Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

К. К. ВАСИЛЬЕВ, М. Н. СЛУЖИВЫЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СВЯЗИ

Учебное пособие по дисциплине
«Математическое моделирование каналов и систем телекоммуникаций»
для студентов специальностей 21040665 «Сети связи и системы коммутации»
и 21040465 «Многоканальные телекоммуникационные системы»

Ульяновск
2008

УДК 621.391 (075)
ББК 32я7
В 19

Рецензенты:
кафедра радиоэлектроники Ульяновского высшего военного инженерного училища связи
доктор технических наук, профессор Кумунжиев К. В.

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Васильев, К. К.
В 19 Математическое моделирование систем связи : учебное пособие / К. К. Васильев, М. Н. Служивый. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 170 с.

ISBN 978-5-9795-0100-0

Рассмотрены вопросы математического моделирования сигналов и помех, имеющих место в телекоммуникационных системах, а также основные сведения о системах передачи информации. Описаны методы построения математических моделей случайных величин, процессов и полей, а также случайных потоков, качественно отражающих процессы в реальных системах.

Для студентов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области математического моделирования инфокоммуникационных систем.

Книга печатается в авторской редакции.

УДК 621.391 (075)
ББК 32я7

ISBN 978-5-9795-0100-0
© Васильев К. К., Служивый М. Н., 2008
© Оформление. УлГТУ, 2008

Учебное издание

ВАСИЛЬЕВ Константин Константинович
СЛУЖИВЫЙ Максим Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СВЯЗИ

Учебное пособие

Подписано в печать 10.04.2008.
Формат 60×84/16. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 9,99. Тираж 100 экз.
Заказ 454

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32
Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32

ВВЕДЕНИЕ

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования, суть которого состоит в замене исходного объекта его образом – математической моделью и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот метод сочетает в себе достоинства, как теории, так и эксперимента, поскольку работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в различных ситуациях. В то же время вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических средств информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам.

Вышесказанное является актуальным в условиях постоянного роста требований к эффективности устройств, применяемых в системах передачи и обработки информации, к сокращению сроков исследования и разработки новых телекоммуникационных систем и сетей.

Учебное пособие посвящено методам математического моделирования сигналов в телекоммуникационных системах, которые в настоящее время интенсивно развиваются.

В первой главе описаны методологические основы моделирования, определены понятия аналитического и имитационного моделирования, приведены основные сведения из теории систем, кратко описан системный подход к моделированию, изложены принципы построения математических моделей, дана классификация моделей.

Во второй главе приведены сведения из теории вероятностей, описаны различные методы моделирования негауссовских случайных величин: метод обратных функций, метод суперпозиции, методы Неймана и кусочной аппроксимации. Приведен ряд моделирующих алгоритмов с использованием гамма-распределения. В общих чертах описано моделирование векторных случайных величин.

Третья глава посвящена методам моделирования случайных процессов. Вначале дается понятие марковского случайного процесса. Далее приводятся основные сведения о стохастических дифференциальных и разностных уравнениях, используемых для описания нелинейных марковских моделей имеющих распределения Пирсона и Накагами. Затем описаны модели случайных последовательностей в виде временных рядов: процессы авторегрессии и скользящего среднего. Особое внимание уделяется методам формирующего фильтра и скользящего суммирования, а также представлению дискретных моделей стационарных случайных процессов с типовыми корреляционными функциями.

Четвертая глава посвящена моделированию случайных полей, которые являются хорошими математическими моделями многомерных массивов

данных, таких как пространственно-временные сигналы, наблюдаемые на фоне помех. Значительное внимание уделяется алгоритмам формирования дискретных случайных полей и авторегрессионным моделям случайных полей. Приведен ряд конкретных моделирующих алгоритмов для непрерывных случайных полей.

В пятой главе изложены основы теории случайных потоков, рассмотрены простейший поток, поток с ограниченным последействием, нормальный поток. Подробно описаны фрактальные модели случайных потоков, а также алгоритмы моделирования самоподобных случайных процессов. Представлены модели систем массового обслуживания с отказами и с ожиданием (очередью) с использованием диаграмм состояний и переходов.

В шестой главе кратко дана классификация систем передачи информации, описаны основные характеристики систем связи, а также сигналов и помех в различных системах. Описаны обобщенные модели непрерывных и дискретных каналов связи. Приведены сведения о моделях реальных каналов связи и их параметрах.

В седьмой главе представлены основные сведения о математической программной среде MATLAB и пакете визуального моделирования Simulink. Даны общие замечания по визуальному моделированию систем. Кратко описано создание и маскирование подсистем с помощью пакета Simulink на примере типичной радиосистемы передачи информации.

Материал, приведенный в пособии, будет полезен студентам и аспирантам, изучающим методы математического моделирования сигналов и систем.

1. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. Современное состояние проблемы моделирования систем

1.1.1. Понятия модели и моделирования

Моделирование можно рассматривать как замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным образом, описанием или другим объектом, именуемым **моделью** и обеспечивающим близкое к оригиналу поведение в рамках некоторых допущений и приемлемых погрешностей. Моделирование обычно выполняется с целью познания свойств оригинала путем исследования его модели, а не самого объекта. Разумеется, моделирование оправдано в том случае когда оно проще создания самого оригинала или когда последний по каким-то причинам лучше вообще не создавать.

Под **моделью** понимается физический или абстрактный объект, свойства которого в определенном смысле сходны со свойствами исследуемого объекта. При этом требования к модели определяются решаемой задачей и имеющимися средствами [19]. Существует ряд общих требований к моделям:

1) адекватность – достаточно точное отображение свойств объекта;

2) полнота – предоставление получателю всей необходимой информации об объекте;

3) гибкость – возможность воспроизведения различных ситуаций во всем диапазоне изменения условий и параметров;

4) трудоемкость разработки должна быть приемлемой для имеющегося времени и программных средств.

Моделирование – это процесс построения модели объекта и исследования его свойств путем исследования модели.

Таким образом, моделирование предполагает 2 основных этапа:

1) разработка модели;

2) исследование модели и получение выводов.

При этом на каждом из этапов решаются разные задачи и используются отличающиеся по сути методы и средства.

На практике применяют различные методы моделирования. В зависимости от способа реализации, все модели можно разделить на два больших класса: физические и математические.

Математическое моделирование принято рассматривать как средство исследования процессов или явлений с помощью их математических моделей.

Под **физическим моделированием** понимается исследование объектов и явлений на физических моделях, когда изучаемый процесс воспроизводят с сохранением его физической природы или используют другое физическое явление, аналогичное изучаемому [10, 41]. При этом **физические модели** предполагают, как правило, реальное воплощение тех физических свойств оригинала, которые являются существенными в конкретной ситуации. Например, при проектировании нового самолета создается его макет,

обладающий теми же аэродинамическими свойствами; при планировании застройки архитекторы изготавливают макет, отражающий пространственное расположение ее элементов. В связи с этим физическое моделирование называют также **макетированием** [10].

Полунатурное моделирование представляет собой исследование управляемых систем на моделирующих комплексах с включением в состав модели реальной аппаратуры [41]. Наряду с реальной аппаратурой в замкнутую модель входят имитаторы воздействий и помех, математические модели внешней среды и процессов, для которых неизвестно достаточно точное математическое описание. Включение реальной аппаратуры или реальных систем в контур моделирования сложных процессов позволяет уменьшить априорную неопределенность и исследовать процессы, для которых нет точного математического описания. С помощью полунатурного моделирования исследования выполняются с учетом малых постоянных времени и нелинейностей, присущих реальной аппаратуре. При исследовании моделей с включением реальной аппаратуры используется понятие **динамического моделирования**, при исследовании сложных систем и явлений - **эволюционного**, **имитационного** и **кибернетического моделирования** [10, 18, 41].

Очевидно, действительная польза от моделирования может быть получена только при соблюдении двух условий:

1) модель обеспечивает корректное (адекватное) отображение свойств оригинала, существенных с точки зрения исследуемой операции;

2) модель позволяет устранить перечисленные выше проблемы, присущие проведению исследований на реальных объектах.

1.1.2. Основные понятия математического моделирования

Решение практических задач математическими методами последовательно осуществляется путем формулировки задачи (разработки математической модели), выбора метода исследования полученной математической модели, анализа полученного математического результата. Математическая формулировка задачи обычно представляется в виде геометрических образов, функций, систем уравнений и т.п. Описание объекта (явления) может быть представлено с помощью непрерывной или дискретной, детерминированной или стохастической и другими математическими формами.

Теория математического моделирования обеспечивает выявление закономерностей протекания различных явлений окружающего мира или работы систем и устройств путем их математического описания и моделирования без проведения натурных испытаний. При этом используются положения и законы математики, описывающие моделируемые явления, системы или устройства на некотором уровне их идеализации.

Математическая модель (ММ) представляет собой формализованное описание системы (или операции) на некотором абстрактном языке, например, в виде совокупности математических соотношений или схемы алгоритма,

т. е. такое математическое описание, которое обеспечивает имитацию работы систем или устройств на уровне, достаточно близком к их реальному поведению, получаемому при натурных испытаниях систем или устройств. Любая ММ описывает реальный объект, явление или процесс с некоторой степенью приближения к действительности. Вид ММ зависит как от природы реального объекта, так и от задач исследования.

Математическое моделирование общественных, экономических, биологических и физических явлений, объектов, систем и различных устройств является одним из важнейших средств познания природы и проектирования самых разнообразных систем и устройств. Известны примеры эффективного использования моделирования в создании ядерных технологий, авиационных и аэрокосмических систем, в прогнозе атмосферных и океанических явлений, погоды и т.д. [14]

Однако для таких серьезных сфер моделирования нередко нужны суперкомпьютеры и годы работы крупных коллективов ученых по подготовке данных для моделирования и его отладки. Тем не менее, и в этом случае математическое моделирование сложных систем и устройств не только экономит средства на проведение исследований и испытаний, но и может устранить экологические катастрофы – например, позволяет отказаться от испытаний ядерного и термоядерного оружия в пользу его математического моделирования или испытаний аэрокосмических систем перед их реальными полетами.

Между тем математическое моделирование на уровне решения более простых задач, например, из области механики, электротехники, электроники, радиотехники и многих других областей науки и техники в настоящее время стало доступным выполнять на современных ПК. А при использовании обобщенных моделей становится возможным моделирование и достаточно сложных систем, например, телекоммуникационных систем и сетей, радиолокационных или радионавигационных комплексов.

Целью математического моделирования является анализ реальных процессов (в природе или технике) математическими методами. В свою очередь, это требует формализации ММ процесса, подлежащего исследованию. Модель может представлять собой математическое выражение, содержащее переменные, поведение которых аналогично поведению реальной системы. Модель может включать элементы случайности, учитывающие вероятности возможных действий двух или большего числа «игроков», как, например, в теории игр; либо она может представлять реальные переменные параметры взаимосвязанных частей действующей системы.

Математическое моделирование для исследования характеристик систем можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное. В свою очередь, ММ делятся на имитационные и аналитические.

1.1.3. Аналитическое моделирование

Для **аналитического моделирования** характерно, что процессы функционирования системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений) [10]. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

1) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для характеристик систем;

2) численным, когда не удается найти решение уравнений в общем виде и их решают для конкретных начальных данных;

3) качественным, когда при отсутствии решения находят некоторые его свойства.

Аналитические модели удается получить только для сравнительно простых систем. Для сложных систем часто возникают большие математические проблемы. Для применения аналитического метода идут на существенное упрощение первоначальной модели. Однако исследование на упрощенной модели помогает получить лишь ориентировочные результаты. Аналитические модели математически верно отражают связь между входными и выходными переменными и параметрами. Но их структура не отражает внутреннюю структуру объекта.

При аналитическом моделировании его результаты представляются в виде аналитических выражений [14]. Например, подключив RC-цепь к источнику постоянного напряжения E (R, C и E - компоненты данной модели), мы можем составить аналитическое выражение для временной зависимости напряжения $u(t)$ на конденсаторе C:

$$RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = E \tag{1.1}$$

Это линейное дифференциальное уравнение (ДУ) и является аналитической моделью данной простой линейной цепи. Его аналитическое решение, при начальном условии $u(0) = 0$, означающем разряженный конденсатор C в момент начала моделирования, позволяет найти искомую зависимость – в виде формулы:

$$u(t) = E\left(1 - e^{-t/RC}\right) \tag{1.2}$$

Однако даже в этом простейшем примере требуются определенные усилия для решения ДУ (1.1) или для применения **систем компьютерной математики** (СКМ) с символьными вычислениями – систем компьютерной алгебры. Для данного вполне тривиального случая решение задачи моделирования линейной RC-цепи дает аналитическое выражение (1.2) достаточно общего вида – оно пригодно для описания работы цепи при любых номиналах компонентов R, C и E, и описывает экспоненциальный заряд конденсатора C через резистор R от источника постоянного напряжения E.

