambda < 0$ , то передан сигнал  $u_2(t)$ .

## 2.2. Вероятности ошибок в системах с многозначными сигналами

В известной нам литературе отсутствует анализ вероятностей ошибок с учетом случайных ошибок оценивания квадратурных компонент. Для расчета вероятностей ошибок необходимо вначале найти вероятностные характеристики оценочно-корреляционных интервалов (2.4). При этом будем полагать, что передается сигнал (2.1) с номером  $k$ . Тогда для

$$\Lambda_k = \int_0^T A_k \left( u_c(t) \hat{B}_c^k - u_s(t) \hat{B}_s^k \right) dt$$

и после подстановки (2.3) получим

$$\Lambda_k = E_0 A_k^2 B T + \varepsilon_1 E_0 A_k^2 \cos(\varphi_k + \varphi) + \int_0^T n(t) A_k \left( \cos \omega t (B \cos(\varphi_k + \varphi) + \varepsilon_1) - \sin \omega t (B \sin(\varphi_k + \varphi) + \varepsilon_2) \right) dt$$

В полученной формуле случайная величина  $B$  имеет релеевское распределение  $\omega(B) = \frac{B}{\sigma_x^2} e^{-B/2\sigma_x^2}$ , где  $\sigma_x^2$  - дисперсия поля каждой из квадратурных компонент. Случайная фаза  $\varphi$  распределена равномерно. С учетом этих замечаний можно определить математическое ожидание

$$M\{\Lambda_k\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A_k^2 \sigma_x E_0 T \quad (2.6)$$

и дисперсию статистики  $\Lambda_k$ :

$$D\{\Lambda_k\} = N_0 T \sigma_x^2 A_k^2 + \sigma_\varepsilon^2 \left( (E_0 T)^2 A_k^4 + A_k^2 N_0 T \right). \quad (2.7)$$

Таким образом, эквивалентное отношение сигнал/шум

$$q = \frac{M^2\{\Lambda_k\}}{D\{\Lambda_k\}} = \frac{q_0}{1 + \sigma^2 \left( 1 + \frac{2}{\pi} q_0 \right)} \quad (2.8)$$

уменьшается за счет конечной относительной дисперсии  $\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_x^2$  в  $\left( 1 + \sigma^2 \left( 1 + \frac{2}{\pi} q_0 \right) \right)$  раз по сравнению со случаем точно известной фазы принимаемого сигнала:

$$q_0 = \frac{\pi A_k^2 (E_0 T)^2}{2 N_0 T}. \quad (2.9)$$

Рассмотрим теперь статистики (2.4) при  $l \neq k$ . В этом случае после подстановки (2.3) в (2.4) и вычисления математических для ортогональных сигналов ожидания, находим

$$M\{\Lambda_l\} = 0, l \neq k, \quad (2.10)$$

$$D\{\Lambda_l\} = N_0 T \sigma_x^2 A_l^2 + \sigma_\varepsilon^2 \left( (E_0 T)^2 (A_k A_l)^2 + A_l^2 N_0 T \right).$$

Полученные формулы позволяют при гауссовской аппроксимации распределений  $\omega(\Lambda_l / \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  в предположении независимости случайных величин  $\Lambda_l, l = 1, 2, \dots, M$ , записать соотношение для вероятности правильного решения относительно номера  $k$  переданного сигнала

$$P\{\Lambda_k > \Lambda_l / u_k\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(\varepsilon_1) w(\varepsilon_2) \int_{-\infty}^{\infty} w(\Lambda_k / \varepsilon_1, \varepsilon_2) \left( \prod_{l \neq k} \int_{-\infty}^{\Lambda_k} \omega(\Lambda_l / \varepsilon_1, \varepsilon_2) d\Lambda_l \right) d\Lambda_k d\varepsilon_1 d\varepsilon_2, \quad (2.11)$$

где  $w(\varepsilon_1)$  и  $w(\varepsilon_2)$  - гауссовские распределения с нулевыми средними и дисперсиями  $\sigma_\varepsilon^2$ . Однако расчеты по формуле (2.11) для многолучевых сигналов представляют определенные трудности. Кроме того, как показывает анализ, условие некоррелированности статистик  $\Lambda_l, l = 1, 2, \dots, M$ , выполняются только при малых  $\sigma_\varepsilon^2 / \sigma_x^2$ .

### 2.3. Помехоустойчивость системы с пилот-сигналами для бинарных символов

Существует единственный случай бинарных сигналов, тогда можно дать относительно простые аналитические оценки для вероятности ошибки. Действительно, именно бинарные символы позволяют записать линейную статистику (2.5) для принятия решения. Используя уже рассмотренную методику, определим характеристики (2.5) для случая, когда передается первый сигнал ( $k = 1$ ).

Соотношение (2.5) при этом запишется в виде

$$\begin{aligned} \Lambda = & E_0 A_1^2 B T + \varepsilon_1 T (E_0 A_1^2 \cos(\varphi_1 + \varphi) - E_0 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 + \varphi)) - \\ & - E_0 A_1 A_2 B T \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \varepsilon_2 T (E_0 A_1^2 \sin(\varphi_1 + \varphi) - E_0 A_1 A_2 \sin(\varphi_2 + \varphi)) + \\ & + \int h(t) A_1 (\cos \omega t (B \cos(\varphi_1 + \varphi) - B \cos(\varphi_2 + \varphi)) - \sin \omega t (B \sin(\varphi_1 + \varphi) - \\ & - B \sin(\varphi_2 + \varphi))) dt. \end{aligned}$$

При использовании противоположных бинарных сигналов

$$(A_1 A_2 = -1, |A_1| = |A_2| = 1)$$

$$M\{\Lambda\} = 2E_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x T,$$

$$D\{\Lambda\} = 4\sigma_\varepsilon^2 (E_0 T)^2 + N_0 T \sigma_x^2.$$

Вероятность ошибочного приема определяется следующим выражением

$$P_{om} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\Lambda) d\Lambda = 0,5 - q_0(\sqrt{q}), \quad (2.12)$$

где  $q = \frac{M^2\{\Lambda\}}{D\{\Lambda\}} = \frac{q_0}{1 + \frac{2}{\pi} q_0 \sigma^2}$ ;  $q_0 = \frac{2\pi(E_0 T)^2}{N_0 T}$  - отношение сигнал/шум при

точно известных характеристиках канала;  $\sigma^2 = \sigma_e^2 / \sigma_x^2$  - относительная дисперсия ошибки оценивания квадратурных компонент.

Полученное соотношение очень близко по характеру к формуле (2.8) и позволяет рассчитать потери за счет неточного оценивания квадратурных составляющих на основе пилот-сигналов, а также вероятность ошибки при приеме противоположных бинарных сигналов.

#### 2.4. Анализ показателей качества при оптимизации положения пилот-сигналов

При выборе расположения пилот-сигналов на плоскости время-частота ключевую роль играет выбранный интегральный показатель качества оценивания. При построении оценок  $\hat{x}_{ij}$ ,  $j=1,2,..N$ , квадратурных компонент  $x_{ij}$  для всех рассмотренных алгоритмов (п.1.3) могут быть вычислены относительные дисперсии ошибок  $\sigma_{ij}^2 = M\{(x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2\} / \sigma_{x_{ij}}^2$ ,  $j=1,2,..N$ . Для каждого  $i$ -го частотного канала на очередной ( $i$ -й) сигнальной порции по времени появления ошибок оценивания приводит к уменьшению отношения сигнал/шум  $q_0$  в  $1 + \frac{2}{\pi} q_0 \theta_{ij}^2$  раз. Наконец, для заданного вида модуляции по формуле (2.11) могут быть вычислены вероятности ошибок  $P_{err} = 1 - P\{\Lambda_{kij} > \Lambda_{lij} / U_{kij}\}$ . Формула (2.11) значительно упрощается для бинарных противоположных (2.12) или ортогональных сигналов. Таким образом, при построении критерия качества можно использовать поле  $\{\sigma_{ij}^2\}$  относительных дисперсий ошибок, поле  $\left\{q_{ij} = q_0 / \left(1 + \frac{2}{\pi} q_0 \sigma_{ij}^2\right)\right\}$  отношений сигнал/шум или поле  $\{P_{errij}\}$  вероятностей ошибок с учетом числа  $M_1 \times M_2 \times .. M_i$  пилот-сигналов. В подобных условиях для построения показателей качества  $J$  часто применяются линейные комбинации частных показателей качества

$$J_\sigma = \frac{1}{M_i N} \sum_{i=1}^{M_i} \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}^2, J_q = \frac{1}{M_i N} \sum_{i=1}^{M_i} \sum_{j=1}^N q_{ij}, \quad (2.13)$$

$$J_\sigma = \frac{1}{M_i N} \sum_{i=1}^{M_i} \sum_{j=1}^N P_{errij},$$

где  $M_t$  – число временных сигнальных позиций, на которых строится критерий качества. При этом наиболее подходящим критерием для рассматриваемой задачи является средняя вероятность ошибки  $J_p$ . Однако применение  $J_p$  имеет следующие недостатки. Во-первых, для каждого вида модуляции, вообще говоря, необходимо производить отдельную оптимизацию расположения пилот-сигналов. Во-вторых, наличие протяженных временных и частотных корреляционных связей приводит к пространственному группированию как ошибок, так и правильных решений. При этом нахождение среднего арифметического вероятностей ошибок может привести к грубым ошибкам. Наконец для многозначных сигналов вычисление  $P_{err}$  по формуле (2.11) представляет определенные трудности.

В связи с этим предлагается использовать минимизацию следующих критериев

$$G_\sigma = \max_{i,j} \sigma_{ij}^2, \sigma_q = \max_{i,j} q_{ij}^2, \sigma_p = \max_{i,j} P_{err\ ij}, \quad (2.14)$$

Достоинством этих показателей являются гарантированные характеристики приема сигналов для наихудшего случая, что соответствует общей концепции построения многочастотных систем связи. Весьма важно, что оптимизация по этим трем критериям приводит к одной и той же расстановке пилот-сигналов для любых видов модуляции. Наконец, при сравнении различных способов расстановки для одних и тех же  $G_\sigma$  и близких числах  $M_t N$  пилот-сигналов зависимости  $\sigma = \sigma(i, j)$ ,  $q = q(i, j)$ ,  $P_{err} = P_{err}(i, j)$  при различных расстановках близки по виду и применение любых разумных критериев дает практически совпадающий результат. Это подтверждается и результатами математического моделирования. Именно поэтому предлагается использовать при сравнении двух расстановок пилот-сигналов следующий критерий. Зафиксируем для каждой из расстановок  $G_\sigma$  на уровне  $\delta$ , например 0,03 и определяем требуемые числа  $(M_t N)_1$  и  $(M_t N)_2$  пилот-сигналов для этих расстановок. Тогда лучшей будет та расстановка пилот-сигналов, для которой меньше их число  $M_t N$ .

## 2.5. Структура адаптивной системы связи с пилот-сигналами

Проведенные исследования приводят к структуре проектируемой системы с адаптивным расположением пилот-сигналов, приведенной на рис. 2.1. Система работает следующим образом. На основе наблюдений  $\{\bar{z}_{ij}\}$  комплексных амплитуд огибающих в точках расположения пилот-сигналов вырабатываются оценки коэффициентов корреляции и отношения сигнал/помеха  $\hat{\rho}_i, \hat{r}_j, \hat{q}_i$  характеристики системы передачи данных (СПД). Полученные оценки позволяют сделать расчет показателей качества  $\{P_{ij}\}_L$  для каждого L-го плана расположения пилот-сигналов.



Возможны два подхода к решению задачи. Первый заключается в расчете непосредственно вероятностей ошибок для данного вида модуляции с учетом расположения пилот-сигналов и оцененных характеристик СПД. Второй подход основан на оценке дисперсий ошибок  $\{P_{ij}\}$  восстановления комплексной огибающей и косвенному оцениванию качества канала при различных планах расположения пилот-сигналов.

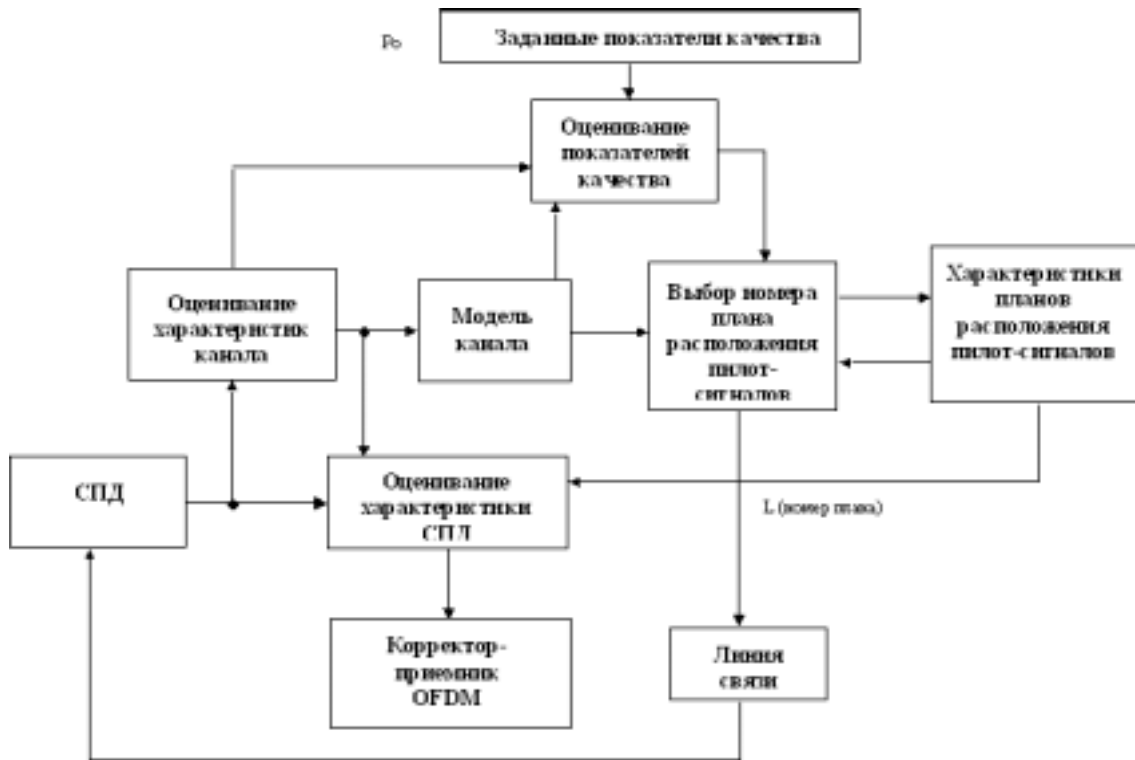


Рис.2.1. Структура системы с адаптивным расположением пилот-сигналов

После сравнения показателей качества  $\{P_{ij}\}$  с заданными  $P_0$  осуществляется выбор номера  $L$  плана расположения пилот-сигналов. При этом общее число возможных планов ограничено сверху числом  $L_{\max}$ . Это число определяется, с одной стороны, быстродействием вычислителя, требования к которому линейно возрастают при увеличении  $L_{\max}$ . С другой стороны, для передачи этого номера требуется определенное время, рост которого приводит к потерям информации.

Минимальное число планов  $L_{\min}$  обусловлено неоптимальностью размещения пилот-сигналов при грубом планировании и, как следствие, потерями в пропускной способности СПД за счет использования большего, чем это требуется, числа пилот-сигналов.

После выбора номера  $L$  плана основные характеристики соответствующих алгоритмов оценивания параметров канала СПД, хранящиеся в памяти спецпроцессора, позволяют осуществить быстрые вычисления интерполированных по времени и частоте комплексных огибающих  $\bar{x}_{ij}$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗРАБОТАННЫХ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД НЕСУЩИХ И РАССТАНОВКИ ПИЛОТ-СИГНАЛОВ

#### 3.1. Расчёт параметров поля время-частота по параметрам ITU-channel model

Для расчета параметров поля время-частота разработана программа editpilots. Данная программа основана на теоретических исследованиях, изложенных в разделах 1 и 2 настоящего отчета, и позволяет рассчитывать коэффициенты корреляции поля время-частота по параметрам модели канала связи, рекомендованной Международным Союзом Телекоммуникаций (ITU) (см., табл. 3.1 и табл. 3.2). Пользователем программы задаются параметры отдельных лучей канала: относительная задержка в наносекундах и средняя мощность лучей в дБ. Количество лучей может варьироваться от 1 до 6.

Вычисление коэффициента корреляции по времени основано на аппроксимации функции Бесселя,

$$B_{time}(\tau) = \sigma^2 J_0(2\pi F_D \tau),$$

где  $J_0(\dots)$  - функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка,  $F_D$  - величина доплеровского расширения спектра,

а вычисление коэффициента корреляции по частоте – на аппроксимации корреляционной функции

$$B_{frequency}(\Delta f) = \sigma^2 \sum_{q=1}^Q \lambda_q^2 e^{\Delta f \tau_q},$$

где  $Q$  - число лучей,  $\tau_q$  - задержка q-го луча,  $\lambda_q$  - амплитудный весовой множитель q-го луча. По умолчанию в программе заданы параметры ITU модели для  $F_D=200$  Гц, канал А (табл. 3.1).

Табл. 3.1

ITU-модель канала для транспортных средств

Номер луча	Канал А		Канал В	
	Относительная задержка (нс)	Средняя мощность (дБ)	Относительная задержка (нс)	Средняя мощность (дБ)
1	0	0	0	-2.5
2	310	-1.0	300	0
3	710	-9.0	8900	-12.8
4	1090	-10.0	12900	-10.0
5	1730	-15.0	17100	-25.2
6	2510	-20.0	20000	-16.0

Табл. 3.2

ITU-модель канала для пешеходов

Номер луча	Канал А		Канал В	
	Относительная задержка (нс)	Средняя мощность (дБ)	Относительная задержка (нс)	Средняя мощность (дБ)
1	0	0	0	0
2	110	-9.7	200	-0.9
3	190	-19.2	800	-4.9
4	410	-22.8	1200	-8.0
5			2300	-7.8
6			3700	-23.9

На рис. 3.1 для примера приведена копия экрана диалогового окна, в котором осуществляется ввод исходных данных модели канала, отображаются вычисленные коэффициенты корреляции по частоте и по времени и полученная оптимальная расстановка пилот-сигналов.

Например, при  $t=10^{-4}$  сек для доплеровского сдвига 10 и 200 Гц получаем коэффициенты корреляции по времени 0.997 и 0.943 соответственно. Для ситуации транспортных средств коэффициент корреляции по частоте составляет для каналов А и В соответственно 0.9975 и 0.9859.

### 3.2. Оптимизация расстановки пилот-сигналов

Для оптимальной расстановки пилот-сигналов поле время-частота  $X$  предполагается заданным авторегрессионным уравнением Хабиби (см, разделы 1 и 4 настоящего отчета) с известными коэффициентами корреляции по времени  $\rho$  и частоте  $r$  и дисперсией  $\sigma_x^2$ .

$$x_{ij} = x_{i-1,j}\rho + x_{i,j-1}r - x_{i-1,j-1}\rho r + \xi_{ij}, \quad (3.1)$$

где  $\xi_{ij}$  - независимый нормированный гауссовский шум.

Оценка комплексных амплитуд  $\bar{x}_k$  в  $k$ -ой строке производится по совокупности всех пилот-сигналов на основе анализа последовательности их наблюдений

$$\bar{z}_k = C_k \bar{x}_k + \bar{\theta}_k, \quad (3.2)$$

где  $C_k$  - матрица размерностью  $N_k \times n$  выделения пилот-сигналов из вектора  $\bar{x}_k$ ;  $\bar{\theta}_k$  - некоррелированная случайная величина с ковариационной матрицей  $V_k = M\{\bar{\theta}_k \bar{\theta}_k^T\}$ ;  $n$  - число каналов связи;  $N$  - число пилот-сигналов к  $k$ -й строке.

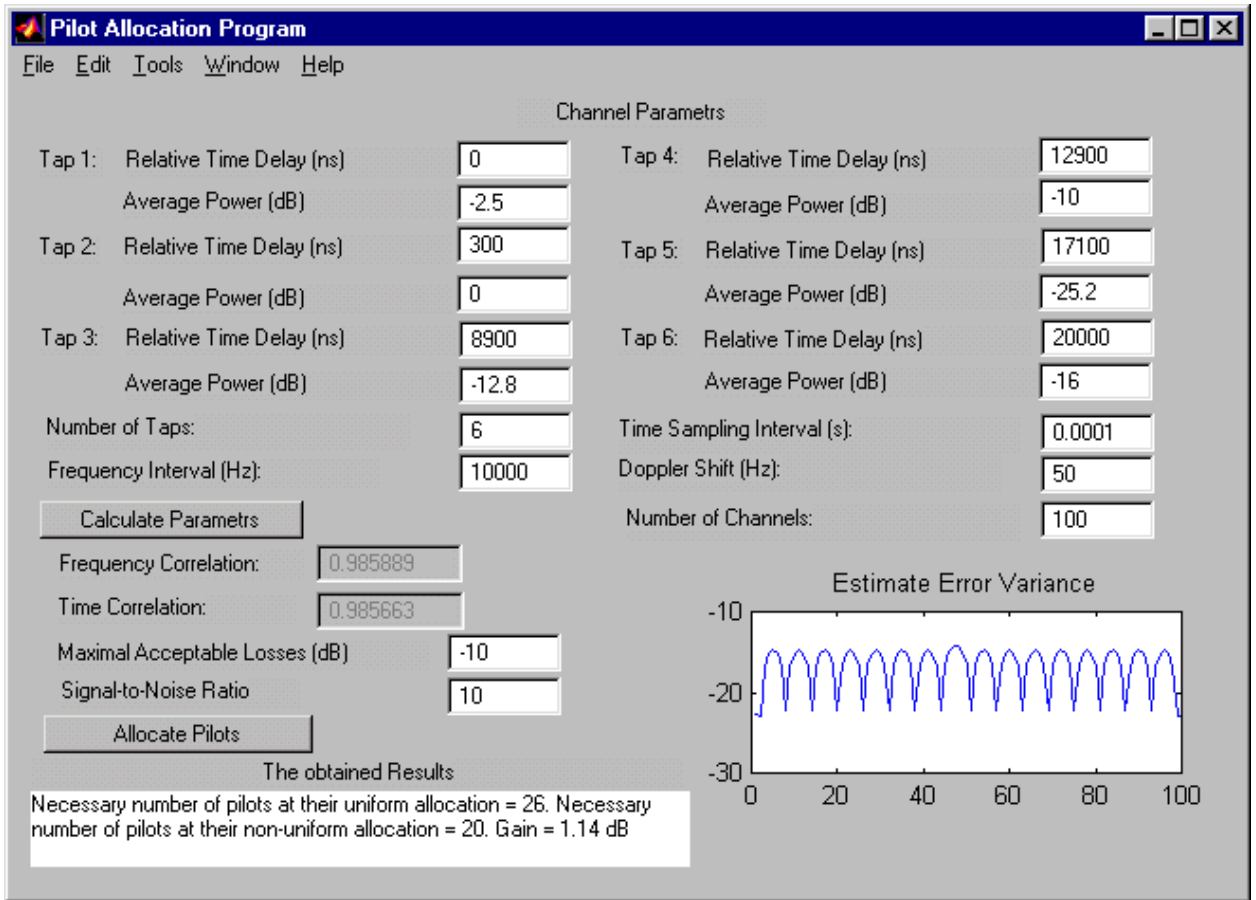


Рис. 3.1. Копия экрана диалогового окна программы editpilots

Для оценки  $\hat{\bar{x}}_k$  вектора  $\bar{x}_k$  используется калмановская фильтрация

$$\hat{\bar{x}}_k = \hat{\bar{x}}_{ek} + B_k (\bar{z}_k - \hat{\bar{x}}_{ek}) \quad (3.3)$$

где  $\hat{\bar{x}}_{ek} = \rho \hat{\bar{x}}_{k-1}$  - поправка оценки вектора  $\hat{\bar{x}}_{k-1}$ ;  $B_k = P_{ek} C_k^T G_k^{-1}$  и  $G_k = C_k P_{ek} C_k^T + V_k$  - промежуточные выражения;  $P_{ek} = \rho^2 P_{k-1} + (1 - \rho^2) V_x$  - дисперсия ошибки прогноза. Для каждой строки рассчитывается дисперсия погрешности оценивания, которая соответствует элементам главной диагонали матрицы

$$P_k = (E - B_k C_k) P_{ek}, \quad (3.4)$$

где  $E$  - единичная матрица. На строке выбирается такое число и расположение пилот-сигналов, чтобы максимальная дисперсия погрешности оценивания не превышала заданного порога  $L$  или средняя дисперсия по строке была минимальна. Пример зависимости дисперсии погрешности оценивания от номера канала при регулярном расположении 12 пилот-сигналов по строке, содержащей 100 частотных каналов, приведен на рис. 3.2.

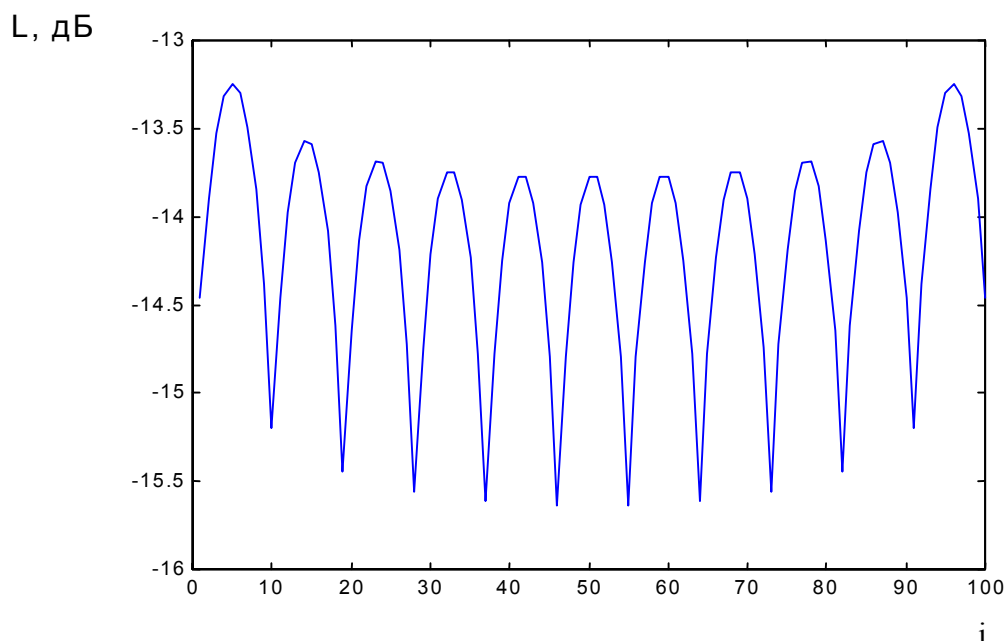


Рис. 3.2. Дисперсия погрешности оценивания комплексных амплитуд при регулярной расстановке пилот-сигналов.

Блок-схема алгоритма расстановки пилот-сигналов при постоянных значениях коэффициентов корреляции по времени  $\rho$  и частоте  $r$  и отношении сигнал/шум  $q$  приведена на рис. 3.3. Для оценки качества расстановки пилот-сигналов с помощью приведенного алгоритма выполнялась также их расстановка посредством полного перебора возможных положений пилот-сигналов. Блок-схема алгоритма полного перебора вариантов расстановки пилот-сигналов приведена на рис. 3.4.

На основе алгоритма по рис. 3.3. разработана программа `Ofdm` расстановки пилот-сигналов, реализованная в среде `MatLab 5.3`. Она содержит главный модуль, представляющий собой реализованный как диалоговое окно интерфейс, в котором задаются начальные параметры для расстановки пилот-сигналов (рис. 3.5), и модуль, оптимизирующий расстановку пилот-сигналов.

После задания необходимых входных параметров вызывается процедура `PlaceSignals`, которая находится в отдельном `m`-файле и запускается по нажатию кнопки «Allocate Pilots». В ходе выполнения данной процедуры на экране монитора отображаются информационные окна, в которых показывается состояния выполнения соответствующих этапов работы программы.

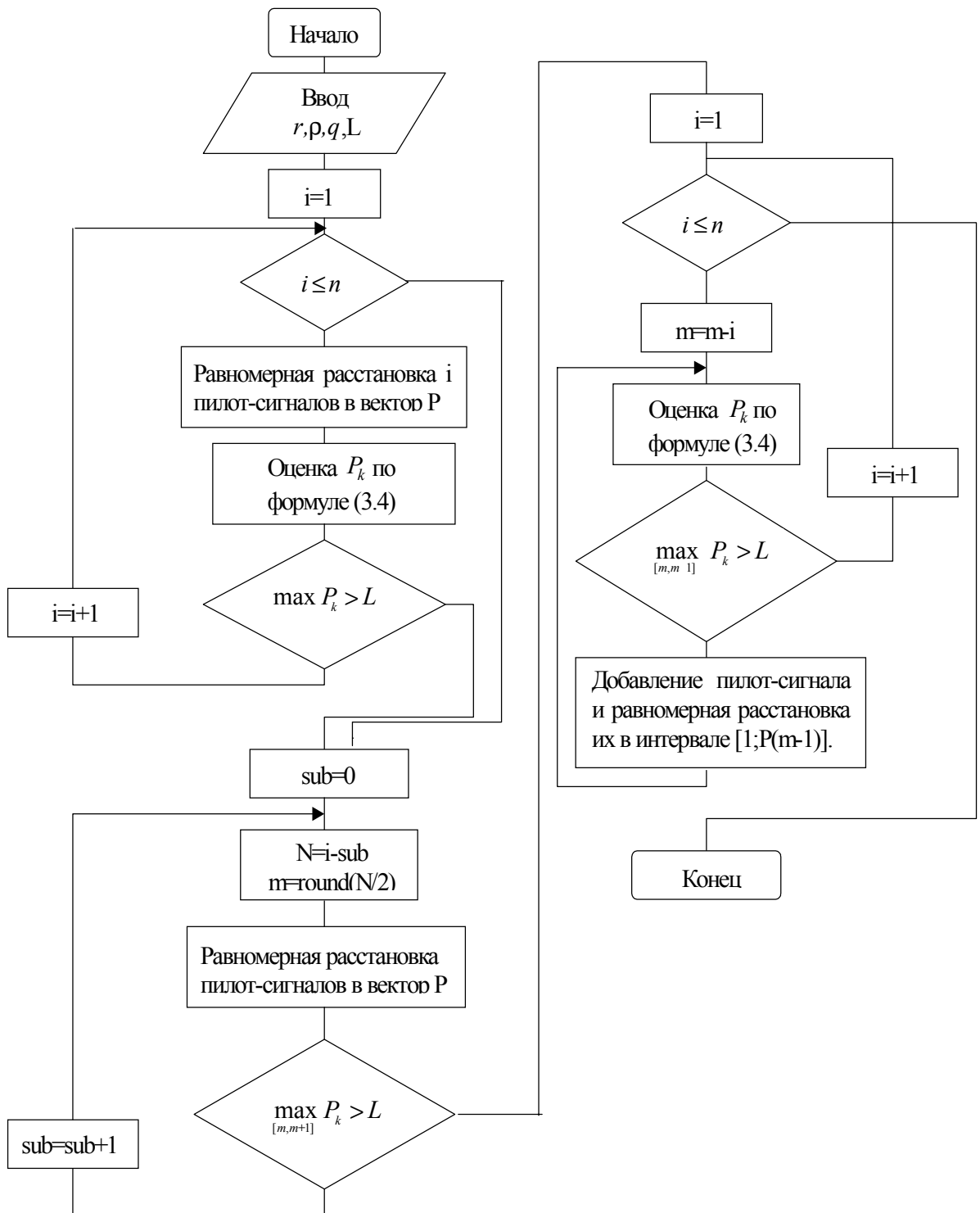


Рис. 3.3. Блок-схема алгоритма неравномерной расстановки пилот-сигналов.