Безусловно, нахождение аналитических решений при аналитическом моделировании оказывается исключительно ценным для выявления общих

теоретических закономерностей простых линейных цепей, систем и устройств. Однако его сложность резко возрастает по мере усложнения воздействий на модель и увеличения порядка и числа уравнений состояния, описывающих моделируемый объект. Можно получить более или менее обозримые результаты при моделировании объектов второго или третьего порядка, но уже при большем порядке аналитические выражения становятся чрезмерно громоздкими, сложными и трудно осмысляемыми. Например, даже простой электронный усилитель зачастую содержит десятки компонентов. Тем не менее, многие современные СКМ, например, системы символьной математики **Maple, Mathematica** или среда **MATLAB** (глава 7), способны в значительной мере автоматизировать решение сложных задач аналитического моделирования.

Одной из разновидностей моделирования является **численное моделирование** [30, 37]**,** которое заключается в получении необходимых количественных данных о поведении систем или устройств каким-либо подходящим численным методом, таким как методы Эйлера или Рунге-Кутта [37]. На практике моделирование нелинейных систем и устройств с использованием численных методов оказывается намного более эффективным, чем аналитическое моделирование отдельных частных линейных цепей, систем или устройств. Например, для решения ДУ (1.1) или систем ДУ в более сложных случаях решение в аналитическом виде не получается, но по данным численного моделирования можно получить достаточно полные данные о поведении моделируемых систем и устройств, а также построить графики описывающих это поведение зависимостей.

1.1.4. Имитационное моделирование

При **имитационном моделировании** реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени. Имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени [42].

Основным преимуществом имитационных моделей по сравнению с аналитическими является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют легко учитывать наличие дискретных или непрерывных элементов, нелинейные характеристики, случайные воздействия и др. Поэтому этот метод широко применяется на этапе проектирования сложных систем. Основным средством реализации имитационного моделирования служит ЭВМ, позволяющая осуществлять цифровое моделирование систем и сигналов.

В связи с этим определим словосочетание «**компьютерное моделирование**», которое все чаще используется в литературе. Будем полагать, что **компьютерное моделирование** - это математическое моделирование с использованием средств вычислительной техники. Соответственно, технология компьютерного моделирования предполагает выполнение следующих действий [10]:

1) определение цели моделирования;
2) разработка концептуальной модели;
3) формализация модели;
4) программная реализация модели;
5) планирование модельных экспериментов;
6) реализация плана эксперимента;
7) анализ и интерпретация результатов моделирования.

Содержание первых двух этапов практически не зависит от математического метода, положенного в основу моделирования (и даже наоборот - их результат определяет выбор метода). А вот реализация остальных пяти этапов существенно различается для аналитического и имитационного моделирования.

При **имитационном моделировании** используемая ММ воспроизводит алгоритм («логику») функционирования исследуемой системы во времени при различных сочетаниях значений параметров системы и внешней среды. Примером простейшей аналитической модели может служить уравнение прямолинейного равномерного движения. При исследовании такого процесса с помощью имитационной модели должно быть реализовано наблюдение за изменением пройденного пути с течением времени.

Очевидно, в одних случаях более предпочтительным является аналитическое моделирование, в других - имитационное (или сочетание того и другого). Чтобы выбор был удачным, необходимо ответить на два вопроса.

С какой целью проводится моделирование?

К какому классу может быть отнесено моделируемое явление?

Ответы на оба эти вопроса могут быть получены в ходе выполнения двух первых этапов моделирования.

Имитационные модели не только по свойствам, но и по структуре соответствуют моделируемому объекту. При этом имеется однозначное и явное соответствие между процессами, получаемыми на модели, и процессами, протекающими на объекте. Недостатком имитационного моделирования является большое время решения задачи для получения хорошей точности.

Результаты имитационного моделирования работы стохастической системы являются реализациями случайных величин или процессов. Поэтому для нахождения характеристик системы требуется многократное повторение и последующая обработка данных. Чаще всего в этом случае применяется разновидность имитационного моделирования - **статистическое моделирование** (или метод Монте-Карло), т.е. воспроизведение в моделях случайных факторов, событий, величин, процессов, полей [13, 30, 41]. По результатам статистического моделирования определяют оценки вероятностных критериев качества, общих и частных, характеризующих функционирование и эффективность управляемой системы. Статистическое моделирование широко применяется для решения научных и прикладных задач в различных областях науки и техники. Методы статистического моделирования широко применяются при исследовании сложных динамических систем, оценке их функционирования и эффективности.

Заключительный этап статистического моделирования основан на математической обработке полученных результатов. Здесь используют методы математической статистики (параметрическое и непараметрическое оценивание, проверку гипотез) [39]. Примером параметрической оценки является выборочное среднее показателя эффективности. Среди непараметрических методов большое распространение получил **метод гистограмм**.

Рассмотренная схема основана на многократных статистических испытаниях системы и методах статистики независимых случайных величин. Эта схема является далеко не всегда естественной на практике и оптимальной по затратам. Сокращение времени испытания систем может быть достигнуто за счет использования более точных методов оценивания. Как известно из математической статистики, наибольшую точность при заданном объеме выборки имеют эффективные оценки [5, 38]. Оптимальная фильтрация и метод максимального правдоподобия дают общий метод получения таких оценок [38].

В задачах статистического моделирования обработка реализаций случайных процессов необходима не только для анализа выходных процессов. Весьма важен также и контроль характеристик входных случайных воздействий. Контроль заключается в проверке соответствия распределений генерируемых процессов заданным распределениям. Эта задача часто формулируется как **задача проверки гипотез** [5].

Общей тенденцией моделирования с использованием ЭВМ у сложных управляемых систем является стремление к уменьшению времени моделирования, а также проведение исследований в реальном масштабе времени. Вычислительные алгоритмы удобно представлять в рекуррентной форме, допускающей их реализацию в темпе поступления текущей информации [4, 28, 29].

1.2. Принципы системного подхода в моделировании

Основные положения теории систем возникли в ходе исследования динамических систем и их функциональных элементов. Под **системой** понимают группу взаимосвязанных элементов, действующих совместно с целью выполнения заранее поставленной задачи. **Анализ систем** позволяет определить наиболее реальные способы выполнения поставленной задачи, обеспечивающие максимальное удовлетворение поставленных требований.

Элементы, составляющие основу теории систем, не создаются с помощью гипотез, а обнаруживаются экспериментальным путем. Для того чтобы начать построение системы, необходимо иметь общие характеристики технологических процессов. Это же справедливо и в отношении принципов создания математически сформулированных критериев, которым должен удовлетворять процесс или его теоретическое описание. Моделирование является одним из наиболее важных методов научного исследования и экспериментирования [22, 27, 40].

При построении моделей объектов используется **системный подход**, представляющий собой методологию решения сложных задач, в основе

которой лежит рассмотрение объекта как системы, функционирующей в некоторой среде. Системный подход предполагает раскрытие целостности объекта, выявление и изучение его внутренней структуры, а также связей с внешней средой. При этом **объект** представляется как часть реального мира, которая выделяется и исследуется в связи с решаемой задачей построения модели. Кроме этого, системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит цель проектирования, а объект рассматривается во взаимосвязи с окружающей средой [19].

Сложный объект может быть разделен на **подсистемы**, представляющие собой части объекта, удовлетворяющие следующим требованиям:

1) подсистема является функционально независимой частью объекта. Она связана с другими подсистемами, обменивается с ними информацией и энергией;

2) для каждой подсистемы могут быть определены функции или свойства, не совпадающие со свойствами всей системы;

3) каждая из подсистем может быть подвергнута дальнейшему делению до уровня элементов.

В данном случае под **элементом** понимается подсистема нижнего уровня, дальнейшее деление которой нецелесообразно с позиций решаемой задачи.

Таким образом, **систему** можно определить как представление объекта в виде набора подсистем, элементов и связей с целью его создания, исследования или усовершенствования. При этом укрупненное представление системы, включающее в себя основные подсистемы и связи между ними, называется **макроструктурой**, а детальное раскрытие внутреннего строения системы до уровня элементов **– микроструктурой** [19].

Наряду с системой обычно существует **надсистема** – система более высокого уровня, в состав которой входит рассматриваемый объект, причём функция любой системы может быть определена только через надсистему. Следует выделить понятие **среды** как совокупности объектов внешнего мира, существенно влияющих на эффективность функционирования системы, но не входящих в состав системы и ее надсистемы [19].

В связи с системным подходом к построению моделей используется понятие **инфраструктуры,** описывающей взаимосвязи системы с ее окружением (средой).

При этом выделение, описание и исследование свойств объекта, существенных в рамках конкретной задачи называется **стратификацией объекта**, а всякая модель объекта является его стратифицированным описанием [19].

Для системного подхода важным является определение **структуры системы**, т.е. совокупности связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие. Для этого вначале рассмотрим структурный и функциональный подходы к моделированию.

При **структурном подходе** выявляются состав выделенных элементов системы и связи между ними. Совокупность элементов и связей позволяет

судить о структуре системы. Наиболее общим описанием структуры является топологическое описание. Оно позволяет определить составные части системы и их связи с помощью графов.

Менее общим является функциональное описание, когда рассматриваются отдельные функции, т. е. алгоритмы поведения системы. При этом реализуется **функциональный подход**, определяющий функции, которые выполняет система.

На базе системного подхода может быть предложена последовательность разработки моделей, когда выделяют две основные стадии проектирования: макропроектирование и микропроектирование [19].

На стадии **макропроектирования** строится модель внешней среды, выявляются ресурсы и ограничения, выбирается модель системы и критерии для оценки адекватности.

Стадия **микропроектирования** в значительной степени зависит от конкретного типа выбранной модели. В общем случае предполагает создание информационного, математического, технического и программного обеспечения системы моделирования. На этой стадии устанавливаются основные технические характеристики созданной модели, оцениваются время работы с ней и затраты ресурсов для получения заданного качества модели.

Независимо от типа модели при ее построении необходимо руководствоваться рядом **принципов системного подхода** [19, 22]:

1) последовательное продвижение по этапам создания модели;

2) согласование информационных, ресурсных, надежностных и других характеристик;

3) правильное соотношение различных уровней построения модели;

4) целостность отдельных стадий проектирования модели.

1.3. Принципы построения математических моделей

Рассмотрим основные принципы моделирования, отражающие опыт, накопленный к настоящему времени в области разработки и использования ММ [10].

1. Принцип информационной достаточности. При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение ее модели невозможно. При наличии полной информации о системе ее моделирование лишено смысла. Существует некоторый критический уровень априорных сведений о системе (уровень информационной достаточности), при достижении которого может быть построена ее адекватная модель.

2. Принцип осуществимости. Создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля, и за конечное время.

3. Принцип множественности моделей. Данный принцип является ключевым. Речь идет о том, что создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы (или явления), которые влияют на выбранный показатель эффективности. Соответственно при использовании

любой конкретной модели познаются лишь некоторые стороны реальности. Для более полного ее исследования необходим ряд моделей, позволяющих с разных сторон и с разной степенью детальности отражать рассматриваемый процесс.

4. Принцип агрегирования. В большинстве случаев сложную систему можно представить состоящей из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы. Принцип агрегирования позволяет, кроме того, достаточно гибко перестраивать модель в зависимости от задач исследования.

5. Принцип параметризации. В ряде случаев моделируемая система имеет в своем составе некоторые относительно изолированные подсистемы, характеризующиеся определенным параметром, в том числе векторным. Такие подсистемы можно заменять в модели соответствующими числовыми величинами, а не описывать процесс их функционирования. При необходимости зависимость значений этих величин от ситуации может задаваться в виде таблицы, графика или аналитического выражения (формулы). Принцип параметризации позволяет сократить объем и продолжительность моделирования. Однако надо иметь в виду, что параметризация снижает адекватность модели.

Степень реализации перечисленных принципов и каждой конкретной модели может быть различной, причем это зависит не только от желания разработчика, но и от соблюдения им технологии моделирования. А любая технология предполагает наличие определенной последовательности действий

Общая цель моделирования может быть сформулирована следующим образом: это определение (расчет) значений выбранного показателя эффективности (ПЭ) для различных стратегий проведения операции (или вариантов реализации проектируемой системы). При разработке конкретной модели цель моделирования должна уточняться с учетом используемого критерия эффективности. Для критерия пригодности модель, как правило, должна обеспечивать расчет значений ПЭ для всего множества допустимых стратегий. При использовании критерия оптимальности модель должна позволять непосредственно определять параметры исследуемого объекта, дающие экстремальное значение ПЭ [10].