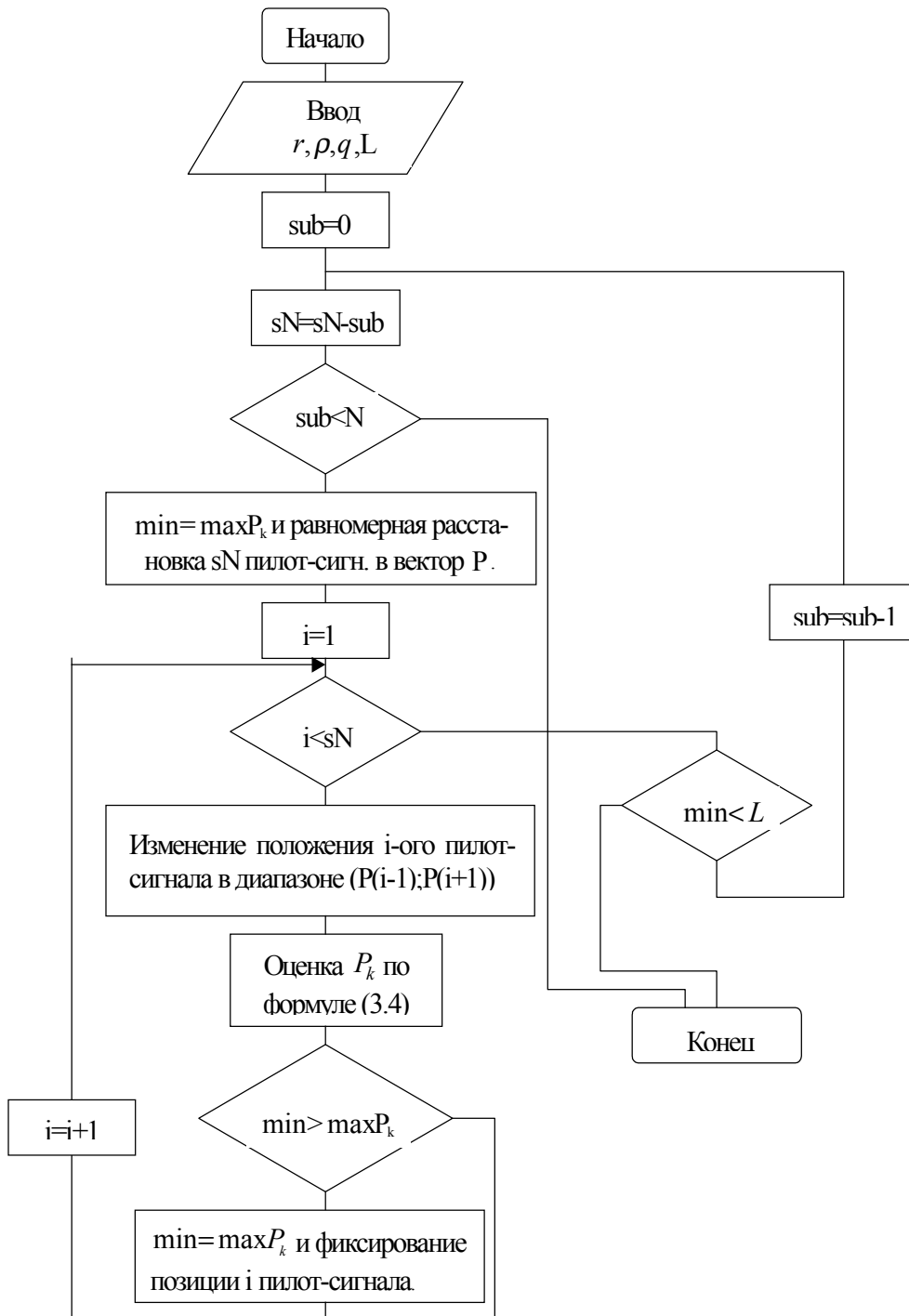


Рис. 3.4. Блок-схема алгоритма полного перебора вариантов расстановки пилот-сигналов.

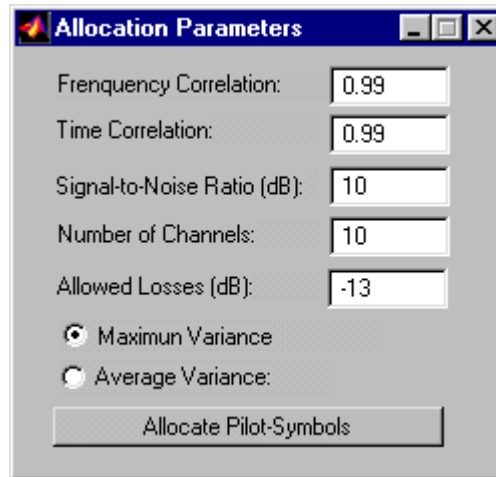


Рис. 3.5. Диалоговое окно программы Ofdm расстановки пилот-сигналов.

По завершению расчета на экран выдается информационное окно (рис. 3.6), в котором отображены нерегулярное и регулярное расположения пилот-сигналов при одинаковых ограничениях на максимальную дисперсию погрешности оценивания, график дисперсии ошибки оценивания и выигрыш

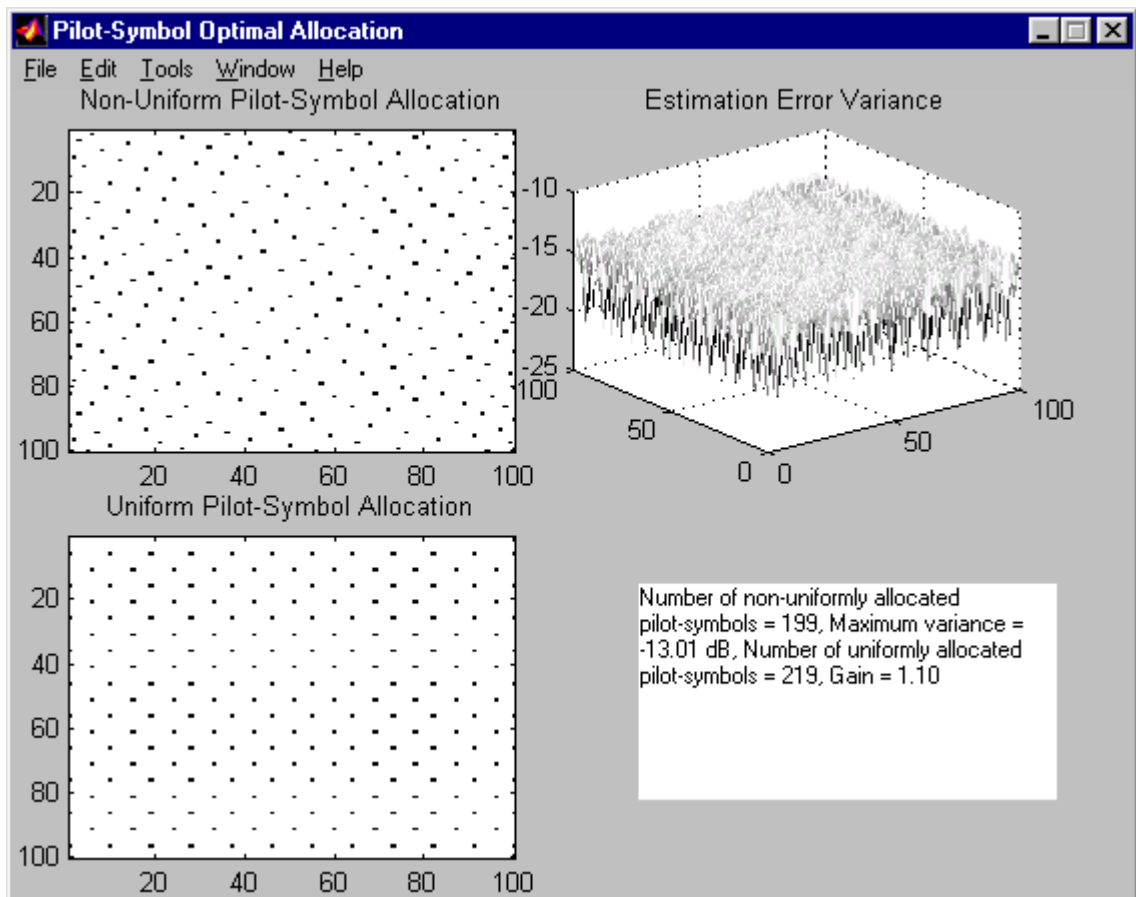


Рис. 3.6. Информационное окно вывода результатов расстановки пилот-сигналов.



в уменьшении числа тест-сигналов при их нерегулярном размещении по отношению к регулярному размещению, определенный по соотношению

$$G = N_r / N_n$$

где  $N_n$  - число пилот-сигналов при нерегулярном их расположении;  $N_r$  - число пилот-сигналов при регулярном расположении.

Для примера в табл. 3.3 и на рис. 3.7 - рис. 3.11 приведены экспериментальные результаты, характеризующие выигрыш в числе пилот-сигналов при их оптимальной нерегулярной расстановке для различных значений параметров канала, соответствующих техническому заданию.

Табл. 3.3

Выигрыш в уменьшении числа пилот-сигналов при оптимальной расстановке по сравнению с регулярной

	r=0.985			r=0.993			r=0.998		
	q=10	q=20	q=30	q=10	q=20	q=30	q=10	q=20	q=30
$\rho=0.95$	1.6	1.14	1	1.4	1.09	1	1.15	1.04	1
$\rho=0.97$	1.4	1.12	1	1.2	1.07	1	1.08	1.03	1
$\rho=0.99$ 5	1.15	1.1	1	1.05	1.04	1	1.02	1.02	1

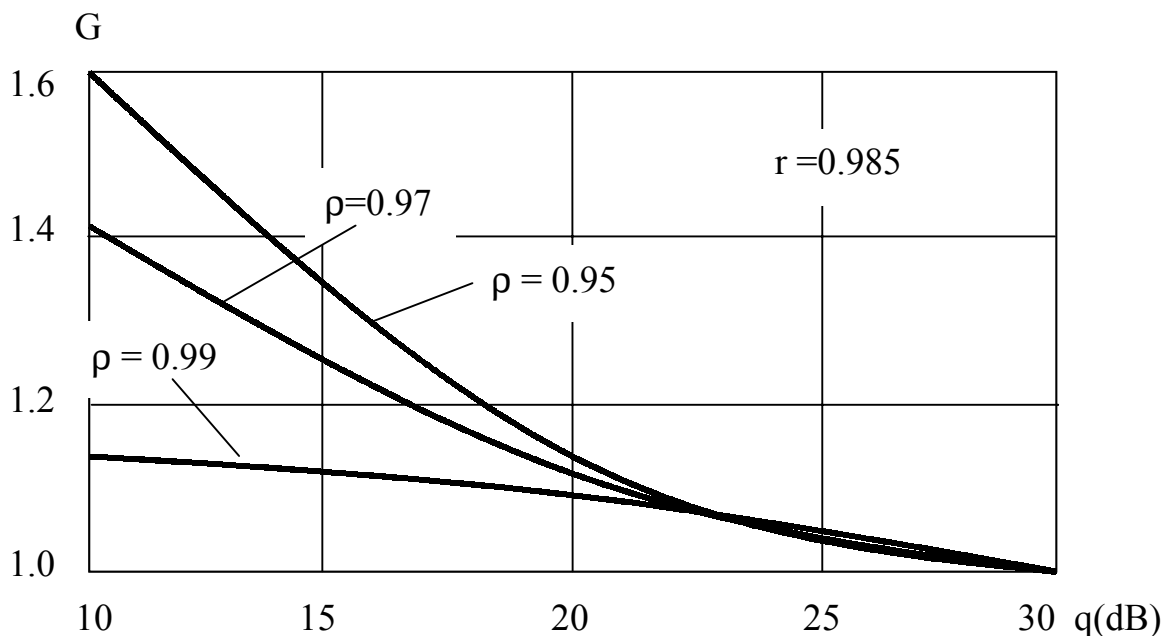


Рис. 3.7

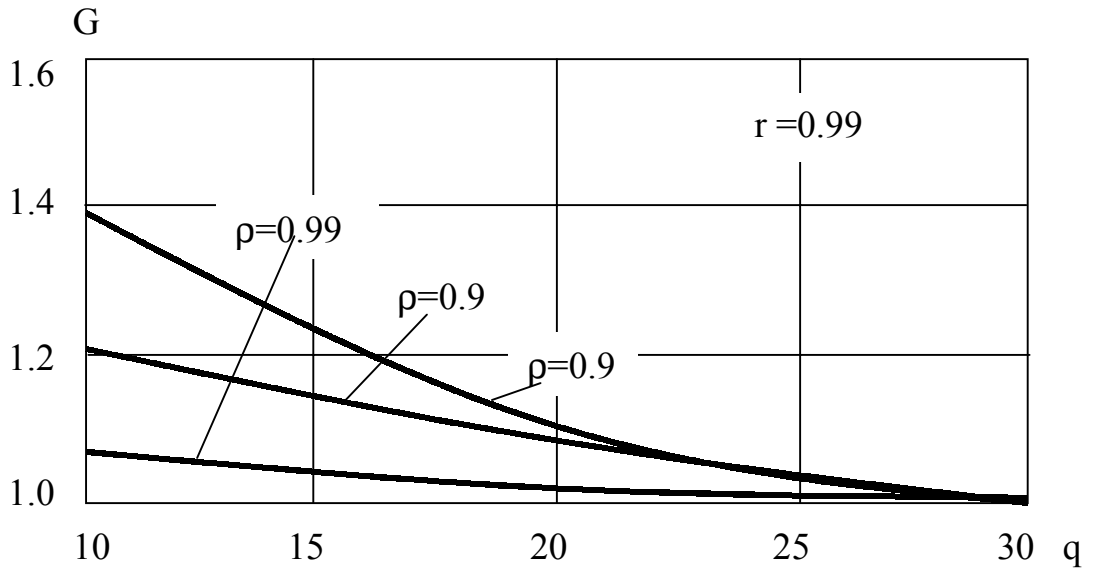


Рис. 3.8.

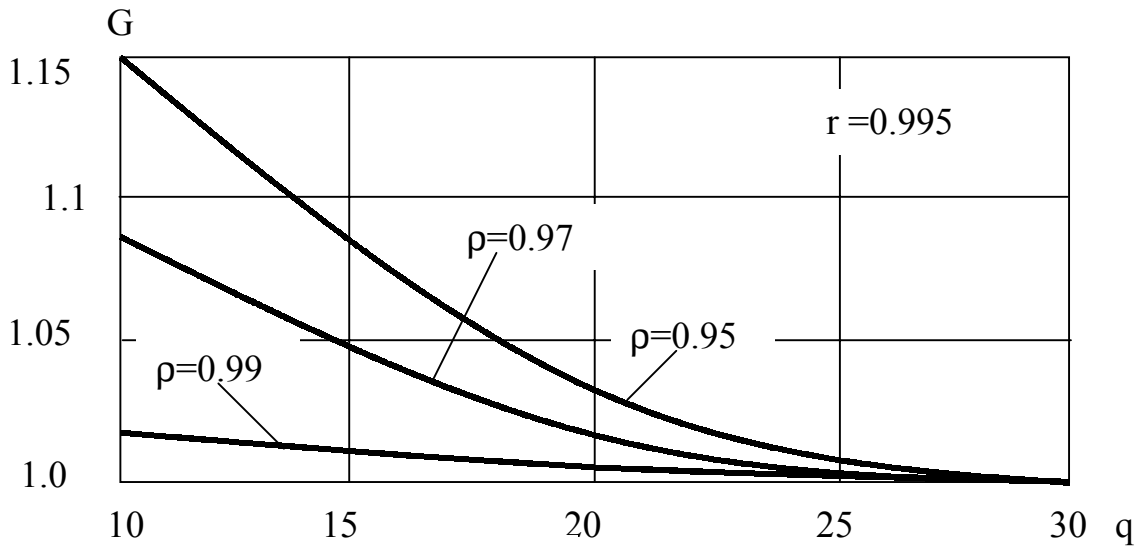


Рис. 3.9.

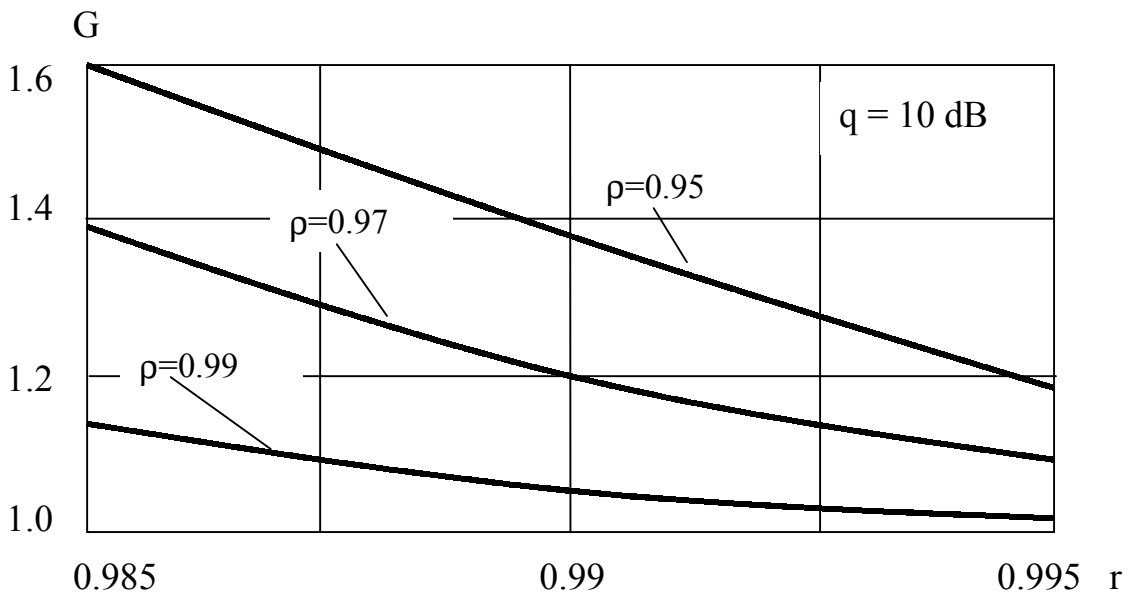


Рис. 3.10.

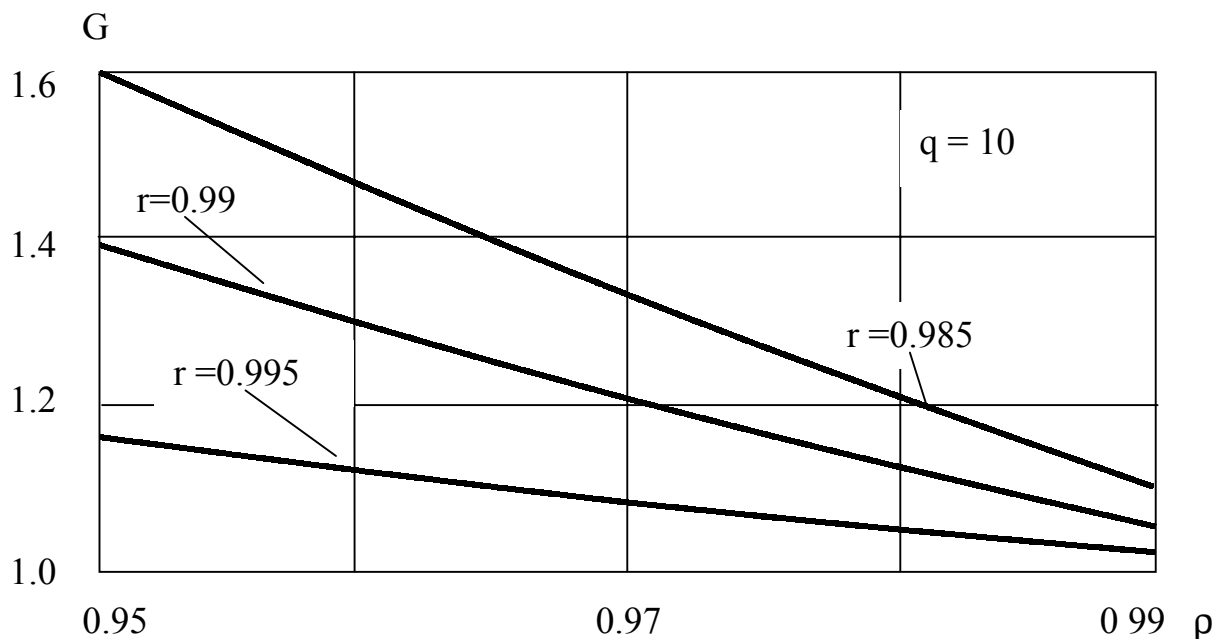


Рис. 3.11.

### 3.3. Выводы

Таким образом, нерегулярная оптимальная расстановка пилот-сигналов по критерию минимума допустимых максимальных потерь точности оценивания комплексных амплитуд несущих позволяет получить существенный выигрыш в пропускной способности систем OFDM по сравнению с ситуацией регулярной расстановки пилот-сигналов.

Исследования показывают, что этот выигрыш растет с уменьшением коэффициентов корреляции комплексных амплитуд несущих по времени и частоте и отношения дисперсии сигнала к дисперсии шума.

Отметим, что если для изменяющихся параметров канала регулярная расстановка пилот-сигналов рассчитана на наихудший случай, то при оценивании параметров канала и оптимальной расстановке пилот-сигналов по оцененным параметрам выигрыш в пропускной способности систем с OFDM существенно увеличится. Исследованию этих вопросов посвящены разделы 5 и 6 настоящего отчета.

## 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СОКРАЩЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД НЕСУЩИХ

### 4.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу фильтрации поля время-частота комплексных амплитуд несущих с нерегулярным (в общем случае случайным) расположением наблюдаемых пилот-сигналов. Пусть вертикальная ось (координата  $i$ ) соответствует времени, а горизонтальная (координата  $j$ ) - каналам связи, ранжированным по частоте (рис. 4.1). Поле  $Z = \{z_{ij}, (i, j) \in G\}$  определено в узлах сетки  $G$ , но особенностью рассматриваемой задачи является то, что поле наблюдается (измеряется) только в части узлов сетки  $G$ , причем эти узлы могут располагаться как угодно, в том числе и случайно. На рис. 4.1 узлы, в которых имеются наблюдения, отмечены точками. Поле  $Z$  представляет собой зашумленное информативное поле  $X = \{x_{ij}\}$ . Наблюдения поступают построчно (в каждый момент времени наблюдается только часть  $i$ -ой строки  $Z = \{z_{ij}, j = \overline{1, N}\}$ ).

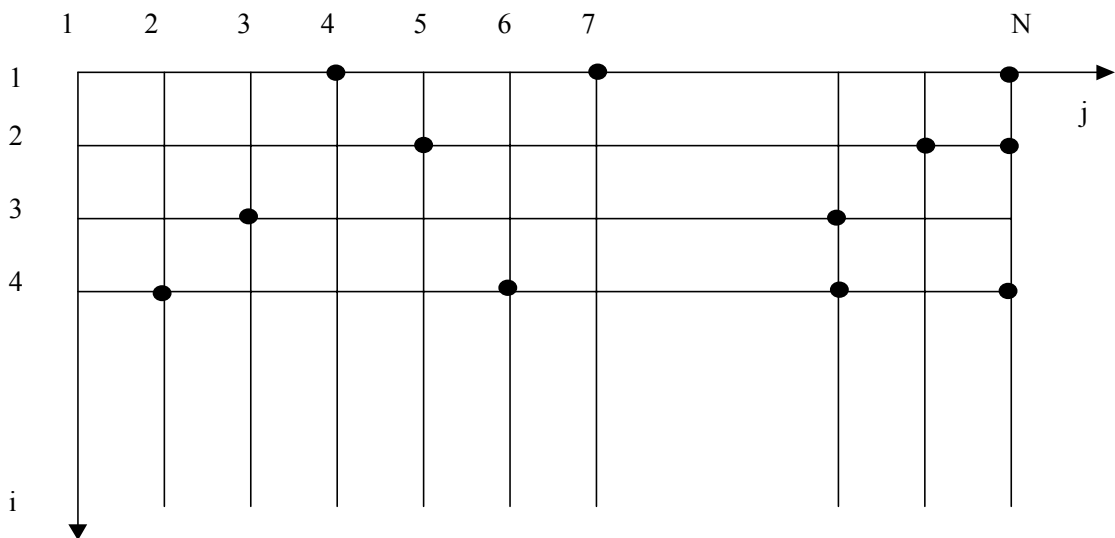


Рис. 4.1. Нерегулярная расстановка пилот-сигналов на поле частота-время

Требуется по всем имеющимся (вплоть до момента  $i$ ) наблюдениям оценить последнюю  $i$ -ую строку  $x_i = \{x_{ij}, j = \overline{1, N}\}$  информативного поля  $X$ .

Для математической формулировки требуется задать модель информативного поля  $X$ , модель наблюдений  $Z$  (взаимодействие с помехами) и определить понятие оптимальности оценки.

### *Модель информативного сигнала*

Непредсказуемый характер информативных полей приводит к необходимости использования для их описания различных видов случайных полей (СП), т.е. случайных функций нескольких переменных. В нашем случае таких переменных две:  $i$  и  $j$ . Таким образом, поле  $X = \{x_{ij}, (i, j) \in G\}$  - это совокупность случайных величин (СВ)  $x_{ij}$ .

К настоящему времени разработан целый ряд моделей СП, некоторые из них описаны в [2]. Очень удобными для анализа и разработки алгоритмов обработки являются авторегрессионные модели, в частности, модель Хабиби

$$\begin{aligned} x_{i1} &= \sigma_x \xi_{11} \\ x_{1j} &= r \cdot x_{1,j-1} + \sigma_x \cdot \sqrt{1-r^2} \cdot \xi_{1j}, \quad j = 2, 3, \dots \\ x_{i1} &= \rho \cdot x_{i-1,1} + \sigma_x \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \xi_{i1}, \quad i = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

$x_{ij} = r \cdot x_{i,j1} + \rho \cdot x_{i-1,j} - r \cdot \rho \cdot x_{i-1,j-1} + \sigma_x \cdot \sqrt{(1-\rho^2) \cdot (1-r^2)} \cdot \xi_{i,j}$ ,  $i, j = 2, 3, \dots$ , где  $\{\xi_{ij}\}$ - порождающие СП, состоящие из независимых стандартных (с нулевым средним и единичной дисперсией) гауссовских величин,  $\sigma_x^2$  - дисперсия поля  $X$ ,  $r$  и  $\rho$  - коэффициенты корреляции поля  $X$  на единичном расстоянии по горизонтали и вертикали. Первое из уравнений (4.1) позволяет сформировать первый элемент  $x_{11}$  первой строки. Второе уравнение формирует остальные элементы первой строки. После формирования  $(i-1)$ -й строки с помощью третьего уравнения формируется первый элемент  $x_{i1}$  очередной  $i$ -ой строки, остальные элементы  $x_{i2}, x_{i3}, \dots$  которой формируется с помощью последнего из уравнений (4.1). Таким образом, последовательно строка за строкой, можно сформировать поле любых размеров, в том числе, и с неограниченным временем наблюдения. При этом для формирования каждой строки используется только одна предшествующая ей строка.

Поле, порождаемое моделью (4.1), однородно, гауссовское и имеет нулевое среднее  $M[x_{ij}] = 0$ , дисперсию  $M[x_{ij}^2] = \sigma_x^2$  и ковариационную функцию (КФ)

$$V_x(m, n) = M[x_{ij} x_{i+m, j+n}] = \sigma_x^2 \rho^{|m|} r^{|n|}. \quad (4.2)$$

Таким образом, нормированная ковариационная функция (НКФ) или корреляционная функция есть  $K_x(m, n) = \rho^{|m|} r^{|n|}$ , что является коэффициентом корреляции между двумя элементами поля, отстоящими друг от друга на расстоянии  $m$  по вертикали и  $n$  - по горизонтали. Такая делимость (факторизуемость или множительность) НКФ является характерным свойством данной модели, что во многих приложениях является вполне допустимым и объясняется независимым влиянием смещений по двум координатам на корреляцию между элементами поля.

В модели (4.1) все параметры постоянны, поэтому порождаемое СП однородно. При необходимости модель может быть обобщена для описания неоднородных полей. Например, если взять  $\rho = \rho_i$ , то коэффициент корреляции по времени может быть в каждый момент свой.

#### *Модель наблюдений*

В наблюдениях  $Z$  поля  $X$  присутствуют некоторые помехи, шумы  $\theta$ . Для определенности должна быть задана модель взаимодействия информативного поля с помехами. Чаще всего применяется аддитивная модель взаимодействия

$$Z = X + \theta = \{x_{ij} + \theta_{ij}\}, \quad (4.3)$$

где  $\theta = \{\theta_{ij}\}$  - поле помех, заданное на той же сетке  $G$ . Кроме модели (4.3) нужно еще описать поле  $\theta$ . В рассматриваемой задаче  $z_{ij}$  представляют собой практически независимые измерения величин  $x_{ij}$ , поэтому можно предположить, что поле помех является белым гауссовским СП с нулевым средним и дисперсией  $\delta_x^2$ . Эта модель наблюдения и принимается в данном отчете. Поле наблюдений  $Z$  однородно, гауссовское, имеет нулевое среднее, КФ  $V_x(m, n) = M[z_{ij} \cdot z_{i+m, j+n}] = \sigma_x^2 \cdot \rho^{|m|} \cdot r^{|n|} + \sigma_x^2 \cdot \delta(m, n)$  и дисперсию  $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_\theta^2$ , где  $\delta(m, n)$  - символ Кронекера ( $\delta(0, 0) = 1$  и  $\delta(v, n) = 0$  в остальных случаях)

#### *Понятие оптимальности оценки*

В статистике оптимальность обычно понимается в смысле минимума потерь. Вводится некоторая функция потерь  $F_i \bar{x}_{ei}^* \bar{z}_i$ , которые мы несем, приняв решение  $y^*$ , когда в действительности имело место  $y$ . Оптимальным считается такое правило принятия решений  $y^* = y^*(U)$ , при котором средние

потери  $M[y^*, y]$  минимальны, где  $U$ -доступные наблюдения. При оценке параметров (как и в нашей задаче оценки поля  $X$ ) обычно принимается квадратичная функция потерь  $g(y^*, y) = (y^* - y)^2$ , т.е. квадрат ошибки  $\epsilon = y^* - y$  оценки  $y^*$  величины  $y$ . Таким образом, оптимальность мы будем понимать в смысле минимума средних квадратов погрешностей оценок  $x_{ij}^*$  элементов  $x_{ij}$ .

$$M[\epsilon_{ij}^2] = M[(x_{ij}^* - x_{ij})^2] = \min. \quad (4.5)$$

Таким образом, задача фильтрации состоит в нахождении оптимальной (в смысле минимума средних квадратов ошибок) оценки последней  $i$ -ой строки  $x_i$  по всем имеющимся к этому моменту наблюдениям комплексных амплитуд пилот-сигналов. При этом информационное поле  $X$  задано моделью (4.1) с известными параметрами  $\rho, r, \sigma_x^2$ , а наблюдения  $Z$ -моделью (4.3) с известной  $\sigma_\theta^2$ .

#### 4.2. Возможные подходы к решению задачи фильтрации

Принципиальных математических затруднений поставленная задача не вызывает - требуется оценить гауссовские параметры по гауссовским же наблюдениям при полном статистическом описании. Возникающие трудности чисто технические, состоящие в реализации необходимых вычислений. Проведем сравнительный анализ некоторых оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов фильтрации.