Таким образом, цель моделирования определяется как целью исследуемой операции, так и планируемым способом использования результатов исследования. Например, проблемная ситуация, требующая принятия решения, формулируется следующим образом: найти вариант построения вычислительной сети, который обладал бы минимальной стоимостью при соблюдении требований по производительности и по надежности. В этом случае целью моделирования является отыскание параметров сети, обеспечивающих минимальное значение ПЭ, в роли которого выступает стоимость.

Задача может быть сформулирована иначе: из нескольких вариантов конфигурации вычислительной сети выбрать наиболее надежный. Здесь в качестве ПЭ выбирается один из показателей надежности (средняя наработка

на отказ, вероятность безотказной работы и т. п.), а целью моделирования является сравнительная оценка вариантов сети по этому показателю.

Приведенные примеры говорят о том, что сам по себе выбор показателя эффективности еще не определяет «архитектуру» будущей модели, поскольку на этом этапе не определена концептуальная модель исследуемой системы.

В целом при решении любой задачи построения модели основную роль играют следующие четыре элемента [40]:

1) эксперимент;
2) модель;
3) показатели эффективности;
4) критерии принятия решений.

Необходимо должным образом определить перечисленные элементы и понять их взаимосвязь, поскольку они оказывают большое влияние на **проектирование системы** и на планирование ее работы в целом. Критерии принятия решений позволяют выбрать наиболее эффективные параметры системы. Обычно этот процесс называется **оптимизацией** [40].

1.4. Классификационные признаки и классификация моделей

В процессе построения модели различают три вида или стадии построения: мысленная модель, концептуальная модель и формальная модель [19].

При наблюдении за объектом в голове исследователя формируется мысленный образ объекта, его идеальная модель. Формируя такую модель, разработчик, как правило, стремится ответить на конкретные вопросы. От реального очень сложного устройства объекта отсекается все ненужное с целью получения его более компактного и лаконичного описания. Представление мысленной модели на естественном языке называется **содержательной** моделью [19].

По функциональному признаку и целям содержательные модели делятся на описательные, объяснительные и прогностические. **Описательной** моделью называется любое описание объекта. **Объяснительная** модель позволяет ответить на вопрос: почему это происходит? **Прогностическая** модель описывает будущее поведение объекта [19].

Концептуальная (содержательная) модель - это абстрактная модель, определяющая структуру моделируемой системы, свойства ее элементов и причинно-следственные связи, присущие системе и существенные для достижения цели моделирования. Иными словами, это содержательная модель, при формулировании которой используются понятия и представления предметных областей, связанных с моделью. Например, ММ формулируется на языке математики – с помощью математических структур: формул, пространственных форм и т.п. [10]

Выделяют три вида концептуальных моделей: логико-семантические, структурно-функциональные и причинно-следственные [19].

Логико-семантическая модель – описание объекта в терминах соответствующих предметных областей знаний. Анализ таких моделей осуществляется средствами логики с привлечением специальных знаний.

При построении **структурно-функциональной модели** объект рассматривается как целостная система, которую расчленяют на отдельные подсистемы или элементы. Части системы связывают структурными отношениями, описывающими подчиненность, логическую и временную последовательность решения задач.

Причинно-следственная модель служит для объяснения и прогнозирования поведения объекта. Такие модели ориентированы на следующие моменты: 1) выявление главных взаимосвязей между подсистемами; 2) выявление определенного влияния различных факторов на состояние объекта; 3) описание динамики интересующих разработчика параметров.

Формальная модель является представлением концептуальной модели с помощью формальных языков. К таким языкам относятся математический аппарат, алгоритмические языки, языки моделирования.

Построение концептуальной модели включает следующие этапы [10]:

1) определение типа системы;

2) описание внешних воздействий;

3) декомпозиция системы.

На первом этапе осуществляется сбор фактических данных (на основе работы с литературой и технической документацией, проведения натурных экспериментов, сбора экспертной информации и т. д.), а также выдвижение гипотез относительно значений параметров и переменных, для которых отсутствует возможность получения фактических данных. Если полученные результаты соответствуют принципам информационной достаточности и осуществимости, то они могут служить основой для отнесения моделируемой системы к одному из известных типов (классов).

Одним из классификационных признаков моделируемой системы является **мощность множества состояний** моделируемой системы. По этому признаку системы делят на статические и динамические. Система называется **статической**, если множество ее состояний содержит один элемент. Если состояний больше одного, или они могут изменяться во времени, система называется **динамической**. Процесс смены состояний называется **движением системы.**

Различают два основных типа динамических систем [10]:

– с дискретными состояниями (множество состояний конечно или счетно);

– с непрерывным множеством состояний.

Системы с дискретными состояниями характеризуются тем, что в любой момент времени можно однозначно определить, в каком именно состоянии находится система. Для такой идентификации обязательно нужно знать тот признак, который отличает одно состояние системы от другого. Например, при исследовании систем массового обслуживания в качестве такого признака

обычно используют число заявок в системе. Соответственно, изменение числа заявок в системе интерпретируется как переход системы в новое состояние.

Если же не удается подобрать такой признак, либо его текущее значение невозможно зафиксировать, то систему относят к классу систем **с непрерывным множеством состояний**.

Смена состояний может происходить либо в фиксированные моменты времени, множество которых дискретно (например, поступление новых заявок на обслуживание), либо непрерывно (изменение температуры тела при нагревании). В соответствии с этим различают системы **с дискретным временем переходов** (смены состояний) и системы **с непрерывным временем переходов** (точнее, «живущие» в непрерывном времени).

По условиям перехода из одного состояния в другое различают детерминированные системы и стохастические.

В **детерминированных системах** новое состояние зависит только от времени и текущего состояния системы. Другими словами, если имеются условия, определяющие переход системы в новое состояние, то для детерминированной системы можно однозначно указать, в какое именно состояние она перейдет.

Для **стохастической системы** можно указать лишь множество возможных состояний перехода и, в некоторых случаях, - вероятностные характеристики перехода в каждое из этих состояний.

Рассмотренная схема классификации систем важна не сама по себе. На этапе разработки концептуальной модели она, во-первых, позволяет уточнить цели и задачи моделирования и, во-вторых, облегчает переход к **этапу формализации модели**. Кроме того, значительно позже, на этапе оценки качества разработанной модели, знание классификационных признаков дает возможность оценить степень ее соответствия первоначальному замыслу разработчика [10].

Необходимо отметить, что рассмотренные классификационные признаки применимы и для определения типа разрабатываемой модели. При этом исследуемая система и ее модель могут относиться как к одному, так и к разным классам. Например, реальная система может быть подвержена воздействию случайных факторов и, соответственно, будет относиться к классу стохастических систем. Если разработчик модели считает, что влиянием этих факторов можно пренебречь, то создаваемая модель будет представлять собой детерминированную систему. Аналогичным образом возможно отображение системы с непрерывным временем смены состояний в модель с дискретными переходами и т. д.

Совокупность факторов, воздействующих на систему и оказывающих влияние на эффективность её функционирования, назовем внешними воздействиями (ВВ) [10].

Например, пусть оценивается производительность бортовой вычислительной системы (ВС) при управлении полетом космического корабля. В качестве параметров внешних воздействий такой ВС целесообразно рассматривать поток информации, подлежащей обработке, и поток отказов,

приводящий к нарушению вычислительного процесса. Оценки производительности ВС будут иметь смысл только в том случае, если известно, для какой рабочей нагрузки они получены. Это утверждение справедливо для любой задачи принятия решения, к какой бы предметной области она ни относилась. Нельзя говорить о прочности моста, не указывая, на какую максимальную нагрузку он рассчитан; точно так же некорректно сообщать максимальную скорость автомобиля, не уточнив, в каких условиях она была достигнута.

Описание ВВ является не только важной, но и достаточно сложной задачей. Особенно в тех случаях, когда приходится учитывать влияние случайных факторов, или когда речь идет о внешних воздействиях на проектируемую принципиально новую систему. В связи с этим введем понятие «модели внешних воздействий», подчеркивая сопоставимость уровня сложности описания собственно системы и внешних воздействий на неё.

Модель внешних воздействий должна обладать следующими основными свойствами:

– совместимостью с моделью системы;

– представительностью;

– управляемостью;

– системной независимостью.

Свойство **совместимости** предполагает, что, во-первых, степень детализации описания ВВ соответствует детализации описания системы; во-вторых, модель ВВ должна быть сформулирована в тех же категориях предметной области, что и модель системы (например, если в модели системы исследуется использование ресурсов, то должны быть выражена в запросах на ресурсы) [10].

Представительность модели ВВ определяется ее способностью адекватно представить ВВ в соответствии с целями исследования. Другими словами, модель ВВ должны отвечать целям исследования системы. Например, если оценивается пропускная способность, то должны выбираться ВВ, «насыщающие» систему. Под **управляемостью** понимается возможность изменения параметров модели ВВ в некотором диапазоне, определяемом целями исследования.

Системная независимость - это возможность переноса модели ВВ с одной системы на другую с сохранением ее представительности. Данное свойство наиболее важно при решении задач сравнения различных систем или различных модификаций одной системы. Если модель ВВ зависит от конфигурации исследуемой системы или других ее параметров, то использование такой модели для решения задачи выбора невозможно,

И, наконец, обратимся к этапу, завершающему **построение концептуальной модели** системы, - ее декомпозиции [10].

Декомпозиция системы производится исходя из выбранного уровня детализации модели, который, в свою очередь, определяется тремя факторами:

– целями моделирования;

– объемом априорной информации о системе;

– требованиями к точности и достоверности результатов моделирования.

Уровни детализации иногда называют **стратами**, а процесс выделения уровней, как уже упоминалось, - стратификацией. Детализация системы должна производиться до такого уровня, чтобы для каждого элемента были известны или могли быть получены зависимости его выходных характеристик от входных воздействий, существенные с точки зрения выбранного показателя эффективности. Повышение уровня детализации описания системы позволяет получить более точную ее модель, но усложняет процесс моделирования и ведет к росту затрат времени на его проведение. Например, если моделируется дискретная система, то увеличение детальности ее описания означает увеличение числа различных состояний системы, учитываемых в модели, и, как следствие - неизбежный рост объема вычислений. Поэтому при выборе уровня описания системы целесообразно руководствоваться следующим правилом: в модель должны войти все параметры, которые обеспечивают определение интересующих исследователя характеристик системы на заданном временном интервале ее функционирования; остальные параметры по возможности следует исключить из модели.

Приступая к разработке или исследованию системы, мы, прежде всего, накапливаем информацию о данной, или подобной ей, системе. Эта информация далее реализуется в описании системы, которое и является основой для построения её математической модели. Поэтому, прежде всего, рассмотрим **классификацию технических систем**, моделированию которых посвящено настоящее пособие. Все системы подразделяются на непрерывные и дискретные [19]. **Непрерывные системы** делятся на системы с сосредоточенными параметрами и системы с распределенными параметрами. В системах с сосредоточенными параметрами переменные зависят только от времени и не зависят от прочих координат. Для систем с распределенными параметрами переменные зависят как от времени, так и от прочих координат. В зависимости от задачи одна и та же система может рассматриваться и как система с сосредоточенными параметрами и как система с распределенными параметрами. Например, нельзя указать точные границы для тока в проводе. Что касается классов моделей, то здесь имеется четкая граница. Системы с распределенными параметрами описываются с помощью ДУ в частных производных. Система с сосредоточенными параметрами – с помощью обыкновенных ДУ.

Дискретные системы подразделяются на синхронные и асинхронные. В **синхронных** системах имеются точные метки времени, в которые происходят изменения состояния (например, тактовый генератор ПЭВМ). В **асинхронных** системах смена состояния не привязана ко времени (например, появление заявки или пакета в телекоммуникационной сети).

В общем случае система определяется множеством П признаков (особенностей), элементы $\pi_i, i = 1 \ldots k$ которого характеризуют всю совокупность её свойств: алгоритм функционирования, структуру, численные значения параметров, особенности внешней среды, вид ВВ, начальные условия,

реакцию системы и показатели качества системы [3]. Все это множество признаков и составляет **описание системы**.

Задача исследования состоит в расширении наших знаний о системе, т. е. в итоге сводится к уточнению её описания. Поэтому множество Π неизвестных на начальном этапе исследования признаков (или известных неточно), в общем случае можно представить неким потенциальным источником информации, а исследование системы, её описание, как процесс извлечения этой информации из источника.

Описание действующей системы, когда её структура неизвестна, формируется с помощью её **идентификации**, т.е. подбора аппроксимирующих соотношений с той или иной полнотой отображающих поведение наблюдаемой системы [3]. При этом единственной информацией, которой располагает исследователь, является вектор входных воздействий $\mathbf{u}$ и соответствующий ему вектор $\mathbf{y}$ реакций системы, а сама система Ψ представляется «черным ящиком». Принцип «черного ящика» может быть применен как к системе в целом, так и к отдельным её звеньям. В последнем случае система описывается совокупностью взаимодействующих «черных ящиков», каждый из которых наделен определенными функциями, которые можно выявить в процессе изучения реакций при заданных воздействиях или задать априорно.

1.5. Основные этапы математического моделирования

Первым этапом математического моделирования является **постановка задачи, определение объекта и целей исследования**, задание критериев (признаков) изучения объектов и управления ими. Неправильная или неполная постановка задачи может свести на нет результаты всех последующих этапов.

Вторым этапом моделирования является **выбор типа математической модели**, что является важнейшим моментом, определяющим направление всего исследования. Обычно последовательно строится несколько моделей. Сравнение результатов их исследования с реальностью позволяет установить наилучшую из них. На этапе выбора типа математической модели при помощи анализа данных поискового эксперимента устанавливаются: линейность или нелинейность, динамичность или статичность, стационарность или нестационарность, а также степень детерминированности исследуемого объекта или процесса.

Процесс выбора математической модели объекта заканчивается ее **предварительным контролем**, который также является первым шагом на пути к исследованию модели. При этом осуществляются следующие виды контроля (проверки): размерностей; порядков; характера зависимостей; экстремальных ситуаций; граничных условий; математической замкнутости; физического смысла; устойчивости модели [26].

Контроль **размерностей** сводится к проверке выполнения правила, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности.

Контроль **порядков** величин направлен на упрощение модели. При этом определяются порядки складываемых величин и явно малозначительные слагаемые отбрасываются.

Анализ **характера зависимостей** сводится к проверке направления и скорости изменения одних величин при изменении других. Направления и скорость, вытекающие из ММ, должны соответствовать физическому смыслу задачи.

Анализ **экстремальных ситуаций** сводится к проверке наглядного смысла решения при приближении параметров модели к нулю или бесконечности.

Контроль **граничных условий** состоит в том, что проверяется соответствие ММ граничным условиям, вытекающим из смысла задачи. При этом проверяется, действительно ли граничные условия поставлены и учтены при построении искомой функции и что эта функция на самом деле удовлетворяет таким условиям.

Анализ **математической замкнутости** сводится к проверке того, что ММ дает однозначное решение.

Анализ **физического смысла** сводится к проверке физического содержания промежуточных соотношений, используемых при построении ММ.

Проверка **устойчивости модели** состоит в проверке того, что варьирование исходных данных в рамках имеющихся данных о реальном объекте не приведет к существенному изменению решения.

1.5.1. Понятие о вычислительном эксперименте

В настоящее время основным способом исследования ММ и проверки ее качественных показателей служит вычислительный эксперимент.

Вычислительным экспериментом называется методология и технология исследований, основанные на применении прикладной математики и ЭВМ как технической базы при использовании ММ. Вычислительный эксперимент основывается на создании ММ изучаемых объектов, которые формируются с помощью некоторой особой математической структуры, способной отражать свойства объекта, проявляемые им в различных экспериментальных условиях, и включает в себя следующие этапы [26].

1. Для исследуемого объекта строится модель, обычно сначала физическая, фиксирующая разделение всех действующих в рассматриваемом явлении факторов на главные и второстепенные, которые на данном этапе исследования отбрасываются; одновременно формулируются допущения и условия применимости модели, границы, в которых будут справедливы полученные результаты; модель записывается в математических, терминах, как правило, в виде дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений; создание ММ проводится специалистами, хорошо знающими данную область естествознания или техники, а также математиками, представляющими себе возможности решения математической задачи [37].
2. Разрабатывается метод решения сформулированной математической задачи. Эта задача представляется в виде совокупности алгебраических

формул, по которым должны вестись вычисления и условия, показывающие последовательность применения этих формул; набор этих формул и условий носит название **вычислительного алгоритма**. Вычислительный эксперимент имеет многовариантный характер, так как решения поставленных задач часто зависят от многочисленных входных параметров. Тем не менее, каждый конкретный расчет в вычислительном эксперименте проводится при фиксированных значениях всех параметров. Между тем в результате такого эксперимента часто ставится задача определения оптимального набора параметров. Поэтому при создании оптимальной установки приходится проводить большое число расчетов однотипных вариантов задачи, отличающихся значением некоторых параметров. В связи с этим при организации вычислительного эксперимента можно использовать эффективные численные методы,

3. Разрабатываются алгоритм и программа решения задачи на ЭВМ. Программирование решений определяется теперь не только искусством и опытом исполнителя, а перерастает в самостоятельную науку со своими принципиальными подходами.

4. Проведение расчетов на ЭВМ. Результат получается в виде некоторой цифровой информации, которую далее необходимо будет расшифровать. Точность информации определяется при вычислительном эксперименте достоверностью модели, положенной в основу эксперимента, правильностью алгоритмов и программ (проводятся предварительные «тестовые» испытания).

5. Обработка результатов расчетов, их анализ и выводы [35]. На этом этапе могут возникнуть необходимость уточнения ММ (усложнения или, наоборот, упрощения), предложения по созданию упрощенных инженерных способов решения и формул, дающих возможности получить необходимую информацию более простым способом.

Вычислительный эксперимент приобретает исключительное значение в тех случаях, когда натурные эксперименты и построение физической модели оказываются невозможными. Особенно ярко можно проиллюстрировать значение вычислительного эксперимента при исследовании влияния городской застройки на параметры распространения радиосигнала [17]. В связи с интенсивным развитием систем мобильной связи данная задача в настоящее время является особенно актуальной. С целью снижения затрат при частотно-территориальном планировании производится оптимизация частотно-территориального плана с учетом таких факторов как рельеф местности, конфигурация городской застройки, атмосферные воздействия. Кроме этого, с учетом динамичности развития города необходимо постоянное уточнение соответствующих моделей. То, что принято называть уровнем сигнала (средняя напряженность электромагнитного поля) представляет собой результат сложного взаимодействия физических процессов, протекающих при распространении сигнала: прохождение сигнала сквозь здания и сооружения; воздействие на сигнал помех искусственного и естественного происхождения; атмосферная рефракция сигнала; отражения сигнала от зданий и от земной поверхности; потери энергии сигнала в осадках и др. В данном случае

окружающую среду можно исследовать, строя соответствующую ММ, которая должна позволять предсказывать уровень сигнала при заданной конфигурации застройки, рельефе местности, погодных условиях и т. п. Масштабы среды распространения сигнала настолько грандиозны, что эксперимент даже в одном каком-то регионе требует существенных затрат.

Таким образом, глобальный эксперимент по исследованию распространения сигнала возможен, но не натурный, а вычислительный, проводящий исследования не реальной системы (окружающей среды), а ее ММ. В науке и технике известно немало областей, в которых вычислительный эксперимент оказывается единственно возможным при исследовании сложных систем.

Пригодность ММ для решения задач исследования характеризуется тем, в какой степени она обладает так называемыми целевыми свойствами**,** основными из которых являются адекватность, устойчивость и чувствительность.

1.5.2. Оценка адекватности

В общем случае под **адекватностью** понимают степень соответствия модели тому реальному явлению или объекту, для описания которого она строится. Вместе с тем, создаваемая модель ориентирована, как правило, на исследование определенного подмножества свойств этого объекта. Поэтому можно считать, что адекватность модели определяется степенью ее соответствия не столько реальному объекту, сколько целям исследования. В наибольшей степени это утверждение справедливо относительно моделей проектируемых систем (т. е. в ситуациях, когда реальная система вообще не существует).

Тем не менее, во многих случаях полезно иметь формальное подтверждение (или обоснование) адекватности разработанной модели. Один из наиболее распространенных способов такого обоснования - использование методов математической статистики [6, 7, 39]. Суть этих методов заключается в проверке выдвинутой гипотезы (в данном случае - об адекватности модели) на основе некоторых статистических критериев. При этом следует заметить, что при проверке гипотез методами математической статистики необходимо иметь в виду, что статистические критерии не могут доказать ни одной гипотезы - они могут лишь указать на отсутствие опровержения.

Итак, каким же образом можно оценить адекватность разработанной модели реально существующей системе?

Процедура оценки основана на сравнении измерений на реальной системе и результатов экспериментов на модели и может проводиться различными способами. Наиболее распространенные из них [10, 26]:

– по средним значениям откликов модели и системы;

– по дисперсиям отклонений откликов модели от среднего значения откликов системы;

– по максимальному значению относительных отклонений откликов модели от откликов системы.

Названные способы оценки достаточно близки между собой, по сути, поэтому ограничимся рассмотрением первого из них. При этом способе проверяется гипотеза о близости среднего значения наблюдаемой переменной Y среднему значению отклика реальной системы Y^*.

В результате N_0 опытов на реальной системе получают множество значений (выборку) Y^*. Выполнив N_M экспериментов на модели, также получают множество значений наблюдаемой переменной Y.

Затем вычисляются оценки математического ожидания и дисперсии откликов модели и системы, после чего выдвигается гипотеза о близости средних значений величин Y^* и Y (в статистическом смысле). Основой для проверки гипотезы является t-статистика (распределение Стьюдента) [39]. Ее значение, вычисленное по результатам испытаний, сравнивается с критическим значением t_{kp}, взятым из справочной таблицы [7]. Если выполняется неравенство $t_n < t_{kp}$, то гипотеза принимается. Необходимо еще раз подчеркнуть, что статистические методы применимы только в том случае, если оценивается адекватность модели существующей системе. На проектируемой системе провести измерения, естественно, не представляется возможным. Единственный способ преодолеть это препятствие заключается в том, чтобы принять в качестве эталонного объекта концептуальную модель проектируемой системы. Тогда оценка адекватности программно реализованной модели заключается в проверке того, насколько корректно она отражает концептуальную модель.

1.5.3. Оценка устойчивости

При проверке адекватности модели как существующей, так и проектируемой системы реально может быть использовано лишь ограниченное подмножество всех возможных значений входных параметров (рабочей нагрузки и внешней среды). В связи с этим для обоснования достоверности получаемых результатов моделирования большое значение имеет проверка устойчивости модели [10]. В теории моделирования это понятие трактуется следующим образом.

Устойчивость модели - это ее способность сохранять адекватность при исследовании эффективности системы на всем возможном диапазоне рабочей нагрузки, а также при внесении изменений в конфигурацию системы.

Каким образом может быть оценена устойчивость модели? Универсальной процедуры проверки устойчивости модели не существует. Разработчик вынужден прибегать к методам «для данного случая», частичным тестам и здравому смыслу. Часто полезна апостериорная проверка. Она состоит в сравнении результатов моделирования и результатов измерений на системе

после внесения в нее изменений. Если результаты моделирования приемлемы, уверенность в устойчивости модели возрастает.

В общем случае можно утверждать, что чем ближе структура модели структуре системы и чем выше степень детализации, тем устойчивее модель. Устойчивость результатов моделирования может быть также оценена методами математической статистики. Здесь уместно вспомнить основную задачу математической статистики, которая заключается в том, чтобы проверить гипотезу относительно свойств некоторого множества элементов, называемого генеральной совокупностью, оценивая свойства какого-либо подмножества генеральной совокупности (то есть выборки). В генеральной совокупности исследователя обычно интересует некоторый признак, который обусловлен случайностью и может иметь качественный или количественный характер.

В данном случае именно устойчивость результатов моделирования можно рассматривать как признак, подлежащий оценке. Для проверки гипотезы об устойчивости результатов может быть использован **критерий Уилкоксона**, который служит для проверки того, относятся ли две выборки к одной и той же генеральной совокупности (т. е. обладают ли они одним и тем же статистическим признаком) [7, 39]. Например, в двух партиях некоторой продукции измеряется определенный признак и требуется проверить гипотезу о том, что этот признак имеет в обеих партиях одинаковое распределение; другими словами, необходимо убедиться, что технологический процесс от партии к партии изменяется несущественно. При статистической оценке устойчивости модели соответствующая гипотеза может быть сформулирована следующим образом: при изменении входной (рабочей) нагрузки или структуры ММ закон распределения результатов моделирования остается неизменным.

1.5.4. Оценка чувствительности

Очевидно, что устойчивость является положительным свойством модели. Однако если изменение входных воздействий или параметров модели (в некотором заданном диапазоне) не отражается на значениях выходных параметров, то польза от такой модели невелика. В связи с этим возникает задача оценивания чувствительности модели к изменению параметров рабочей нагрузки и внутренних параметров самой системы [10].

Такую оценку проводят по каждому параметру модели в отдельности. Основана она на том, что обычно диапазон возможных изменений параметра известен. Данные, полученные при оценке чувствительности модели, могут быть использованы, в частности, при планировании экспериментов: большее внимание должно уделяться тем параметрам, по которым модель является более чувствительной [42].