##### *Винеровская фильтрация*

Пусть  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$  - строка поля  $X$ , которую нужно оценить, представленная в виде вектора-столбца,  $\bar{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_M)^T$  - вектор-столбец всех имеющихся к этому моменту наблюдений (он состоит из некоторых элементов поля  $Z$ , из строк с первой по  $i$ -ю). Нужно построить оптимальную оценку  $\bar{X}^*$  по наблюдениям  $\bar{Z}$ .

В силу гауссовости и центрированности  $\bar{X}$  и  $\bar{Z}$  оптимальная оценка линейна

$$\bar{X}^* = R_{xz} \cdot R_{zz}^{-1} \cdot \bar{Z} = A \cdot \bar{Z}, \quad (4.6)$$

$$\text{где } R_{xz} = M[\bar{X} \cdot \bar{Z}^T] = \{M[x_i \cdot z_j] \mid i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M\} \quad (4.7)$$

и  $R_{zz} = M \left[ \bar{Z} \cdot \bar{Z}^T \right] = \{M [z_i \cdot z_j; i, j = 1, \dots, M]\}$  - соответственно, матрица кросс-ковариаций  $\bar{X}$  и  $\bar{Z}$  и матрица автокорреляций  $Z$ . Элементы этих матриц легко рассчитываются, учитывая (4.2) и (4.4). При этом, очевидно, что  $M [x_{ij} z_{mn}] = M [x_{ij} (x_{mn} + \theta_{mn})] = M [x_{ij} x_{mn}]$ , т.к. шумы  $\{\theta_{mn}\}$  и информативные  $\{x_{ij}\}$  между собой независимы.

Таким образом, оценка  $\bar{X}^*$  получается умножением вектора наблюдений  $\bar{Z}$  на весовую матрицу  $A = R_{xz} \cdot R_{zz}^{-1}$ , имеющую размеры  $N \times M$ , поэтому взвешивание в (4.6) потребует  $NM$  умножений и  $N(M - 1)$  сложений. Кроме того, необходимо обращение матрицы  $R_{zz}$  размеров  $M \times M$ , на что требуется около  $M^3$  сложений, умножений и делений. Умножение матрицы  $R_{xz}$  размеров  $N \times M$  на  $R_{zz}^{-1}$  потребует еще  $NM^2$  умножений и  $NM(M - 1)$  сложений. Итого около  $M^3 + 2(NM^2 + NM)$  арифметических операций. Если в каждой строке имеется  $m$  наблюдаемых точек, то в  $i$  строке их будет  $m \cdot i = M$ , т.е. потребуются  $(m \cdot i)^3 + N(m \cdot i)^2 + N \cdot m \cdot i$  операций на оценку  $i$ -ой строки. В пересчете на один элемент этой строки -  $(m \cdot i)^3 / N + (m \cdot i)^2 + m \cdot i$  операций, что совершенно неприемлемо для систем с непрерывной обработкой информации, т.к.  $i$  с каждым шагом возрастает. Кроме того, все наблюдения необходимо хранить в памяти. Объем вычислений можно сократить, если отказаться от оптимальности оценки. Например, можно при оценке последней  $i$ -ой строки учитывать не все имеющиеся наблюдения, а только некоторые из них. Например, учитывать только последние  $k$  строк. Тогда вместо постоянно возрастающего  $i$  в приведенных оценках вычисленной сложности будет постоянное  $k$ . Но и при небольших значениях  $k$  объем вычислений очень велик. Например, при  $N = 1024$ ,  $m = 100$ ,  $k = 10$  получаем около 2000000 сложений и умножений на один оцениваемый элемент. Можно также при оценке каждого элемента учитывать только  $M$  ближайших к нему имеющихся наблюдений, тогда, например, при  $M = 10$  на один оцениваемый элемент потребуются около  $10^3 + 2(10^2 + 10) = 2220$  операций, т.е. около 1100 сложений и столько же умножений, а на оценку всей строки - в тысячу раз больше. Кроме того, необходимо запоминание нескольких строк и процедура выбора ближайших наблюдений.



В приведенных выкладках не учитывалось вычисление самих матриц  $R_{xz}$  и  $R_{zz}$ . Составляющие их ковариации (4.2) и (4.3) зависят от взаимного расположения элементов и вычисляются через умножения и возведения в степень. Без этих вычислений можно обойтись, протабулировав эти ковариации в зависимости от взаимного расположения  $(m, n)$  элементов. Следует также учесть, что точность оценок при учете только части информации может существенно снижаться. Кроме того,  $\rho$  и  $r$  близки к единице, поэтому при обращении матрицы  $R_{zz}$  возможны большие ошибки. Таким образом, винеровская фильтрация нереализуема в оптимальном варианте, а в квазиоптимальном варианте технически очень сложна.

### *Калмановская построчная фильтрация*

Модель (4.1) может быть представлена в эквивалентной, векторной форме:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= V \cdot \bar{\xi}_1, \\ \bar{x}_i &= P \cdot \bar{x}_{i-1} + \Theta \cdot \bar{\xi}_i, \quad i = 2, 3, \dots,\end{aligned}\tag{4.8}$$

где  $\bar{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN})^T$  -  $i$ -я строка поля, представленная в виде вектора;  $\Theta_1, V, P$  - матрицы размеров  $N \times N$ ;  $\bar{\xi} = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{iN})^T$ . Таким образом, в модели (4.8) поле формируется построчно. По-прежнему, для получения  $i$ -й строки требуется только предыдущая строка.

Модель наблюдений (4.3) можно также представить в векторной, построчной форме  $\bar{z}_i = \bar{x}_i + \bar{\theta}_i$ . Более того, в векторной форме можно сразу учесть только те наблюдения, которые в действительности имеются:

$$\bar{z}_i = F_i \bar{x}_i + G_i \bar{\theta}_i,\tag{4.9}$$

где  $F_i$  и  $G_i$  - диагональные матрицы размеров  $N \times N$ . При этом в соответствии с моделью (4.3), матрица  $G_i = E$  - единичная матрица, а в матрице  $F_i$  ее диагональный элемент  $f_{kk} = 1$ , если элемент  $z_{ik}$   $i$ -й строки наблюдаем и  $f_{kk} = 0$  в противном случае. Таким образом, в векторе  $\bar{z}_i$  ненаблюдаемые элементы состоят только из шумов, поэтому они в фильтре будут проигнорированы, как не несущие полезной информации. Можно также из матриц  $F_i$  и  $G_i$  в (4.9) исключить все строки, соответствующие ненаблюдаемым элементам. Тогда эти матрицы будут иметь размеры  $m_i \times N$ , а вектор  $\bar{z}_i$  будет состоять только из  $m_i$  наблюдаемых элементов  $i$ -й строки.

При этом количество  $m_i$  наблюдаемых элементов и их расположение может от строки к строке меняться, что не является препятствием к построению фильтра.

Строго оптимальное решение задачи оценки  $\bar{x}_i$  по наблюдениям  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_i$  дает фильтр Калмана:

$$\bar{x}_i^* = \bar{x}_{ei}^* + P_i F_i^T V_{\theta i}^{-1} \cdot (\bar{Z}_i - F_i \bar{x}_{ei}^*), \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_{ei}^* &= P \bar{x}_{i-1}^*, \\ P_i &= Q_i (E + F_i^T V_{\theta i}^{-1} F_i Q_i)^{-1}, \\ Q_i &= P P_{i-1} P^T + V_{xi}, \\ x_{e1}^* &= 0, \quad Q_1 = V_{x1}, \quad V_{x1} = \vartheta_1 \vartheta_1^T, \\ V_{xi} &= \vartheta_i \vartheta_i^T, \quad i = 2, 3, \dots, \quad V_{\theta i} = G_i G_i^T. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В этом фильтре сначала строится экстраполированная оценка  $\bar{x}_{ei}^* = P_i \bar{x}_{i-1}^*$   $i$ -й строки  $\bar{x}_i$  в соответствии с моделью (4.8). Естественно  $\bar{x}_{e1}^* = M[\bar{x}_1] = 0$ , т.к. никаких наблюдений ранее первой строки нет. Далее эта оценка уточняется, учитывая невязку  $\bar{z}_i - F_i \bar{x}_{ei}^*$  между фактическими наблюдениями  $\bar{z}_i$  и его предсказанием  $F_i \bar{x}_{ei}^*$ . Таким образом, при построении оценки очередной строки требуется только наблюдение этой строки и уже полученная оценка предыдущей строки.

При этом одновременно можно учитывать качество фильтрации, т.к. вычисляемая матрица  $P_i$  есть матрица ковариаций ошибок:  $P_i = M[(\bar{x}_i^* - \bar{x}_i)(\bar{x}_i^* - \bar{x}_i)^T]$ , в частности, ее диагональные элементы есть дисперсии ошибок элементов строки. Матрица  $Q_i$  есть матрица ковариаций ошибок прогноза. Все эти матрицы могут быть рассчитаны заранее, если заранее известно расположение наблюдаемых точек поля.

Проанализируем вычислительную сложность алгоритма. Матрицы  $V_{xi}$  и  $P$  постоянны и находятся заранее. Матрица  $V_{\theta i} = \sigma_{\theta}^2 \cdot E$ , соответственно  $V_{\theta i}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{\theta}^2} \cdot E$ , поэтому все сводится просто к умножению на  $1/\sigma_{\theta}^2$ . В каждой строке матрицы  $F_i$  только один ненулевой элемент – единица, а в некоторых ее столбцах только нули. Поэтому  $F_i^T F_i$  – единичная матрица с заменой некоторых единиц на нули. В результате  $E + F_i^T V_{\theta i}^{-1} F_i Q_i$  получается прибавлением к единичной матрице прореженной матрицы  $Q_i$ , умноженной

на  $1/\sigma_\theta^2$ , т.е. всего не более  $N^2$  умножений и  $N$  сложений. Обращение этой матрицы потребует около  $N^3/3$  умножений и столько же сложений. Умножение на  $Q_i$  требует  $N^3$  умножений и столько же сложений. Таким образом, вычисление  $P_i$  и (4.11) требует  $4\frac{N^3}{3}$  умножений и  $N^3 + N \sim N^3$  сложений. Вычисление  $Q_i$  -  $2 \cdot N^3$  умножений и  $2N^3 + N \sim 2N^3$  сложений. Вычисление  $\bar{x}_{\theta i}^*$  -  $N^2$  умножений и сложений. Вычисление  $\bar{z}_i - F_i \bar{x}_{\theta i}^*$  - требует всего  $m$  вычитаний (сложений). Вычисление  $P_i F_i V_{\theta i}^{-1}$  по существу требует только  $Nm$  умножений, поэтому всего в (4.10) требуется  $Nm + Nm^2 = N(m^2 + m)$  умножений и  $N + m$  сложений. Таким образом, всего требуется на оценку строки порядка  $\frac{10}{3}N^3$  умножений и  $3N^3$  сложений, т.е. на один канал  $\frac{10}{3}N^2$  умножений и  $3N^3$  сложений

Объем вычислений весьма велик, но значительно меньше, чем при винеровской фильтрации в оптимальном варианте.

#### *Аппроксимированная калмановская фильтрация*

Значительно меньших объемов вычислений требует аппроксимированный фильтр Калмана [9]. Он основан на представлении модели в виде

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \sigma_x \vartheta \bar{\xi}_1, \\ \bar{x}_i &= \rho \bar{x}_{i-1} + \sigma_x \sqrt{1 - \rho^2} \vartheta \bar{\xi}_i = \rho \bar{x}_{i-1} + \bar{y}_i,\end{aligned}\quad (4.12)$$

где  $\rho$  - коэффициент корреляции на единичном расстоянии по вертикали, а  $\bar{y}_i$  соответствует модели

$$\begin{aligned}y_{i1} &= \sigma_y \xi_{ij}, \\ y_{ij} &= r y_{i,j-1} + \sqrt{1 - r^2} \sigma_y \xi_{ij},\end{aligned}\quad (4.13)$$

где  $\sigma_y = \sigma_x \sqrt{1 - \rho^2}$  и  $r$  - коэффициент корреляции на единичном расстоянии по вертикали. Таким образом, поле  $X$  формируется как комбинация двух одномерных авторегрессий (4.12) и (4.13).

Если из строки  $\bar{x}_i$  вычесть предыдущую строку  $\bar{x}_{i-1}$ , уменьшенную на  $\rho$ , то из (4.12) следует, что в результате получится строка, независимая от всех

предыдущих строк и имеющая экспоненциальную НКФ  $r^{|n|}$  между своими элементами.

Для этой модели также можно построить фильтр Калмана, практически ничем не отличающийся от рассмотренного выше и с тем же объемом вычислений. Существенной экономии вычислений при небольшой потере эффективности фильтрации позволяет получить аппроксимированный фильтр Калмана. Суть которого состоит в следующем.

Первая строка поля  $z_1$  есть зашумленная строка  $x_1$ , которая представляет одномерный случайный процесс, заданный авторегрессией в виде первых двух уравнений (4.1). Эта строка может быть оптимально оценена одномерным, т.е. скалярным фильтром Калмана «прямым ходом» от начала к концу с последующим сглаживанием «обратным ходом» от конца к началу.

Прямой ход, т.е. фильтрация, задается скалярными аналогами уравнений (4.10) и (4.11):

$$\begin{aligned} x_{\vartheta 11} &= 0, x_{\vartheta 1j}^* = rx_{1,j-1}^*, \\ x_{1j}^* &= x_{\vartheta 1j}^* + P_j F_j \frac{1}{\sigma_{\theta}^2} (z_{1j} - F_j x_{\vartheta 1j}^*), \\ Q_1 &= \sigma_x^2, \\ P_j &= Q_j / \left( 1 + F_j^2 \frac{1}{\sigma_{\theta}^2} Q_j \right), \\ Q_j &= r^2 P_{j-1} + (1 - r^2) \sigma_x^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Сглаживание выполняется в обратном направлении:

$$\begin{aligned} x_{1N}^{**} &= x_{1N}^*, \\ x_{1j}^{**} &= x_{1j}^* + P_j \frac{1}{\sigma_{\theta}^2} (x_{1,j+1}^{**} - F_j \rho x_{1j}^*). \end{aligned} \quad (4.15)$$

В результате получаем оптимальную оценку  $\bar{x}_1^{**}$  первой строки  $\bar{x}_1$  по всем имеющимся наблюдениям строки  $\bar{z}_1$ . Если бы эта оценка была абсолютно точной, то при вычитании  $\rho \bar{x}_1^{**}$  из строки наблюдений  $\bar{z}_2$  мы бы получили, как это следует из (4.12) и (4.13),  $\bar{z}_2' = \bar{y}_2 + \bar{\theta}_2$ , т.е. зашумленную строку  $\bar{y}_1$ . При этом  $\bar{y}_1$  имеет дисперсию  $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 (1 - \rho^2)$  и коэффициент корреляции  $r$ . Следовательно,  $\bar{y}_2$  может быть оценена с помощью фильтра (4.14) и сглаживания (4.15), в которых нужно заменить  $\sigma_x^2$  на  $\sigma_y^2$ ,  $z_{1j}$  на  $z_{2j}'$  и  $x_{1j}$  на  $y_{2j}$ . В результате получим оптимальную оценку  $\bar{y}_2^{**}$  строки  $\bar{y}_2$ .

Очевидно, что оптимальной оценкой  $\bar{x}_2$  будет  $\bar{x}_2^{**} = \bar{y}_2^{**} + \rho \bar{x}_1^{**}$ , т.е. нужно обратно вычисленное ранее  $\rho \bar{x}_1^{**}$ .