1.6. Заключительные замечания

Роль, которую играет математическое моделирование, безусловно, зависит от характера рассматриваемой задачи, мастерства экспериментатора, располагаемого времени и отпущенных средств, а также от выбранной модели. Необходимо постоянно иметь в виду первоначальную задачу. Самая распространенная ошибка связана с тем, что теряется из виду основная цель. Другой ошибкой является переход к моделированию при отсутствии достаточного количества данных о поведении системы в прошлом.

В работе [40] предложен основной метод последовательного решения задачи, состоящий из следующих этапов:

1) формулировка задачи;

2) накопление экспериментальных данных (в том числе, анализ возможных ошибок в системе регистрации данных, а в некоторых случаях разработка новой системы регистрации, которая будет давать соответствующие данные);

3) определение влияния рабочих параметров системы или процесса (анализ случайных колебаний процесса с целью выяснения статистической зависимости результатов от соответствующих параметров);

4) составление методики эксперимента (например, изменение параметров с целью определения фактического воздействия на результат);

5) уменьшение числа «рабочих» параметров (оставление лишь тех параметров, к изменению которых результаты наиболее чувствительны);

6) выяснение ограничений, свойственных методу.

Одной из основных ошибок при математическом моделировании является стремление к искажению реальных условий, т. е. условий, наблюдаемых в естественной или технической системе. Эти искажения часто делаются для того, чтобы воспользоваться определенной, уже созданной для другой цели моделью. Такой порядок неразумен, даже если он кажется целесообразным. В отличие от таких типовых методов, как, например, методы линейного программирования [18], математическое моделирование требует применения довольно утомительных операций, поскольку в данном случае необходимо выводить специальные математические уравнения, адекватно описывающие рассматриваемую реальную систему.

Задача экспериментатора не ограничивается построением модели. После разработки модели в нее необходимо ввести определенную информацию, чтобы проверить, насколько приближаются воспроизводимые ею данные к ранее зарегистрированным экспериментальным данным, которые соответствуют введенной информации. Лишь в том случае, когда воспроизводимые данные достаточно близки к исходной информации, можно будет гарантировать определенный успех при использовании модели для экспериментирования.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

2.1. Общая характеристика методов моделирования случайных величин

Под **моделированием случайной величины** (СВ) ξ принято понимать процесс получения на ЭВМ ее выборочных значений $\xi_1, \ldots, \xi_N$. Величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ статистически независимы и имеют одинаковое распределение вероятностей, совпадающее с распределением СВ ξ. Практически любая задача статистического моделирования содержит в качестве самостоятельного этапа получение реализаций СВ с заданными законами распределения.

Исходным материалом для формирования на ЭВМ СВ с различными законами распределения служат равномерно распределенные в интервале (0, 1) случайные числа, которые вырабатываются на ЭВМ программным датчиком случайных чисел. Программы для получения псевдослучайных величин ξ с равномерным законом распределения входят в математическое обеспечение современных ЭВМ и здесь не приводятся.

В настоящей главе рассматриваются основные методы моделирования СВ, применяемые при моделировании систем связи, такие как методы нелинейного преобразования, суперпозиции, Неймана, кусочной аппроксимации [1, 3, 4]. Рассмотрим сначала общие приемы получения СВ с заданным законом распределения из равномерно распределенных случайных чисел.

2.2. Моделирование случайных величин с негауссовским распределением

2.2.1. Метод нелинейного преобразования, обратного функции распределения

Задачи моделирования случайных процессов, имеющих место в системах передачи и обработки сигналов, часто приводят к необходимости получения СВ с негауссовским законом распределения. Наиболее эффективным аналитическим методом получения негауссовских СВ является метод монотонного нелинейного преобразования (метод обратных функций) [4].

Найдем закон распределения величины y полученной нелинейным преобразованием $y = \psi(x)$ непрерывной СВ x (рис. 2.1). Будем считать, что существует взаимно однозначное преобразование $y = \psi(x)$. Обратное преобразование обозначим $x = \psi^{-1}(y)$.

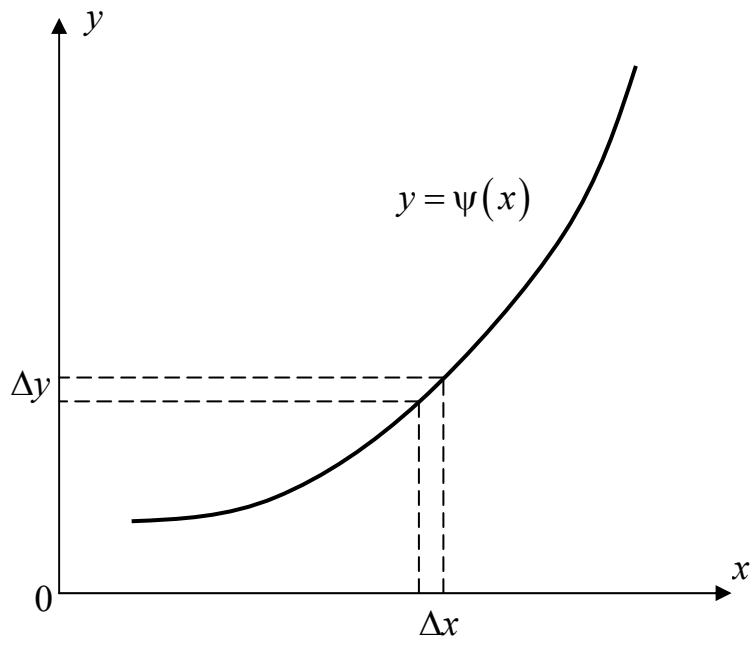


Рис. 2.1. Функциональное преобразование случайной величины

Из рис. 2.1 видно, что всегда, когда СВ x попадает в интервал $[x_0,\ x_0+\Delta x]$, СВ y попадает в интервал $[y_0,\ y_0+\Delta y]$. Поэтому выполняется равенство

$P\{x_0 < x < x_0+\Delta x\} = P\{y_0 < y < y_0+\Delta y\}$,

откуда следует, что $w(x)|\Delta x| = w(y)|\Delta y|$ и при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ получаем соотношение

$$w(y) = w(x) \Big/ \left|\frac{dy}{dx}\right| . \qquad (2.1)$$

Рассмотрим типичный пример получения СВ с заданным законом распределения из СВ с равномерным распределением. Пусть задана СВ x с равномерным законом распределения $w(x)=1,\ x\in[0,\ 1]$, необходимо получить случайное число y с заданным законом распределения $w(y)$, которому соответствует некоторое нелинейное преобразование, например, $y=x^3$. Далее по формуле (2.1) получаем плотность вероятности $w(y) = w(x) \Big/ \left|\frac{dy}{dx}\right| = 1\cdot \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$.

Теперь решим обратную задачу: найдем вид преобразования $\psi(x)$ по заданной плотности распределения $w(y) = 1\cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$, $y=\psi(x)$. Для этого проинтегрируем левую и правую части (2.1)

$$x = \int_{-\infty}^{y} w(y)\,dy = F(y) \qquad (2.2)$$

откуда находим функцию распределения $F(y)$, тогда СВ y можно найти с помощью преобразования $y=\psi(x)$.

Описанный выше метод моделирования называется **методом обратных функций**. Для моделирования СВ с заданной функцией распределения необходимо осуществить нелинейное преобразование вида

$$y=F^{-1}(x). \tag{2.3}$$

Формула (2.3) означает решение уравнения

$$F(y)=x, \quad x\sim \mathrm{Uni}[0,1], \tag{2.4}$$

где $x\sim \mathrm{Uni}[0,1]$ означает, что СВ x имеет равномерное распределение на отрезке [0, 1].

Комбинируя формулы (2.2) и (2.3), можно по реализации СВ x с произвольной функцией распределения моделировать величины с требуемой функцией распределения $F(y)$. Моделирующий алгоритм дает суперпозиция нелинейных преобразований (2.2) и (2.3):

$$y=F^{-1}\left[F(x)\right].$$

Получим с помощью метода обратных функций моделирующие алгоритмы для ряда распределений, используемых при моделировании случайных процессов и полей [4].

Рассмотрим СВ с рэлеевским законом распределения. В этом случае плотность распределения вероятностей (ПРВ), функция распределения, среднее значение и дисперсия имеют соответственно вид:

$$w(y)=\frac{y}{\sigma^2}e^{-y^2/2\sigma^2},\ F(y)=1-e^{-y^2/2\sigma^2},\ y\ge 0,$$

$$m_y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \quad \sigma_y^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2,$$

где σ — параметр рэлеевского распределения. При этом СВ y можно получить решая уравнение (2.4), откуда получаем

$$y=\sigma\sqrt{-2\ln(1-x)}=\sigma\sqrt{-2\ln x}, \tag{2.5}$$

где x - равномерно распределенная в интервале [0, 1] СВ (переход от $\ln(1-x)$ к $\ln x$ в последней формуле основан на том, что СВ $1-x$ и x имеют здесь одинаковые законы распределения).

Аналогично, для получения СВ, описывающей интервалы времени между соседними заявками, поступающими на вход телекоммуникационной системы и имеющей показательный закон распределения [6]

$$w(y)=\lambda e^{-\lambda y},\ F(y)=1-e^{-\lambda y},\ y\ge 0,$$

решая уравнение $F(y)=x$, т.е. $1-e^{-\lambda y}=x$, находим обратную функцию $y=-\frac{1}{\lambda}\ln x$. Таким образом, показательную СВ y можно сформировать из равномерной СВ x с помощью функционального преобразования $y=-\frac{1}{\lambda}\ln x$.

Путём преобразований

$$y=b\sin\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)+a,\ y=b\,\mathrm{tg}\,\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)+a \qquad (2.6)$$

можно сформировать СВ, распределенные соответственно по закону арксинуса

$$w(y)=\frac{1}{\pi b\sqrt{1-(y-a)^2/b^2}},\ F(y)=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{y-a}{b}\right)+\frac{1}{2},\ m_y=a;\ \sigma_y^2=\frac{b^2}{2}$$

и закону Коши

$$w(y)=\frac{1}{\pi b\left[1+(y-a)^2/b^2\right]},\ F(y)=\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{y-a}{b}\right)+\frac{1}{2},\ m_y=a,\ \sigma_y^2=\infty.$$

Используя свойство симметрии тригонометрических функций, нетрудно убедиться, что закон распределения СВ *y,* формируемых согласно алгоритмам (2.6), не изменится, если аргумент $\pi(x-1/2)$ у тригонометрических функций заменить аргументом $2\pi x$.

Рассмотрим СВ y, имеющую ПРВ [41]

$$w(y)=r^2y\Big/\left(1+r^2y^2\right)^{3/2},\ y\ge 0.$$

Соответствующая функция распределения

$$F(y)=\int_0^y\frac{r^2y\,dy}{\left(1+r^2y^2\right)^{3/2}}=1-\frac{1}{\sqrt{1+r^2y^2}}.$$

Уравнение (2.2) в данном случае примет вид

$$1-\frac{1}{\sqrt{1+r^2y^2}}=x_1,\ x_1\sim\mathrm{Uni}[0,1].$$

Находя отсюда y, получим

$$y=\frac{1}{r}\sqrt{1/x^2-1},$$

где $x=1-x_1\sim\mathrm{Uni}[0,1],\ r>0$.

Рассмотрим моделирование СВ с плотностью [41]

$$w(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{\alpha\sqrt{\alpha^2-y^2}},\ y\in[0,\alpha);\\ 0,\qquad\qquad y\notin[0,\alpha).\end{cases} \qquad (2.7)$$

Интегрируя формулу (2.7), получим для функции распределения выражение

$$F(y)=\frac{1}{\alpha}\int_0^y \frac{t\,dt}{\sqrt{\alpha^2-t^2}}=1-\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{\alpha}.$$

Отсюда получаем уравнение

$$1-\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{\alpha}=x_1,\quad x_1\sim \mathrm{Uni}[0,1],$$

из которого следует моделирующий алгоритм

$$y=\alpha\sqrt{1-x^2}\,.$$

К сожалению, не всегда существуют элементарные преобразования для получения СВ с заданным законом распределения из равномерно распределенных СВ. В частности, у СВ с нормальным распределением функция, обратная функции распределения, не выражается через элементарные функции. В подобных случаях для формирования СВ с заданным распределением используются различные аппроксимации функции $F^{-1}(y)$, а также другие подходы к решению задачи моделирования [3, 4, 28].

2.2.2. Метод суперпозиции

Рассмотрим дискретную СВ y, принимающую n значений a_k с вероятностями $p_1,\ldots,p_n$. Эта величина задается рядом распределения

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_n \end{pmatrix},\qquad \sum_{k=1}^{n} p_k=1.$$

Обычно используют следующий алгоритм моделирования. Отрезок $[0,1]$ разбивают на n последовательных отрезков $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$, длины которых равны соответственно вероятностям $p_1,\ldots,p_n$. Разыгрывается значение величины $x\in[0,1]$ с равномерным распределением и далее принимается

$$y=a_k,\ \text{если}\ \ x\in\Delta_k$$

Этот алгоритм применим и для дискретных СВ, принимающих бесконечное множество значений.

Для моделирования СВ с плотностью распределения вида

$$w(y)=\sum_{i=1}^{n} p_i\,w_i(y), \tag{2.8}$$

где $p_i>0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1$ удобен **метод суперпозиции** [41]. Моделирование осуществляется в два этапа. Сначала разыгрывается реализация дискретной СВ, принимающей значения $1, 2, \ldots, n$ с вероятностями p_k. После получения значения k, моделируется СВ с ПРВ $w_k(y)$. Ее значение и принимается в качестве y.

Модели вида (2.8) называются смесями распределений $w_1(y),\ldots,w_n(y)$. Описанный алгоритм по существу воспроизводит реальный физический

механизм появления смесей распределений. Сумма в формуле (2.8) может содержать большое число слагаемых.

Рассмотрим пример применения метода суперпозиции. Пусть требуется промоделировать СВ с ПРВ вида [41]

$$w(y)=\frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha^2+(y+\beta)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(y-\beta)^2}\right]. \qquad (2.9)$$

Функция (2.9) может рассматриваться как смесь двух распределений Коши, отличающихся параметрами сдвига $b=\pm\beta$. Вероятности p_i равны $p_1=p_2=0.5$. Из второй формулы (2.6) для y следует моделирующий алгоритм

$$y=\alpha\,\mathrm{tg}\left[\pi(x-1/2)\right]+x_\beta, \qquad (2.10)$$

где x, x_β - независимы; $x\sim\mathrm{Uni}[0,1]$; x_β принимает равновероятно два значения $\pm\beta$.

Рассмотрим СВ, имеющую ПРВ

$$w(y)=\frac{1}{2\alpha\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{(y+\beta)^2}{2\alpha^2}\right]+\exp\left[-\frac{(y-\beta)^2}{2\alpha^2}\right]\right\}. \qquad (2.11)$$

Распределение (2.11) есть смесь двух нормальных распределений с равными дисперсиями α^2 и средними $\pm\beta$, $p_1=p_2=0.5$. Метод суперпозиции дает следующий моделирующий алгоритм:

$$y=\alpha\xi+x_\beta.$$

Здесь $\xi\sim N(0,1)$, x_β определена в формуле (2.10) и обе величины независимы между собой.

2.2.3. Моделирование случайных величин с помощью гамма-распределения

Ряд моделирующих алгоритмов может быть получен путем сведения к типовым распределениям, отличным от равномерного и нормального закона, например, к гамма-распределению [41]. СВ x имеет гамма-распределение $x\sim\Gamma(\alpha,\beta)$ с параметрами α и β, если ее ПРВ равна

$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases} \qquad (2.12)$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$ - гамма-функция. В частности, при $\beta=1/2$, $\alpha=n/2$ распределение (2.12) сводится к $\chi_n^2=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2$, $\xi_k\sim N(0,1)$. СВ x может

быть представлена в виде $x = x_1/\beta$; $x_1 \sim \Gamma(\alpha, 1)$. ПРВ x_1 при $x > 0$ равна $w(x_1) = \dfrac{x_1^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x_1}$.

Соответствующий моделирующий алгоритм имеет вид

$$x = -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k + \ln\gamma_{n+1} \cos^2(2\pi\gamma_{n+2})}{\beta} \right), \ \alpha = n + 1/2 .$$

В частности, для целых $\alpha = n$ имеем

$$x_1 = -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \gamma_k \right), \qquad (2.13)$$

где СВ $\gamma_k \sim \mathrm{Uni}[0, 1]$ и независимы в совокупности.

Нелинейное преобразование $y = x^{\mu}$; $\mu \neq 0$; $x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ дает СВ с ПРВ вида

$$w(y) = \frac{\beta^{\alpha}}{|\mu|\Gamma(\alpha)} y^{\frac{\alpha}{\mu}-1} e^{-\beta y^{1/\mu}}, \ \ y > 0 .$$

Таблица 1.1

№ п/п	Плотность распределения	Моделирующий алгоритм
1	$\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}, \ \ y > 0$	$y = -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \dfrac{\gamma_k}{\beta} \right), \ \alpha = n, \ n \in$ $y = -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \dfrac{\gamma_k + \ln\gamma_{n+1}\cos^2(2\pi\gamma_{n+2})}{\beta} \right),$ $\alpha = n + 1/2, \ \gamma_k \sim \mathrm{Uni}[0, 1]$
2	$\dfrac{\beta^{\alpha}}{\lvert\mu\rvert\Gamma(\alpha)} y^{\frac{\alpha}{\mu}-1} e^{-\beta y^{1/\mu}}, \ \ y > 0$	$y = x^{\mu}$; $\mu \neq 0$; $x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$
3	$\dfrac{2\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{2\alpha-1} e^{-\beta y^2}$	$y = \sqrt{x}$; $\quad x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$
4	$\dfrac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \beta^{\alpha_1} \dfrac{y^{\alpha_1-1}}{(1+\beta y)^{\alpha_1+\alpha_2}}, \ y \geq 0$	$y = x_1/x_2$, $x_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1), \ \ x_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$
5	$\dfrac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\lvert\mu\rvert\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \beta^{\alpha_1} \dfrac{y^{\alpha_1/\mu-1}}{(1+\beta y^{1/\mu})^{\alpha_1+\alpha_2}}$	$y = (x_1/x_2)^{\mu}$, $x_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1), \ \ x_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$
6	$\dfrac{2\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \beta^{\alpha_1} \dfrac{y^{2\alpha_1-1}}{(1+\beta y^2)^{\alpha_1+\alpha_2}}$	$y = \sqrt{x_1/x_2}$, $x_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1), \ \ x_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$
7	$\dfrac{\Gamma(p+m)}{\Gamma(p)\Gamma(m)} y^{p-1}(1-y)^{m-1}, \ y \in (0, 1)$	$y = x_1/(x_1+x_2)$, $x_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1), \ x_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2), \ \beta > 0$

Эта формула следует из формул (2.1), (2.2) при $\psi(x)=x^{\mu}$, $\psi^{-1}(x)=x^{1/\mu}$. В частности, при $\mu=1/2$ имеем

$$w(y)=\frac{2\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{2\alpha-1}e^{-\beta y^2}. \qquad (2.14)$$

СВ y с ПРВ

$$w(y)=\frac{y}{\alpha^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\alpha^2}\right) \quad y>0,\ \alpha>0$$

имеет обобщенное распределение вида (2.14) и может быть представлена в виде $y=\alpha\sqrt{2y_1}$, $y_1\sim\Gamma(1,1)$. Отсюда и из формулы (2.13) при $n=1$ получаем известный моделирующий алгоритм для СВ с рэлеевским распределением: $y=\alpha\sqrt{-2\ln\gamma}$.

Для удобства, рассмотренные выше и другие распределения и алгоритмы, моделирующие соответствующие СВ, сведены в таблицу 1.1. Все ПРВ равны нулю при $y<0$. В таблице 1.1 первый номер имеет гамма-распределение, $x\sim\Gamma(\alpha,\beta)$, его частные случаи: при $\alpha=1$ - показательное распределение; при $\beta=1/2$ и $\alpha=n/2$ - распределение «хи-квадрат» с n степенями свободы. Распределения 2, 3 являются μ-й степенью гамма-распределения; $\mu=1/2$ - для распределения 3. Обобщенное распределение Фишера моделируется алгоритмом 4, где величины $x_i\sim\Gamma(\alpha_i,\beta_i)$ независимы. СВ с распределениями 5, 6 моделируются как μ-я степень обобщенного распределения Фишера; для ПРВ 6 $\mu=1/2$. Алгоритм 6 при $\alpha_1=1/2$, $\alpha_2=n/2$, $\beta=1/n$ позволяет получить распределение СВ $y=|t_n|$, где $t_n=\varepsilon\big/\sqrt{\chi^2/n}$ - статистика Стьюдента. СВ в 7-й строке таблицы 1.1 имеет бета-распределение, $\beta>0$ - любое число.

2.3. Некоторые специальные методы моделирования случайных величин

Для моделирования СВ с заданным законом распределения можно использовать и другие свойства преобразований случайных чисел [4]. Например, путем суммирования большого числа (12) случайных чисел x_i с равномерным законом распределения в интервале (0, 1) можно получить СВ y, ПРВ которой близка к нормальной ПРВ $N(0, 1)$:

$$y=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}x_i-6.$$

Известно также, что распределение произведения двух независимых СВ, одна из которых имеет рэлеевское распределение, а другая распределена по закону арксинуса (2.6) с нулевым средним значением и дисперсией, равной 1/2, является нормальным. Это позволяет формировать нормальную СВ путем

следующего преобразования системы двух независимых равномерно распределенных в интервале (0, 1) случайных чисел x_1 и x_2:

$$y = \sigma\sqrt{-2\ln x_1}\sin\left(2\pi x_2\right). \qquad (2.15)$$

Параметры получаемой этим способом нормальной СВ будут (0, σ^2). Из этих же чисел можно получить еще одну нормальную СВ

$$y^* = \sigma\sqrt{-2\ln x_1}\cos\left(2\pi x_2\right),$$

некоррелированную (а значит и независимую) с СВ y.

Для моделирования СВ с некоторыми законами распределения иногда удобно использовать преобразования нормально распределенных случайных чисел. Например, СВ с рэлеевским и показательным законами распределения можно получить путем преобразования системы двух независимых нормальных случайных чисел x_1 и x_2 с параметрами (0, σ^2) в виде

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ , \quad y = x_1^2 + x_2^2 \qquad (2.16)$$

соответственно. При этом для рэлеевского распределения параметр σ будет совпадать с параметром σ исходного нормального распределения, а для показательного распределения параметр λ связан с параметром σ исходного нормального распределения соотношением $\lambda = 0.5\sigma^2$.

Алгоритмы $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $y = x_1^2 + x_2^2$ основаны на известных свойствах преобразований нормальных СВ. Немного изменив эти алгоритмы, можно моделировать СВ с другими распространенными законами распределения. Полагая

$$y = \sqrt{\left(x_1 + a\right)^2 + x_2^2} \ \text{ или } \ y = \sum_{k=1}^{m} x_k^2, \qquad (2.16)$$

получим соответственно СВ с законом распределения Райса [4, 16]

$$w\left(y\right) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2+a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{ay}{\sigma^2}\right), \ \ y \geq 0,$$

и СВ с законом распределения χ^2 с m степенями свободы

$$w\left(y\right) = \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)\sigma^2}\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, \ y \geq 0,$$

где $I_0\left(x\right)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; $\Gamma\left(x\right)$- гамма-функция.

2.3.1. Метод Неймана

Для моделирования СВ, возможные значения которых не выходят за пределы некоторого ограниченного интервала $\left(a, b\right)$, а также СВ, законы распределения которых можно аппроксимировать усеченными, достаточно универсальным является метод Неймана, состоящий в следующем [4].

С помощью датчика равномерно распределённых в интервале $(0, 1)$ случайных чисел независимо выбираются пары чисел ${}^k x_1$, ${}^k x_2$. Из них формируются преобразованные пары

$$ {}^k x_1^* = a + {}^k x_1 \left(b - a\right), \quad {}^k x_2^* = w_M \, {}^k x_2 ,$$

где (a, b) - интервал возможных значений СВ y с заданной ПРВ $w(y)$; w_M - максимальное значение ПРВ $w(y)$. В качестве реализации СВ берется число ${}^k x_2^*$ из тех пар $\left({}^k x_1^*, {}^k x_2^*\right)$, для которых выполняется неравенство ${}^k x_2^* \le w\left({}^k x_1^*\right)$.

Пары, не удовлетворяющие этому неравенству, отбрасываются. Можно легко убедиться в справедливости такого метода моделирования СВ. Действительно, пары случайных чисел $\left({}^k x_1^*, {}^k x_2^*\right)$ можно рассматривать как координаты случайных точек плоскости, равномерно распределенных вдоль осей y и $w(y)$ внутри прямоугольника $aa'b'b$ (рис. 2.2).