Далее оцениваем третью строку точно также, как и вторую, формируя сначала  $\bar{z}'_3 = \bar{z}_3 - \rho \bar{x}_2^{**}$ . Таким образом, последовательно будут оптимально оценены все строки. Однако все это справедливо при сделанном предположении, что оценки  $\bar{x}_i^{**}$  абсолютно точные. В действительности же эти оценки содержат ошибки, и  $\bar{z}'_i = \bar{z}_i - \rho \bar{x}_{i-1}^{**} = \bar{y}'_i + \bar{\theta}_i$ , где  $\bar{y}'_i \approx \bar{y}_i$ , с точностью до ошибок фильтрации  $\bar{x}_{i-1}^{**}$ , умноженных на  $\rho$ . Поэтому описанный фильтр в целом оказывается квазиоптимальным, приближенным, поэтому и назван аппроксимированным. Его можно несколько улучшить, если в (4.14) и (4.15) взять несколько измененное значение коэффициента  $r$ , которое более точно описывает корреляционные связи строки  $\bar{y}'_i$  [9]. В результате проигрыш оптимальному фильтру по дисперсии ошибки не превышает 5% при  $r \geq 0.1$ ,  $\rho \geq 0.1$  и отношении шум/сигнал  $q^2 = \sigma_\theta^2 / \sigma_x^2 < 400$ .

Таким образом, в аппроксимированном фильтре Калмана двумерная фильтрация осуществляется как комбинация двух одномерных фильтров со сглаживанием.

Оценим вычислительную сложность этого фильтра на один элемент оцениваемой строки  $\bar{x}_i$ . Одно умножение и одно сложение требуется на вычисление  $z'_{ij} = z_{ij} - \rho \cdot x_{ij}^{**}$ . Учитывая, что в (4.14) и (4.15)  $F_i$  равны нулю или единице, а также то, что во второй формуле (4.15) используются уже использованные во второй формуле (4.14) величины, получаем еще 8 сложений. Таким образом, требуется всего 9 умножений и 8 сложений на один элемент строки независимо от ее общей длины. Фактически даже меньше, т.к. в тех точках, в которых наблюдений нет, производится только часть вычислений (в таких точках  $F_i = 0, P_j = Q_j, x_{ij}^* = x^* : i, j \in x^*$ ). В ненаблюдаемых точках нельзя сформировать  $z'_{ij} = z_{ij} - \rho \cdot x_{ij}^*$ , но этого и не требуется, т.к. во втором уравнении (4.14) в таких точках  $F_j = 0$  и вычислять выражение, находящееся в скобках, не требуется.

Если наблюдаемы все точки поля, то в описанном аппроксимированном фильтре можно еще снизить вычислительные затраты, перейдя к его установившемуся режиму. Если все точки наблюдаемы, то в (4.14) и (4.15)

все  $F_j = 1$ , поэтому  $P_j$  и  $Q_j$  быстро сходятся к своим предельным значениям при увеличении  $j$ , т.е. фильтр сходится к установившемуся режиму. Эти предельные значения  $P$  и  $Q$  легко находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} P = \frac{Q}{1 + Q/\sigma_x^2} \\ Q = r^2 \cdot P + (1 - r^2)\sigma_x^2 \end{cases}, \quad (4.16)$$

решая которую, получаем

$$Q = \frac{\sigma_x^2}{2} \cdot A, \quad P = \sigma_\theta^2 \frac{A}{2q^2 + A}, \quad (4.17)$$

$$A = \sqrt{(1 - q^2)^2 \cdot (1 - r^2)^2 + 4q^2 \cdot (1 - r^2) - (1 - q^2) \cdot (1 - r)^2}; \quad q^2 = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_x^2}.$$

Полученное предельное значение  $P$  можно использовать в (4.14) и (4.15) вместо переменных  $P_j$ , тогда  $P_j F_j / \sigma_\theta^2 = A / (2q^2 + A)$ , процедура вычисления  $P_j$  и  $Q_j$  отпадает и на одну точку потребуется 5 умножений и 6 сложений. Таким образом, описанный аппроксимированный фильтр Калмана является уже приемлемым для практической реализации в реальном времени, но при современном развитии вычислительных средств требует, видимо, мультипроцессорных систем или спецпроцессора.

### *Раздельная фильтрация*

Дальнейшего упрощения процедуры фильтрации можно достичь, используя разделимость и экспоненциальность КФ информационного поля, которые позволяют получить достаточно качественную фильтрацию, комбинируя одномерные фильтры по вертикали и горизонтали [10]. При этом нерегулярность сетки наблюдений не является препятствием для реализации одномерных фильтров. По своей структуре данный фильтр близок к описанному выше аппроксимированному фильтру Калмана и состоит в следующем.

Каждая строка поля представляет собой зашумленный отрезок одномерного случайного процесса с коэффициентом корреляции  $r$  на единичном расстоянии. Поэтому каждая строка  $\bar{x}_i$  может быть оценена независимо от остальных строк, как это сделано в (4.14), (4.15) для первой строки. В результате могут быть получены оценки  $\bar{x}_{hi}^*$ , каждая из которых

построена по наблюдениям  $\bar{z}_i$ . Значок "h" в  $\bar{x}_i^*$  означает, что эта оценка получена по горизонтальному направлению.

С другой стороны, каждый  $j$ -ый столбец  $\bar{z}_j = (z_{1j}, z_{2j}, \dots)^T$  поля является зашумленным случайным процессом с коэффициентом корреляции  $\rho$  на единичном расстоянии. Поэтому столбец  $\bar{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots)^T$  может быть оценен с помощью оптимального фильтра Калмана вида (4.14), в котором вместо  $r$  берется  $\rho$  и фильтрация в каждом столбце выполняется отдельно. Сглаживание здесь не производится, т.к. задержка и возврат по времени не разрешается. В результате к моменту  $i$  будут оценки  $x_{vij}^*$  для всех значений  $i$ -ой строки. Значок "v" означает оценку по вертикали.

Таким образом, для каждого элемента  $x_{ij}$   $i$ -й строки получены две оценки  $x_{hij}^*$  и  $x_{vij}^*$ . Окончательная оценка получается взвешиванием:  $x_{ij}^* = \alpha x_{hij}^* + (1 - \alpha) x_{vij}^*$ . Весовые коэффициенты подбираются, исходя из точности оценок по времени и частоте. Более точной оценке дается больший вес. При прочих равных условиях оценка по частоте точнее, т.к. в ней учитываются наблюдения с двух сторон. Однако если поле сильнее коррелировано по времени, то соответствующая оценка может оказаться точнее. Контроль точности можно вести, анализируя соответствующие значения  $P_i$ , которые и есть дисперсии ошибок фильтрации.

Для реализации рассмотренного фильтра требуется 17 умножений и 10 сложений на один элемент.

### *Исследовательская программа*

Последний алгоритм реализован в исследовательской программе `dlgesimate`, в которой с помощью модели (4.1) формируется тестовое информативное поле с 1024 элементами в строке и зашумляется согласно модели (4.3). Для этого задаются значения параметров  $\rho, r$  и  $q^2 = \sigma_\theta^2 / \sigma_x^2$ . Для удобства анализа результатов выбрано  $\sigma_x^2 = 1$ .

В каждой строке, содержащей 1024 отсчета (по числу каналов связи), по некоторому правилу или случайным образом задается число и расположение пилот-сигналов. Возможно задание регулярной сетки наблюдаемых пилот-сигналов в двух вариантах. В первом варианте – во всех строках пилот-сигналы находятся на одних и тех же местах через равные расстояния, а во

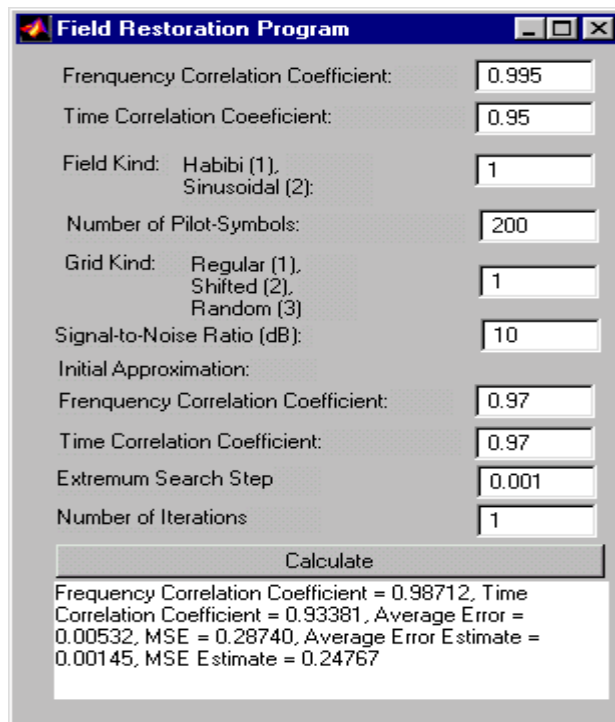
втором варианте – в строках с четными номерами сдвинуты на половину этого расстояния. После формирования очередной строки поля производится оценка ее информативной составляющей по формулам (4.22)-(4.24). Пример интерфейса исследовательской программы приведен на рис 4.3.

Наличие тестового поля во всех отчетах позволяет произвести с помощью программы исследования точности оценки путем текущего вычисления среднего квадрата ошибок  $\varepsilon_{ij} = x_{ij}^* - x_{ij}$ .

Рис. 4.3. Пример интерфейса исследовательской программы

### 4.3. Заключение

1. Проведенный анализ возможных подходов фильтрации полей комплексных амплитуд несущих при нерегулярном расположении пилот-



сигналов показывает, что эта нерегулярность не является принципиальной для построения оптимальных процедур фильтрации.

2. Строго оптимальные процедуры фильтрации при числе каналов 1024 не реализуемы в системах реального времени: винеровская фильтрация требует практически бесконечно больших вычислительных затрат и неограниченной памяти, а калмановская построчная фильтрация – очень больших затрат, возрастающих с увеличением числа каналов.



3. Показано, что при допустимой потере в точности оценивания комплексных амплитуд возможно построение квазиоптимальных фильтров, требующих на оценку одного частотного канала только нескольких сложений и умножений и реализуемых в системах реального времени на современной вычислительной базе.

4. Для построения реализуемых процедур фильтрации необходимо задание всех параметров модели информативного поля и отношения сигнал/шум.

## 5. АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ITU CHANNEL MODEL

Все процедуры фильтрации комплексных амплитуд несущих, рассмотренные в разделе 4 настоящего отчета, требуют задания параметров модели поля частота-время, например коэффициентов корреляции между каналами по частоте  $r$  и времени  $\rho$  и отношения сигнал/шум  $q = \sigma_\theta / \sigma_x$ , где  $\sigma_x^2$  - дисперсия сигнала;  $\sigma_\theta^2$  - дисперсия шума.

В реальной ситуации значения этих параметров неизвестны и, кроме того, изменяются с течением времени, поэтому требуется дополнительная процедура оценки этих параметров. Рассмотрим возможные подходы к решению этой задачи.

Для оценивания параметров часто применяется метод моментов, состоящий в том, что оценки измеряемых параметров выбираются так, чтобы теоретические значения нескольких моментов оказались равными их выборочным значениям. Применительно к решаемой задаче это можно сделать следующим образом. Для четырех оцениваемых параметров возьмем четыре уравнения.

$$\begin{aligned} V_z^*(0,0) &= V_z(0,0) = \sigma_x^2 + \sigma_\theta^2, \\ V_z^*(m,0) &= V_z(m,0) = \sigma_x^2 \rho^m, \\ V_z^*(0,n) &= V_z(0,n) = \sigma_x^2 r^n, \\ V_z^*(m,n) &= V_z(m,n) = \sigma_x^2 \rho^m r^n, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $V_z^*(m,0)$  - выборочное значение КФ  $V_z^*(m,0)$ :

$$V_z^*(m,0) = \frac{1}{k_{a,b}} \sum z_{i,j} z_{i+a,j+b}; \quad (5.2)$$

суммирование ведется по тем значениям индексов  $(i,j)$ , для которых имеются оба наблюдения  $z_{i,j}$  и  $z_{i+a,j+b}$ ;  $k_{a,b}$  - количество таких пар. Тогда из (5.1) получаем оценки

$$\begin{aligned} \rho^* &= \sqrt[m]{V_z^*(m,n)/V_z^*(0,n)}, \quad r^* = \sqrt[n]{V_z^*(m,n)/V_z^*(m,0)}, \\ \sigma_x^{*2} &= V_z^*(m,0)/\rho^{*m}, \quad \sigma_\theta^{*2} = V_z^*(0,0) - \sigma_x^{*2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Коэффициенты  $\rho$  и  $r$  в решаемой задаче близки к единице, поэтому нужна высокая точность их оценки, т.е. необходимо большое количество усредняемых значений в (5.2). Однако при небольшом количестве наблюдаемых тест-сигналов нужные пара будут встречаться редко, поэтому требуется большое время наблюдений поля для достаточно точной оценки. Для улучшения оценок можно в (5.1) взять большее число уравнений и,

применив метод наименьших квадратов, выбирать в качестве оценок те значения параметров,  $\rho$ ,  $r$ ,  $\sigma_x^2$  и  $\sigma_\theta^2$ , при которых минимальна суммарная квадратичная невязка

$$J(\rho, r, \sigma_x^2, \sigma_\theta^2) = \sum_{(n,m)} [V_z^*(m,n) - V_z(m,n)]^2. \quad (5.4)$$

Минимизация (5.4) в аналитическом виде не получается, поэтому приходится применять численные методы.

Недостатком описанного подхода является необходимость длительного накопления сумм в (5.2) и сложность минимизации (5.4). Кроме того, при изменяющихся оцениваемых параметрах время накопления нельзя брать большим, т.к. может произойти недопустимое усреднение оценок.

### *Псевдоградиентная оценка параметров*

Для минимизации различных функций и функционалов  $J(\bar{\alpha})$ , зависящих от вектора параметров  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  часто применяется градиентный рекуррентный алгоритм

$$\bar{\alpha}_{n+1} = \bar{\alpha}_n - \mu_n \nabla J(\bar{\alpha}_n), \quad (5.5)$$

где  $\bar{\alpha}_{n+1}$  - очередное за  $\bar{\alpha}_n$  приближение к точке минимума  $\bar{\alpha}^*$ ;

$\nabla J(\bar{\alpha}) = \left( \frac{\partial J(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_k} \right)$  - градиент функционала  $J(\bar{\alpha})$ ;

$\mu_n$  - положительная числовая последовательность, влияющая на длину шагов процедуры (5.5);  $\bar{\alpha}_0$  - начальное приближение.

При выполнении некоторых условий (среди которых – единственность экстремальной точки  $\bar{\alpha}^*$ ) последовательность  $\bar{\alpha}_n^*$  сходится к точке минимума  $\bar{\alpha}^*$ .

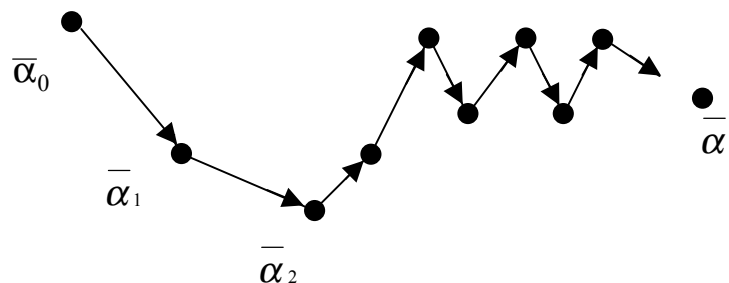


Рис. 5.1. Схема градиентного метода минимизации.

Каждый шаг при этом делается в сторону скорейшего убывания  $J(\bar{\alpha})$  (рис. 5.1). При этом последовательность  $\mu_n$  должна удовлетворять условиям

$\sum \mu_n = \infty$  и  $\sum \mu_n^2 < \infty$ , т.е. длина шагов должна стремиться к нулю, но не слишком быстро.

Таким способом можно, например, осуществить минимизацию функционала (5.4), где  $(\rho, r, \sigma_x^2, \sigma_\theta^2) = \bar{\alpha}$ . Однако реализация этого метода чрезвычайно сложна в вычислительном плане, т.к. на каждом шаге нужно пересчитывать  $\nabla J(\bar{\alpha}_n)$ . Значительно меньшего объема вычислений требуют псевдоградиентные (ПГ) алгоритмы [5] вида

$$\bar{\alpha}_{n+1} = \bar{\alpha}_n - \mu_n \bar{\beta}_n, \quad (5.6)$$

где  $\bar{\beta}_n$  некоторое случайное направление, удовлетворяющее условию псевдоградиентности

$$\nabla J(\bar{\alpha}_n) \cdot M[\bar{\beta}_n] > 0, \quad (5.7)$$

где « $\cdot$ » – знак скалярного произведения векторов, т.е.  $\bar{\beta}_n$  в среднем составляет острый угол  $\varphi$  с истинным градиентом  $\nabla J(\bar{\alpha}_n)$ . На рис. 5.2 показаны возможные значения  $\bar{\beta}_n$ , его среднее значение  $M[\bar{\beta}_n]$  и истинный градиент  $\nabla J(\bar{\alpha}_n)$ .

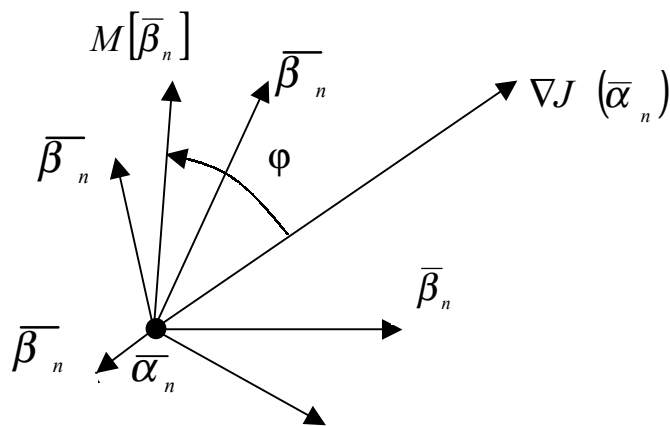


Рис. 5.2 Градиент и псевдоградиент

В силу псевдоградиентности  $\bar{\beta}_n$  шаги процедуры (5.6) в среднем выполняются в сторону уменьшения функционала. Последовательность приближений  $\bar{\alpha}_n$  становится случайной, но при выполнении не очень обременительных условий [5] с вероятностью 1 сходится к точке минимума  $\bar{\alpha}^*$ .

Для реализации рассмотренного алгоритма необходим некоторый наблюдаемый псевдоградиент функционала. Алгоритмы такого типа были с успехом применены для решения многих задач обработки изображений [4,7,8,11-14]. При этом они оказались пригодными для реализации в реальном времени и показали высокую эффективность.

Построим ПГ алгоритм для исследуемой задачи оценки параметров ИТУ-модели канала связи. При этом вначале рассмотрим оценку коэффициента корреляции по вертикали. Точное значение этого коэффициента минимизирует дисперсию ошибки прогноза

$$z_{ij}^* = x_{ij}^* = \frac{\rho^{m_j}}{1+q^2} z_{i-m_j,j} \quad (5.8)$$

элемента в наблюдаемой точке  $(i, j)$  по ближайшему к нему предшествующему наблюдаемому значению  $z_{i-m_j,j}$  в соответствующем столбце. Предположим сначала, что параметр  $q^2$  известен, тогда точное значение  $\rho$  соответствует минимуму функционала

$$J(\rho) = M[\varepsilon_{ij}^2] = M\left[\left(\frac{\rho^{m_j}}{1+q^2} z_{i-m_j,j} - z_{ij}\right)^2\right]. \quad (5.9)$$

С градиентом (т.е. производной), по  $\rho$

$$\nabla J(\rho) = \frac{2m\rho^{m-1}}{1+q^2} M[\varepsilon_{ij} z_{i-m_j,j}]. \quad (5.10)$$

В случаях, когда градиент функционала выражается через математическое ожидание некоторой случайной величины, в качестве псевдоградиента можно взять реализации (наблюдения) этой величины, т.е. например

$$\bar{\beta}_{ij} = \varepsilon_{ij} z_{i-m_j,j} = \beta_{ij},$$

а также использовать знаковую функцию

$$\beta_{ij} = \varepsilon_{ij} \text{sign}(z_{i-m_j,j}). \quad (5.11)$$

Коэффициент перед знаком математического ожидания в (5.10) не вошёл в (5.11), т.к. этот коэффициент положителен и может быть учтён в значениях  $\mu_n$ .

Таким образом, получаем ПГ процедуру оценки  $\rho$ :

$$\rho_{j+1} = \rho_j - \mu_j \left( \frac{\rho_j^{m_j}}{1+q^2} z_{i-m_j,j} - z_{ij} \right) \text{sign}(z_{i-m_j,j}). \quad (5.12)$$

После просмотра  $i$ -ой строки процедура (5.12) переходит к просмотру следующей строки без сброса приближений  $\rho$ . Для реализации этой процедуры нужно запоминать для каждого элемента строки последний наблюдаемый в этом столбце элемент и накапливать расстояние до него. Вычисления (5.12) выполняются только в наблюдаемых точках просматриваемой строки. На одну такую точку приходится одно возведение

в степень, 3 умножения и два сложения, что значительно меньше, чем это требуется для реализации метода моментов.

Перейдем теперь к оценке коэффициента корреляции по горизонтали  $r$  и отношения шум/сигнал  $q^2$ . Для этого воспользуемся оптимизацией прогноза наблюдаемых значений по горизонтали:

$$z_{ij}^* = x_{ij}^* = r^{k_1} \frac{1 + q^2 - r^{2k_2}}{(1 + q^2)^2 - r^{2(k_1+k_2)}} z_{i,j-k_1} + r^{k_2} \frac{1 + q^2 - r^{2k_1}}{(1 + q^2)^2 - r^{2(k_1+k_2)}} z_{i,j+k_2}, \quad (5.13)$$

где  $z_{i,j-k_1}$  и  $z_{i,j+k_2}$  - ближайšie наблюдаемые значения слева и справа от наблюдаемого  $z_{ij}$ . Точные значения  $r$  и  $q^2$  минимизируют дисперсию ошибки прогноза (5.13), т.е. минимизируют функционал

$$J(r, q^2) = M[\epsilon_{ij}^2] = M\left[(z_{ij}^* - z_{ij})^2\right]. \quad (5.14)$$

Псевдоградиент  $\bar{\beta}_{ij}$  для этого функционала может быть найден аналогично (5.9)-(5.11):

$$\bar{\beta}_{ij} = \frac{1}{2} \nabla(\epsilon_{ij}^2) = \epsilon_{ij} \nabla z_{ij}^* = \epsilon_{ij} \left( \frac{\partial z_{ij}^*}{\partial r}, \frac{\partial z_{ij}^*}{\partial q^2} \right).$$

Тогда процедура оценки принимает вид

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - \mu_n \epsilon_n \frac{\partial z_n^*(r_n, q_n^2)}{\partial r}, \\ q_{n+1}^2 &= q_n^2 - \mu_n \epsilon_n \frac{\partial z_n^*(r_n, q_n^2)}{\partial q^2}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где  $n$  - нумерация наблюдаемых пилот-сигналов  $z_{ij}$  в  $i$ -ой строке. Производные прогнозов (5.13) имеют сложный вид, поэтому их можно заменить в (5.15) конечными разностями. Процедуры (5.12) и (5.15) выполняются параллельно в процессе просмотра строки слева направо, при этом текущая оценка передается из (5.15) в (5.12).

### *Исследовательская программа*

Описанный ПГ алгоритм реализован в исследовательской программе `dlgesimate` (см., раздел 4.2 настоящего отчета), в которой сначала формируется тестовое поле комплексных амплитуд несущих с заданными параметрами. Затем производится оценка этих параметров. Полученные оценки и точные значения параметров выдаются на экран компьютера. Проведенные испытания показали, что при заданном диапазоне параметров ITU-модели приемлемые оценки параметров (вхождение в режим

стационарного оценивания) получаются после обработки примерно 200 строк.

### *Замечание*

Все приведенные в этом разделе выкладки сделаны для поля время-частота одной из квадратур комплексных амплитуд несущих. В реальной ситуации используются две квадратуры, что может быть использовано для улучшения оценок коэффициентов корреляции по времени и частоте. При этом возможны два подхода к улучшению оценок. В первом из них на каждом шаге оценивания коэффициентов корреляции можно производить взвешенное суммирование оценок, полученных для полей каждой из квадратур. Затем, для следующей итерации оценивания, использовать уже уточненную оценку коэффициентов корреляции. Во втором варианте на каждой итерации оценивания оценка коэффициентов корреляции может формироваться с использованием отсчетов полей обеих квадратур. Для этого в (5.14) расширяется локальная выборка функционала: вместо квадрата погрешности, сформированного по полю одной квадратуры, нужно использовать взвешенную сумму квадратов погрешностей по полям обеих квадратур.

### Выводы

1. Нерекуррентное оценивание параметров ITU-модели канала связи сопряжено с большими вычислительными затратами и требует большого времени наблюдения пилот-сигналов.

2. Псевдоградиентные алгоритмы оценивания параметров ITU- модели канала связи вполне пригодны для реализации в реальном времени и обладают достаточной точностью. При этом в случае оценки параметров однородных полей комплексных амплитуд несущих оценки сходятся с приемлемой точностью к истинным значениям примерно за несколько тысяч наблюдений пилот-сигналов.

3. Оценки коэффициентов корреляции по времени и частоте могут быть улучшены при совокупном использовании полей время-частота обеих квадратур комплексных амплитуд несущих.

## 6. ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО АДАПТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИЗМЕНЯЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ ITU CHANNEL MODEL

### 6.1. Подходы к адаптации

В реальных ситуациях конкретные параметры ITU channel model неизвестны, и кроме того изменяются по пространству и времени, поэтому необходимы адаптивные алгоритмы обработки. Рассмотренное в разделе 5 измерение параметров поля время-частота в совокупности с одной из приведенных в разделе 4 процедур фильтрации уже является адаптивным алгоритмом фильтрации.

Такой подход к адаптации является идентификационным, т.е. сначала идентифицируется конкретная модель изображения (измеряются ее параметры), после чего полученные значения поступают в процедуру собственно обработки как точные значения. Этот подход к адаптации, хотя и часто применяется, имеет ряд недостатков.

Во-первых, двухэтапность обработки – сначала измерение параметров и только потом собственно обработка.

Во-вторых, на этапе измерения стараются получить как можно более точные значения параметров поля, что не всегда оправдано.

Может оказаться, что более качественная обработка достигается при худших оценках параметров, но при более удачном их сочетании. Продемонстрируем это следующим примером. Рассмотрим задачу оптимизации прогноза гауссовской величины  $x$  по гауссовским ее наблюдениям  $z_1$  и  $z_2$ . Оптимальный прогноз линеен:  $x^* = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ . Требуется определить оптимальные значения весовых коэффициентов  $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \bar{\alpha}^*$ , т.е. минимизировать дисперсию ошибки  $J(\bar{\alpha}) = M[(x^* - x)^2]$ . В пространстве параметров  $\alpha_1, \alpha_2$  (т.е. на плоскости) уравнения  $J(\bar{\alpha}) = c$  определяют эллипсы с центром в точке  $\bar{\alpha}^*$ , причем большему значению  $c$  соответствуют большие эллипсы (рис. 6.1).

Точка  $\bar{\alpha}_2$  находится ближе к  $\bar{\alpha}^*$ , чем точка  $\bar{\alpha}_1$ , т.е. оценка  $\bar{\alpha}_2$  точнее, чем  $\bar{\alpha}_1$ . Однако  $\bar{\alpha}_2$  находится на «худшем» эллипсе, чем  $\bar{\alpha}_1$ , поэтому прогноз при параметрах  $\bar{\alpha}_2$  менее точен, чем при параметрах  $\bar{\alpha}_1$ , несмотря на то, что в обычном понимании оценка  $\bar{\alpha}_2$  лучше, чем  $\bar{\alpha}_1$ .

В третьих, процедура обработки может быть неустойчива к ошибкам оценок параметров измерений. Поэтому даже небольшие ошибки в оценках этих параметров могут привести к существенному снижению эффективности обработки в целом.



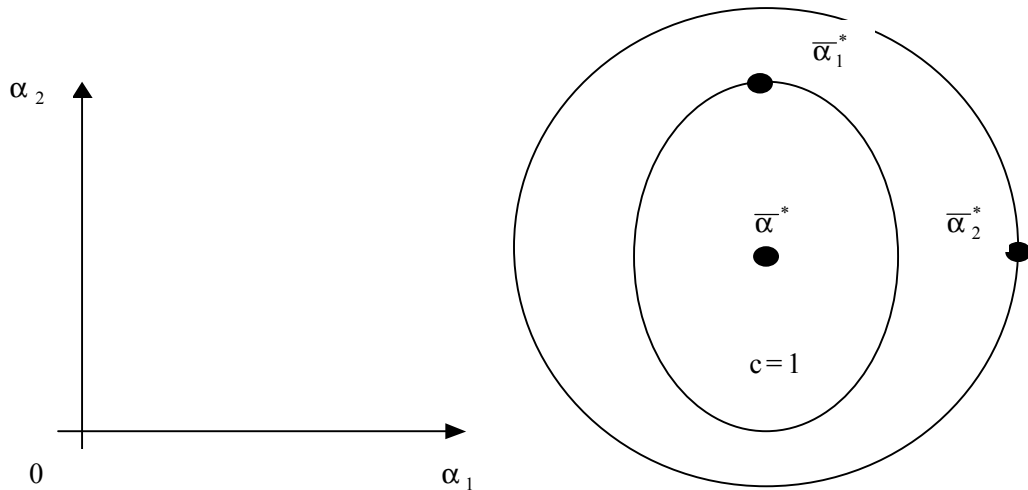


Рис. 6.1. Эллипсы постоянства дисперсии ошибки прогноза

Более предпочтительной в этом плане является безиндификационная адаптация, при которой параметры процедуры определяются через оценки параметров обрабатываемых изображений, а подбираются, подстраиваются так, чтобы эффективность была как можно выше. Для такого подхода, конечно, нужен некоторый наблюдаемый функционал  $J(\bar{\alpha})$ , характеризующий качество обработки. При этом дополнительно требуется техническая реализуемость алгоритмов в реальном времени.

## 6.2. Псевдоградиентные адаптивные алгоритмы

Весьма перспективными для решения рассматриваемой задачи обработки изображений являются псевдоградиентные алгоритмы, основные сведения о которых приведены в разделе 5.

Построим алгоритм этого класса для основной задачи оценки информативного поля. Рассмотрим для примера процедуру формирования прогноза  $\alpha x_{i-1,j}^{**}$  элементов  $i$ -ой строки  $x_{ij}$  по уже сформированной оценке  $x_{i-1,j}^{**}$  предыдущей строки в аппроксимированном фильтре Калмана, описанном в разделе 4. Этот прогноз оптимален при  $\alpha = \rho$ , если  $x_{i-1,j}^{**}$  абсолютно точные оценки. Поскольку оценки  $x_{i-1,j}^{**}$  имеют неизбежные ошибки, оптимальный прогноз может достигаться при каком-то другом значении  $\alpha$ . Для оценки этого значения целесообразно применить ПГ алгоритм, минимизирующий дисперсию ошибки прогноза, аналогично алгоритму, используемому для оценки параметров поля в разделе 5:

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{1}{2} \mu_u \nabla \left( (\alpha_j x_{i-1,j}^{**} - x_{i,j})^2 \right),$$

то есть

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j + \mu_u (z_{ij} - \alpha_j x_{i-1,j}^{**}). \quad (6.1)$$

При этом в алгоритме (6.1) почти не производится дополнительных вычислений по сравнению с самой процедурой фильтрации, т.к. выражение в скобках формулы (6.1) уже должно вычисляться при фильтрации. Таким образом, дополнительно требуется два умножения и одно сложение на одну точку, что является приемлемой платой за адаптацию.