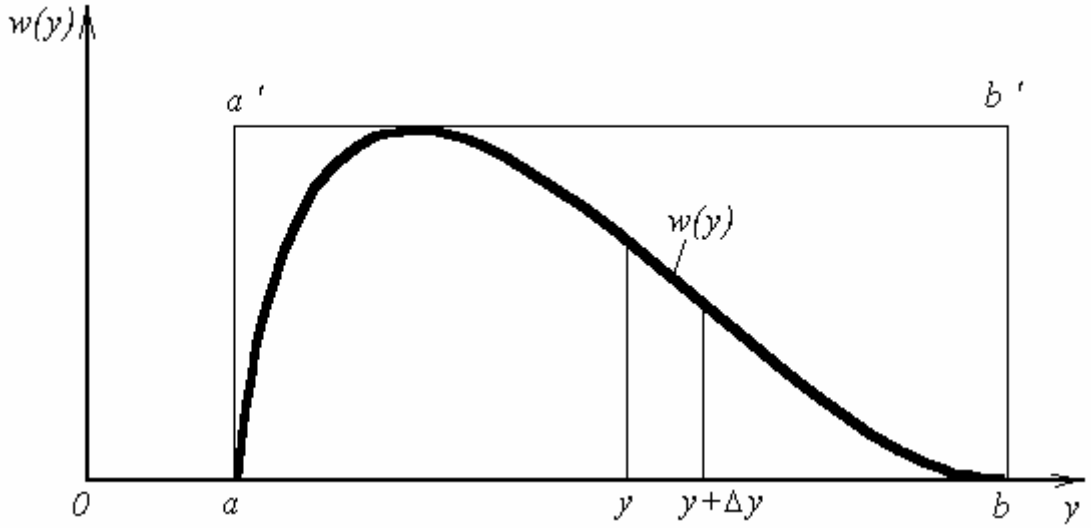


Рис. 2.2. Усеченная кривая плотности вероятности

Пары $\left({}^k x_1^*, {}^k x_2^*\right)$, удовлетворяющие условию неравенства, представляют собой координаты случайных точек плоскости, равномерно распределенных вдоль осей y и $w(y)$ внутри той части прямоугольника $aa'b'b$, которая расположена под кривой $w(y)$. Вероятность того, что случайная точка плоскости, находящаяся под кривой $w(y)$, окажется в элементарной полосе с основанием $(y, y + \Delta y)$ пропорциональна $w(y)$, а вероятность попадания точки под кривую $w(y)$ по условию равна единице, что и требуется.

2.3.2. Метод кусочной аппроксимации

Существуют различные приближенные приемы моделирования СВ: численное решение уравнения $x = F(y)$ относительно y при использовании метода нелинейного преобразования, обратного функции распределения; замена непрерывных распределений соответствующими дискретными распределениями, для которых можно указать достаточно простые моделирующие алгоритмы и другие приёмы. Среди них универсальным и наиболее простым является метод кусочной аппроксимации [4].

Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть требуется получить СВ y с функцией плотности $w(y)$. Предположим, что область возможных значений СВ y ограничена интервалом (a, b) (неограниченное распределение можно приближенно заменить ограниченным). Разобьем интервал (a, b) на n достаточно малых интервалов (a_m, a_{m+1}), $m = 0, \ldots, n-1$, $a_0 = a$, $a_n = b$, так, чтобы распределение заданной СВ в пределах этих интервалов можно было довольно точно аппроксимировать каким-нибудь простым распределением (рис. 2.3), например, равномерным, трапецеидальным и т. д. В дальнейшем рассмотрим кусочную аппроксимацию равномерным распределением.

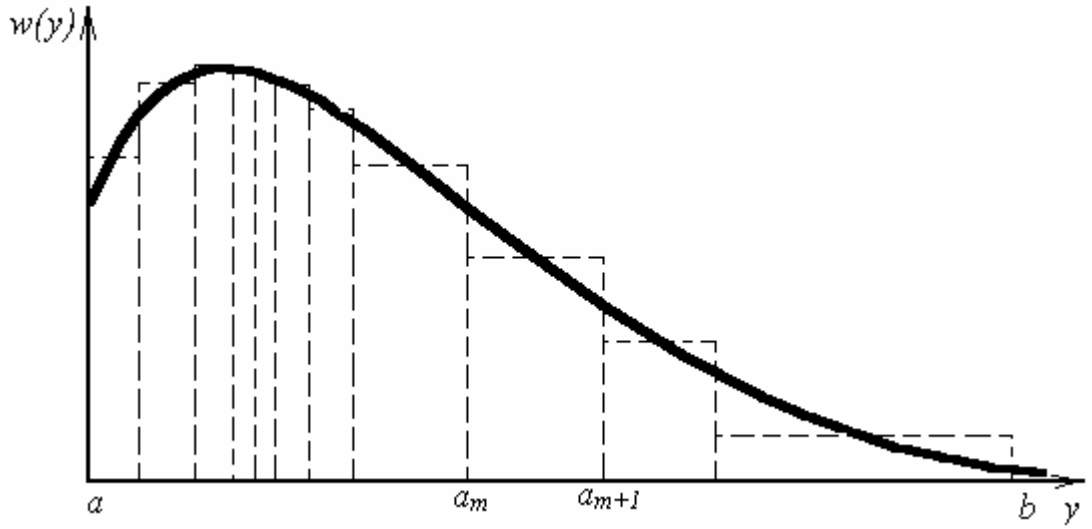


Рис. 2.3. Кусочная аппроксимация кривой плотности вероятности

Пусть P_m - вероятность попадания СВ y в каждый из интервалов (a_m, a_{m+1}). Получать реализации величины y с кусочно-равномерным распределением можно, очевидно, в соответствии со следующей схемой преобразования случайных чисел: 1) случайным образом с вероятностью P_m выбирается интервал (a_m, a_{m+1}); 2) формируется реализация ${}^k\Delta y_m$ СВ, равномерно распределенной в интервале $(0,\ a_{m+1} - a_m)$; 3) искомая реализация ${}^k y$ получается по формуле

$$ {}^k y = a_m + {}^k\Delta y_m .$$

Случайный выбор интервала (a_m, a_{m+1}) с вероятностью P_m означает, по существу, моделирование дискретной СВ, принимающей n значений a_m, $m = 0, \ldots, n-1$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$, с вероятностью P_m каждое, что можно сделать достаточно просто. Интервал $(0,1)$ разбивается на n интервалов (x_m, x_{m+1}), $m = 0, \ldots, n-1$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$, длиной $(x_{m+1} - x_m) = P_m$ каждый. Из датчика случайных, равномерно распределенных в интервале $(0,1)$ чисел выбирается некоторая реализация ${}^k x$. Путем последовательного сравнения ${}^k x$ с x_m определяется тот интервал (x_m, x_{m+1}), в котором находится ${}^k x$.

В основу этого процесса положен очевидный факт: вероятность попадания равномерно распределенной в интервале $(0,1)$ СВ в некоторый подынтервал (x_m, x_{m+1}) равна длине этого подынтервала. Рассмотренный выше процесс представляет интерес не только как составной элемент метода кусочной аппроксимации, он широко используется в качестве алгоритма для моделирования дискретных СВ и случайных событий.

Для моделирования СВ методом кусочной аппроксимации наиболее удобно при машинной реализации выбирать вероятности попадания во все интервалы (a_m, a_{m+1}) одинаковыми $P_m = 1/n$, а число n таким, что $n = 2^N$, где N - целое число, меньше или равное количеству двоичных разрядов чисел, вырабатываемых датчиком случайных чисел. В этом случае величины a_m должны быть выбраны таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{a_m}^{a_{m+1}} w(y)\,dy = \frac{1}{n} = 2^{-N}.$$

При равенстве вероятностей P_m для случайного выбора индекса m можно использовать первые N разрядов числа, извлекаемого из датчика равномерно распределенных случайных чисел.

Используя рассмотренный прием, приходим к следующему способу преобразования равномерно распределенных случайных чисел в случайные числа с заданным законом распределения. Из датчика равномерно распределенных в интервале $(0,1)$ случайных чисел извлекается пара реализаций ${}^k x_1$, ${}^k x_2$. Первые $N = \log_2 n$ разрядов числа ${}^k x_1$ используются для нахождения адресов ячеек, в которых хранятся величины a_m и a_{m+1}, а затем по формуле ${}^k y = a_m + {}^k x_2 (a_{m+1} - a_m)$ получается реализация ${}^k y$ СВ y с заданным законом распределения. Такой алгоритм является довольно экономичным по количеству требуемых операций, которое не зависит от числа n, т. е. не зависит от точности кусочной аппроксимации. Однако с увеличением точности аппроксимации возрастает количество ячеек памяти, требуемое для хранения величин a_m, $m = 0, \ldots, n$, что является недостатком рассмотренного метода при больших значениях n.

2.4. Моделирование векторных случайных величин

Рассмотрим моделирование непрерывной векторной СВ $\boldsymbol{\xi} = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\right)^T$. Ее полное описание задается совместной ПРВ $w(\mathbf{x}) = w\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$, $\mathbf{x} = \left(x_1, \ldots, x_m\right)^T \in R^m$, где T - символ транспонирования.

Стандартный метод моделирования векторных СВ основан на представлении $w(\mathbf{x})$ в виде произведения [41]

$$w(\mathbf{x}) = w_1\left(x_1\right) w_2\left(x_2 \middle| x_1\right) \ldots w_m\left(x_m \middle| x_1, \ldots, x_{m-1}\right) \tag{2.17}$$

частной (маргинальной) ПРВ величины ξ_1 и условных ПРВ ξ_k при условии, что $\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_{k-1} = x_{k-1}$. Из формулы (2.17) следует, что вектор $\boldsymbol{\xi}$, может моделироваться покомпонентно: сначала величина ξ_1 с ПРВ $\varphi_1(x) = w_1(x)$, далее - ξ_2 по ПРВ $\varphi_2(x) = w_2\left(x \middle| \xi_1\right)$, потом - ξ_3 как величина с ПРВ $\varphi_3(x) = w_3\left(x \middle| \xi_1, \xi_2\right)$ и т. д. Последней моделируется m-я компонента ξ_m, имеющая ПРВ $\varphi_m(x) = w_m\left(x \middle| \xi_1, \ldots, \xi_m\right)$. Стандартный метод требует определенной вычислительной работы, связанной с нахождением условных и частных ПРВ компонент. После вычисления ПРВ каждая компонента моделируется как скалярная величина методами, изложенными выше.

Рассмотрим подробнее процесс моделирования многомерного нормального распределения. Случайный вектор $\boldsymbol{\xi} = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\right)^T$ имеет невырожденное m-мерное нормальное распределение, если его ПРВ имеет вид

$$w(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-m/2} \left(\det R\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T R^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right], \tag{2.18}$$

где $\boldsymbol{\mu} = \left(\mu_1, \ldots, \mu_m\right)^T$ - математическое ожидание $\boldsymbol{\xi}$; $R = \left[\rho_{ij}\right]$ - заданная симметрическая положительно определенная $m \times m$-матрица; $(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T R^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$ - квадратичная форма переменных $\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}$ с матрицей $B = R^{-1}$. Матрица $R = M\left[(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\mu})^T\right]$ является ковариационной матрицей вектора $\boldsymbol{\xi}$; обратная ей матрица B часто называется матрицей точности. Распределение (2.18) полностью описывается двумя параметрами: вектором $\boldsymbol{\mu}$ и матрицей R. Далее используется краткое обозначение $\boldsymbol{\xi} \sim N(\boldsymbol{\mu}, R)$.

Если математическое ожидание равно нулю, а корреляционная матрица R равна единичной матрице I, т. е. $\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{0}, I)$, то распределение называется **стандартным нормальным распределением**. Стандартное распределение легко моделируется. Для этого нужно положить все компоненты $\boldsymbol{\xi}$ равными независимым реализациям СВ $\xi \sim N(0, 1)$.

В общем случае распределение (2.18) моделируется с помощью линейного преобразования $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{0}, I)$. Здесь $m \times m$-матрица $A = \left[a_{ij} \right]$ определяется разложением ковариационной матрицы R в произведение двух треугольных матриц

$$R = AA^T. \tag{2.19}$$

В уравнении (2.19) будем считать A нижней треугольной матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}.$$

В этом случае явный вид коэффициентов a_{ij} определяют следующие уравнения [1, 41]:

$$a_{11} = \sqrt{\rho_{11}}, \quad a_{k1} = \rho_{k1} / a_{11}, \quad k = 2, \dots, m, \tag{2.20}$$

$$a_{kl} = \frac{\rho_{k1} - \sum_{j=1}^{l} a_{kj} a_{ij}}{a_{ll}}, \quad l = 2, \dots, k-1, \tag{2.21}$$

$$a_{kk} = \sqrt{\rho_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}^2}. \tag{2.22}$$

После определения a_{11} вычисление элементов A осуществляется по строкам: сначала по формуле (2.20) вычисляется первый элемент a_{k1} k-й строки, далее по формуле (2.21) находятся последующие элементы $a_{k2}, \dots, a_{k,k-1}$. Диагональный элемент вычисляется с помощью уравнения (2.22). После вычисления диагонального элемента осуществляется переход на следующую, $(k+1)$-ю строку.