Отметим одно важное обстоятельство. Если параметры изображений меняются со временем, то оптимальное значение коэффициента прогноза также изменяется и необходима процедура его отслеживания. Эту задачу может выполнить процедура (6.1), если в ней взять  $\mu_u$  ограниченные снизу, например, постоянные:  $\mu_u = \mu$ . Таким образом, появляется возможность обработки полей комплексных амплитуд несущих с плавной неоднородностью.

Аналогичным образом можно получить ПГ адаптивные варианты и другие процедуры, используемые в оценке изображений. При этом процедуры адаптации и собственно обработки практически составляют одно целое, используя общие вычисляемые величины, поэтому процедура адаптации требует очень небольших дополнительных вычислений, не превосходящих количества вычислений в основной процедуре обработки.

### *Исследовательская программа*

Адаптивный ПГ алгоритм оценки изображения по случайной сетке наблюдений реализован в исследовательской программе. В этой программе, кроме оценки поля комплексных амплитуд несущих, дополнительно оцениваются параметры  $\rho$ ,  $r$  и  $q^2$ , а также производится измерение дисперсии погрешности оценки поля время-частота. При этом используются только наблюдаемые пилот-сигналы.

### 6.3. Выводы

Весьма эффективные алгоритмы оценки комплексных амплитуд несущих могут быть построены при использовании псевдоградиентной адаптации.

Алгоритмы этого класса требуют небольшого количества дополнительных вычислений, поэтому легко реализуются в реальном времени.

Данные алгоритмы пригодны для обработки неоднородных по времени и частотным каналам комплексных амплитуд несущих.

## 7. ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО РАЗВИТИЮ ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕСКОЛЬКИХ АНТЕНН

Рассмотрим системы передачи данных с OFDM, использующие  $M$  приемных антенн. В многочастотных системах мобильной связи есть основания полагать независимыми замирания сигналов в  $M$  ветвях разнесения, а также помехи, действующие в этих ветвях. Вместе с тем, в известной литературе отсутствует информация относительно связи параметров полей комплексных амплитуд (амплитудно-фазовых характеристик каналов), соответствующих  $M$  приемным антеннам. Для получения такой информации необходимо либо указать точные параметры и расположение антенн, либо провести экспериментальные исследования.

Все системы совместной обработки сигналов, принимаемых на  $M$  антенн, можно разделить на три группы: системы с автовыбором ветви разнесения (рис.7.1), системы со сложением сигналов (рис.7.2) и смешанные системы. Рассмотрим возможные варианты построения таких систем более подробно.

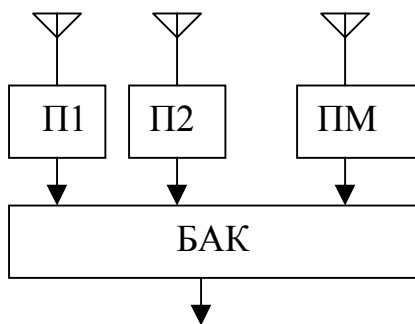


Рис.7.1 Система с автовыбором

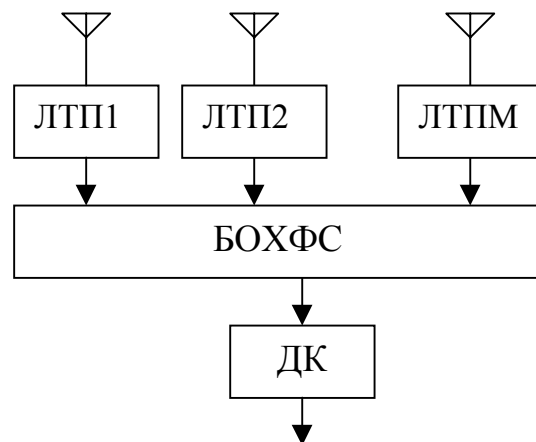


Рис.7.2 Система с квазикогерентным сложением

В системах с автовыбором из  $M$  каналов доступа к информации (рис.7.1) с помощью блока выбора и коммутации (БАК) выбирается наилучший по какому-либо показателю качества. Такими показателями могут быть:

а) характеристики потока ошибок на входе декодера в обычных системах OFDM с помехоустойчивым кодированием;

б) оценки параметров поля комплексных амплитуд (коэффициентов корреляции и отношения сигнал/шум) или соответствующие им выбранные номера планов расположения пилот-сигналов в адаптивных системах;

в) частоты ошибок приема пилот-сигналов;

г) смешанные показатели качества.

Предполагая, что основной задачей системы с несколькими антеннами является борьба с независимыми релеевскими замираниями, можно дать потенциальную оценку выигрыша в отношении сигнал/шум при условии правильного выбора наилучшего канала. Действительно, вероятность того, что максимальный уровень  $U_m^2$  релеевской величины  $U_i$  с распределением

$$w(U_i) = \frac{U_i}{2B_0} e^{-\frac{U_i^2}{2B_0}}$$

окажется меньше  $q$  (функции распределения  $U_m^2$ )

$$F_M(q_i) = P\left\{\max_{1 \leq i \leq M} U_i^2 < q\right\} = \left(1 - e^{-\frac{q}{2B_0}}\right)^M.$$

При этом повышается среднее значение сигнал/шум  $\bar{q}_M = \int_0^{\infty} q dF_M(q)$ .

Значения выигрыша  $Q = 10 \lg(\bar{q}_M / q_1)$  приведены в табл. 7.1.

Табл. 7.1

M	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q, дБ	1,5	2,5	3,1	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6

Анализ приведенных данных показывает, что система с автовыбором уступает системе со смешением сигналов, особенно при больших  $M$ . При когерентном сложении выигрыш составил бы, очевидно,  $Q = 10 \lg M$ , например, при  $M = 2$  выигрыш  $Q = 3$  дБ, при  $M = 4$  –  $Q = 6$  дБ, при  $M = 10$  –  $Q = 10$  дБ.

Для достижения потенциального выигрыша  $Q = 10 \lg M$  дБ необходимо осуществить квазикогерентное смешение сигналов (рис.7.2). Для этого в каждом канале после выделения квадратурных составляющих в линейных трактах приемников (ЛТП) на основе пилот-сигналов осуществляется оценка комплексных амплитуд и их вероятностных характеристик в блоке оценивания характеристик и формирования сигналов (БОХФС). Затем в этом же блоке осуществляется квазикогерентное сложение всех  $M$  сигналов и вычисление оценочно-корреляционных интегралов (раздел 1). После принятия решения о номере переданного значения многоуровневого сигнала поток таких решений поступает в декодер (ДК), исправляющий возникающие ошибки.

При разработке подобной системы, позволяющей в принципе достичь потенциально возможного выигрыша  $Q = 10 \lg M$ , возникает важный вопрос уже поставленный в начале этого раздела. Совпадают или нет корреляционные характеристики случайных полей комплексных амплитуд в  $M$  ветвях разнесения. Если эти характеристики совпадают, что наиболее вероятно, то появляется вероятность одновременного использования всех  $M$  наблюдаемых полей квадратурных компонент для рекуррентного оценивания параметров. Это приведет к  $M$ -кратному уменьшению дисперсии ошибок оценивания  $P$  и  $p$  или к такому же сокращению времени адаптации. При этом необходимо модифицировать предложенные псевдоградиентные алгоритмы с учетом неполного совпадения  $P$  и  $p$  в различных ветвях, а также  $M$ -кратного повышения размерности поля наблюдений. При отличающихся характеристиках  $M$  каналов возникают проблемы правильной организации плана расположения пилот-сигналов, обеспечивающего минимальные потери пропускной способности. Одним из возможных путей нахождения компромисса является выбраковка части ветвей разнесения и применения плана, соответствующего наихудшему из оставшихся каналов, т.е. комбинирования автовыбора и квазикогерентного слежения.

Наконец, следует обратить внимание на дополнительные возможности, возникающие при использовании  $M_1$  передающих и  $M_2$  приемных антенн. В этом случае можно наряду с передачей сообщений, применять ортогональные пилот-сигналы разных передающих антеннах и осуществлять анализ качества и характеристик  $M_1 M_2$  возможных информационных каналов, что может существенно повысить помехоустойчивость без существенного усложнения аппаратуры мобильного абонента.

## 8. ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На наш взгляд, главным результатом проведенных исследований стало ясное понимание перспективности адаптивного выбора планов расположения пилот-сигналов при текущем динамическом оценивании параметров полей квадратурных компонент передаточной функции канала связи. В связи с этим весьма перспективной представляется работа по оптимизации предложенной системы, т.е. поиску наилучших алгоритмических и программных решений задач рекуррентного оценивания параметров полей, построения планов расположения пилот-сигналов в широком диапазоне характеристик каналов связи и соответствующих алгоритмов квазиоптимальной обработки OFDM сигналов с расчетом показателей эффективности. Основой для решения названных задач являются материалы настоящего отчета. При этом конкретные задачи, которые могут быть решены с помощью уже рассмотренных в отчете подходов формируются следующим образом.

1. Улучшение аппроксимации КФ (1.5). В качестве модели СП принято разделимое поле с экспоненциальной КФ (1.9). Можно улучшить аппроксимацию с помощью КФ  $R(m) = \sigma_x^2(1 + q|m|)\rho^{|m|}$ , где  $q = (1 - \rho^2)/(1 + \rho^2)$  [4]. Анализ показывает [4], что в области высоких корреляций такая КФ практически совпадает с КФ модели Джейкса (1.5). Вместе с тем СП с КФ  $R(m)$  может быть сформировано на основе время-частотной комбинации случайных последовательностей, заданных рекуррентным уравнением вида

$$x_j = 2\rho x_{j-1} - \rho^2 x_{j-2} + \xi_j, j = 1, 2, \dots$$

Таким образом, удастся реально улучшить модель СП, приблизив ее КФ к (1.5), и вместе с тем сохранить рекуррентность аппроксимированного калмановского адаптивного оценивания.

2. Для представленной модели поля необходимо построить адаптивные алгоритмы оценивания и исследовать их эффективность.

3. В разделах 2.1-2.3 приведены результаты расчетов ошибок  $P_{\text{err}}$  в системе с пилот-сигналами. При этом в п. 2.3 найдено единственно возможное простое соотношение (2.12), позволяющее точно определить  $P_{\text{err}}$  для нефлюктуирующих противоположных или ортогональных бинарных сигналов. Предложенная методика в принципе позволяет определить  $P_{\text{err}}$  для

любых сигналов в любых условиях с учетом погрешностей оценивания квадратурных компонент. Однако при этом возникают вычислительные проблемы. Например, при релейском принимаемом сигнале в формуле (12.5) для  $\Lambda$  появляется произведение  $B\varepsilon_1(B\varepsilon_2)$ , имеющее негауссовское распределение; точные расчеты вероятностей ошибок для многоуровневых сигналов требуют учета взаимной корреляции статистик (2.4) и т.д. Тем не менее, если заказчик подтвердит желание получить точные результаты и отсутствие опубликованных данных в этой области, то исполнитель готов выполнить эту работу.

4. Необходимо построить оптимальные планы расположения пилот-сигналов не только для заданных параметров ИТУ, но для всех возможных значений параметров в пространстве трех измерений  $(1-\rho), (1-r), q$ , разбив его на области допустимых используемых планов.

5. Важным направлением является совершенствование предложенных методов псевдоградиентной адаптации алгоритмов оценивания – идентификации параметров квадратурных компонент.

6. Объединение всех предложенных алгоритмов и методик требует создания и оптимизации соответствующего программного обеспечения и (или) реализации алгоритмов на базе сигнальных процессоров или транспьютеров.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе исследований была решена комплексная задача разработки и анализа алгоритмов адаптивного позиционирования пилот–сигналов в многочастотных системах связи. При этом был получен ряд новых научных и прикладных результатов, основные из которых можно сформулировать следующим образом.

1. Проведен анализ математических моделей комплексных амплитуд несущих. Предложена аппроксимация ITU channel model случайным двумерным полем с разделимой экспоненциальной корреляционной функцией. Показаны возможности улучшения качества аппроксимации на основе двумерных моделей с кратными корнями характеристических уравнений.

2. Проанализированы оптимальные оценочно–корреляционные алгоритмы приема сигналов для произвольных многоуровневых видов модуляции. Простые соотношения для вероятностей ошибок получены для бинарных сигналов.

3. Разработаны алгоритмы оценивания комплексных амплитуд несущих с учетом размещения пилот–сигналов. Дан анализ дисперсии ошибки оценивания.

4. Проведен сравнительный анализ различных показателей качества при размещении пилот–сигналов. Предложено использовать критерий величины пропускной способности (число пилот – сигналов в кадре двумерного поля) при заданной на кадре максимальной вероятности ошибки или, что то же самое, при заданной максимально допустимой величине относительной дисперсии оценивания комплексных амплитуд.

5. Разработаны алгоритмы оптимального размещения пилот–сигналов и оценивания выигрыша при таком размещении по отношению к традиционному регулярному размещению пилот–сигналов.

6. Предложено использовать различные планы расположения пилот–сигналов при различных оцененных параметрах двумерного поля комплексных амплитуд. Для реализации этого предложения разработаны рекуррентные алгоритмы псевдоградиентной идентификации параметров модели.



7. Разработаны рекуррентные алгоритмы оценивания–идентификации параметров поля, позволяющие все вычисления выполнить в реальном времени.

8. Разработана программа моделирования в системе MATLAB, получены результаты моделирования в виде графиков выигрыша при неравномерном расположении пилот – сигналов.

9. Дана оценка вычислительной сложности всех предложенных алгоритмов, их сравнение с известными процедурами расстановки пилот-сигналов, найденными в сети ИНТЕРНЕТ.

10. Выявлены особенности функционирования предложенных алгоритмов в системах с пространственным или поляризационным разнесением.

11. Намечены перспективные направления дальнейших исследований.

Таким образом, техническое задание по разработке алгоритмов синхронизации в системах OFDM следует считать выполненным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Связь с подвижными объектами в диапазоне СВЧ/ Под ред. У.К.Джейкса.– М.: Радио и связь, 1979.– 520 с.
2. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Методы фильтрации многомерных случайных полей.- Саратов: СГУ, 1990, 128 с.
3. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Адаптивный многомерный аппроксимированный фильтр Камана // Тез. докл. 49-й науч.-техн. Конф., посв. Дню радио.- Санкт-Петербург: НТО РЭС им. А.С.Попова, 1994, с. 25-26.
4. Прикладная теория случайных процессов и полей / Под ред. К.К. Васильева и В.А. Омельченко. – Ульяновск: УлГТУ, 1995, с. 233-255.
5. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения // Автоматика и телемеханика, 1973, №3, с. 45 – 68.
6. Невельсон М.Б. Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972, с. 304.
7. Крашенинников В.Р., Капралов Б.П. Адаптивные алгоритмы прогноза изображений // «Техника средств связи», сер. «Техника телевидения», 1990, вып. 5, с. 53 – 61.
8. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Адаптивные алгоритмы обнаружения аномалий на последовательности многомерных изображений// Компьютерная оптика, вып. 14-15, часть 1, 1995, с. 125-132.
9. Васильев К.К., Герчес В.Г. Калмановская фильтрация изображений // Методы обработки сигналов и полей.- Ульяновск: УлПИ, 1990, с. 105-111.
10. Спектор А.А. Двухэтапная фильтрация случайных полей при действии помех // Методы обработки цифровых сигналов и полей в условиях помех.- Новосибирск: НЭТИ, 1988, с. 3-9.
11. Ташлиский А.Г. Оценивание параметров пространственных деформаций последовательностей изображений/УлГТУ.- Ульяновск: УлГТУ, 2000. - 132 с.
12. Tachlinskii A.G. The Efficiency of Pseudogradient Procedures for the Estimation of Image Parameters with a Finite Number of Iterations // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol.8, № 2, 1998. - Pp. 260-261.
13. Tachlinskii A.G. Priority Approach to the Choice of Subregion Which Contains a True Parameters Vector, with Recursion Estimation // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 9, № 1, 1999. - Pp. 107-108.
14. Tachlinskii A.G. Pseudogradient Algorithms for Estimation Spatial Distortions of Image with Varying Volume of the Local Sample of the Goal Function // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol.11, № 1, 2001. - Pp. 247-250.