Плохая обусловленность (вырожденность) матрицы A требует проверки на каждой строке условия $a_{kk} < \varepsilon_*$, $k = 2, \dots, m$, означающего линейную зависимость k-й компоненты вектора $\boldsymbol{\xi}$. Здесь ε_* - малое число. Если это условие выполняется, то нужно положить $a_{kk} = 0$, длина k-й строки $L(k)$ совпадает с длиной предыдущей. Индекс l принимает значения $2, 3, \dots, L(k)$ его предельное значение $L(k)$ - переменно. Число $L(k)$ является счетчиком числа линейно независимых элементов последовательности $\xi_1, \dots, \xi_k$. Присвоение $L(k)$ последующего значения $L(k+1) = L(k) + 1$ осуществляется лишь при условии $a_{kk} > \varepsilon_*$. После расчета последней m-й строки значение $L(m)$ равно рангу матрицы R.

2.5. Заключительные замечания

Существует довольно большое количество методов моделирования СВ [1, 3, 4, 13, 28]. В данном разделе были изложены некоторые из них. При этом преследовалась цель привести примеры алгоритмов для моделирования СВ с распространенными законами распределения. Рассмотрим краткую сравнительную характеристику различных методов моделирования СВ и некоторые рекомендации для выбора того или иного подхода для решения конкретных задач.

В тех случаях, когда требуется высокая точность воспроизведения законов распределения СВ, целесообразно использовать методы моделирования, не обладающие методической погрешностью. К ним относятся описанные в пп. 2.2, 2.3 алгоритмы получения СВ (2.5), (2.6), (2.15), (2.16). Погрешностью таких алгоритмов часто можно пренебречь, так как она определяется лишь погрешностью выполнения на ЭВМ необходимых нелинейных преобразований и отклонением закона распределения исходных случайных чисел от равномерного. Примером систем, при моделировании которых может потребоваться высокая точность воспроизведения законов распределения СВ, являются системы приёма цифровых радиосигналов с низкой вероятностью ошибки (порядка 10^{-4}. . . 10^{-6}).

Другим достоинством указанных алгоритмов является простота подготовительной работы, так как преобразования равномерного закона в требуемый закон распределения даются в виде готовых аналитических зависимостей. Такие алгоритмы, кроме того, позволяют легко изменять форму закона распределения в процессе моделирования СВ. Например, изменение ПРВ семейства Райса, сводится к изменению по соответствующему закону только параметров a и σ в алгоритме (2.16).

Основным недостатком этих алгоритмов является сравнительно низкое быстродействие, так как выполнение на ЭВМ нелинейных преобразований часто требует довольно большого количества элементарных операций.

В задачах, не предъявляющих высоких требований к качеству СВ, для сокращения количества элементарных операций рекомендуется использовать более экономичные приближённые методы (п. 2.3).

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайная величина позволяет представить поведение изменяющегося случайным образом сигнала в определенный момент времени. Однако при проектировании целого ряда систем связи важно учитывать изменение случайных сигналов не только по уровню, но и во времени. В качестве моделей случайных сигналов и помех, позволяющих отразить их динамические характеристики, используются **случайные процессы** (СП), представляющие собой случайные функции времени. При этом конкретный вид, который принимает СП в отдельном эксперименте, называется **реализацией** СП [4, 6].

3.1. Моделирование марковских случайных процессов

Во многих радиотехнических приложениях СВ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ связаны со значениями непрерывного процесса $x(t)$ в моменты времени t_1, t_2, ... , t_n, т. е. $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2), \ldots, x_n = x(t_n)$. В этом случае упорядоченная система непрерывных СВ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (рис. 3.1) называется **случайной последовательностью**, которую можно также интерпретировать как реализацию СП в данном опыте [5].

Простейшее вероятностное описание СП соответствует независимым СВ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тогда совместная ПРВ $w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} w(x_i)$. Однако последовательность независимых СВ представляет собой ММ довольно узкого класса реальных процессов. Действительно, с помощью СП с независимыми значениями невозможно дать описание «гладких», коррелированных помех или медленно изменяющихся параметров полезных сигналов, например, координат радиолокационных целей. Поэтому во многих задачах необходимо использовать модели СП с зависимыми значениями. В общем случае совместная ПРВ таких СП определяется по формуле

$$w\ (x_1, x_2, ..., x_n) = w(x_1)\ \ w(x_2/x_1)\ \ w(x_3/x_1, x_2)\ \ ...\ \ w(x_n/x_1, x_2, ..., x_{n-1}).$$

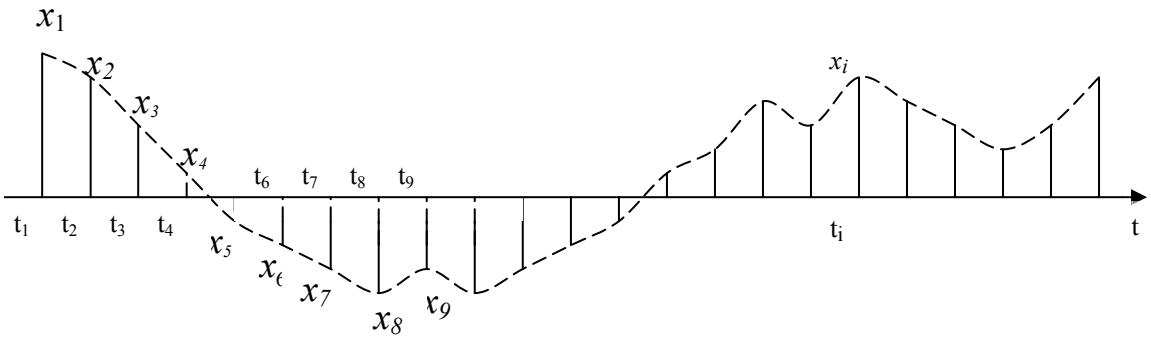


Рис. 3.1. Случайная последовательность

Математические трудности применения этой формулы для вероятностных расчетов быстро нарастают с увеличением n. В связи с этим необходимо из всех возможных СП с зависимыми значениями выделить класс СП, имеющих

относительно простое математическое описание. Очевидно, наиболее простые соотношения для ПРВ получатся, если положить

$$w\left(x_i / x_1, x_2, ..., x_{i-1}\right) = w\left(x_i / x_{i-1}\right). \qquad (3.1)$$

Это равенство означает, что условная ПРВ и, следовательно, любые другие вероятностные характеристики СП для момента времени t_i являются функциями только значения x_{i-1}, принятого СП в предшествующий момент времени. Случайные последовательности, удовлетворяющие (3.1), называются **марковскими** по имени русского математика А.А. Маркова, разработавшего основы теории таких СП. Марковская последовательность называется **однородной**, если условные ПРВ $w\left(x_i / x_{i-1}\right)$, называемые ПРВ перехода, не зависят от i. Марковская последовательность называется **стационарной**, если она однородна и все состояния x_i имеют одну и ту же безусловную ПРВ $w(x)$. При моделировании марковских СП для формирования на ЭВМ случайных чисел с заданным законом распределения могут быть использованы методы, рассмотренные выше.

В более общем случае рассматриваются N-связные марковские процессы, т. е. N взаимосвязанных между собой процессов $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, в совокупности обладающих марковскими свойствами [1, 4, 11]. Эти процессы характеризуются условной ПРВ перехода, которая имеет вид:

$$w\left(x_{1,n}, \ldots, x_{N,n}, t_n \mid x_{1,n-1}, \ldots, x_{N,n-1}, t_{n-1}\right) =$$
$$= w_0\left(x_{1,n}, \ldots, x_{N,n}, x_{1,n-1}, \ldots, x_{N,n-1}, t_n, t_{n-1}\right).$$

Моделирование N-связных марковских процессов по заданной условной ПРВ перехода в принципе не отличается от моделирования рассмотренных выше одномерных (простейших) марковских процессов, однако получение N-связных дискретных реализаций с ростом N усложняется.

Другим обобщением одномерных марковских процессов являются одномерные марковские процессы N-го порядка, отличающиеся от простейших марковских процессов тем, что ПРВ перехода в очередное состояние зависит не от одного, а от N предшествующих состояний. Стохастическое уравнение $x_i = \varphi\left(x_{i-N}, x_{i-N+1}, \ldots, x_{i-2}, x_{i-1}, \xi_i\right)$ при соответствующих начальных условиях порождает **марковский процесс N-го порядка**, который можно рассматривать как компоненту N-связного марковского процесса, поэтому моделирование марковских процессов N-го порядка может быть сведено к моделированию N-связных марковских процессов.

Выше шла речь о моделировании марковских процессов общего вида: на характеристики процессов не накладывалось других ограничений, кроме указанных выше. Распространенными являются марковские процессы, которые удовлетворяют дополнительным условиям, чаще всего, условию нормальности распределения, стационарности (однородности), а также условию нормальности и стационарности одновременно. В этих случаях моделирование марковских процессов упрощается.

Действительно, у стационарных марковских СП ПРВ перехода вида

$$w\left(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}, \ldots, x_1, t_1\right) = w\left(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}\right) = w_0\left(x_n,\, x_{n-1},\, t_n,\, t_{n-1}\right),$$

$$w\left(x_{1,n}, \ldots, x_{N,n}, t_n \mid x_{1,n-1}, \ldots, x_{N,n-1},\, t_{n-1}\right) =$$

$$= w_0\left(x_{1,n}, \ldots, x_{N,n}, x_{1,n-1}, \ldots, x_{N,n-1},\, t_n,\, t_{n-1}\right)$$

зависит лишь от разности $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$. Это упрощает процесс моделирования (в особенности для одномерных марковских процессов), так как уменьшается число аргументов функции $w_0\left(x_n,\, x_{n-1},\, t_n,\, t_{n-1}\right)$, которую требуется хранить в памяти ЭВМ при моделировании.

Как уже отмечалось, наиболее полное описание стационарных СП дает многомерная ПРВ. Однако этот подход требует большого количества информации. Для описания негауссовских СП используются различные преобразования гауссовских процессов и марковские процессы. Реальные СП можно с требуемой точностью аппроксимировать многомерными марковскими процессами [44]. Действительно [1, 38], любой СП, спектральная плотность которого является дробно-рациональной функцией частоты, является компонентой многомерного марковского процесса.

3.2. Разностные и дифференциальные стохастические уравнения

Одним из достоинств марковских процессов является возможность их описания с помощью **стохастических ДУ**. Для этого вводится понятие формирующей динамической системы. При этом СП характеризуется параметрами линейных или нелинейных фильтров, на вход которых подается белый гауссовский шум или другое известное возмущение [32]. Так как любая динамическая система может быть описана ДУ, то и СП на ее выходе так же может быть описан стохастическим ДУ соответствующего порядка.

Модели СП в виде стохастических ДУ обладают рядом положительных свойств. Прежде всего, в отличие от других методов описания СП (например, с помощью ПРВ или моментных функций), они непосредственно определяют способ генерации его реализаций, для осуществления которого можно вполне успешно использовать аналоговые вычислительные устройства или соответствующие программы для ЭВМ. Использование стохастических ДУ в форме уравнений состояния позволяют синтезировать алгоритмы оптимальной обработки и генерации для широкого класса сигналов и помех [16, 32, 44].

Для большинства реальных СП используется модель в виде ДУ, линейных относительно входных воздействий типа белого шума

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = f\left(\overline{x}, t\right) + v\left(\overline{x}, t\right)\overline{\xi}\left(t\right),$$

где $f(\overline{x},t)$ - векторная и $v(\overline{x},t)$ - матричная функции векторного аргумента [16, 44]; $\overline{\xi}(t)$ - белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и заданной корреляционной функцией (КФ). Задавая различные функции $f(\overline{x},t)$ и $v(\overline{x},t)$ в уравнении (3.2), можно получить СП с различными статистическими характеристиками. Так, если $f(\overline{x},t)$ – линейная функция, а $v(\overline{x},t)$ не зависит от $\overline{x}(t)$, то уравнение (3.2) будет определять гауссовский СП. В работах [16, 38] приведены связи между функциями $f(\overline{x},t)$, $v(\overline{x},t)$ и соответствующими статистическими характеристиками (ПРВ, КФ).

Следует отметить, что задача синтеза марковской модели СП, т. е. определение функций $f(\overline{x},t)$ и $v(\overline{x},t)$ по заданным статистическим характеристикам, не всегда имеет одно решение. Здесь возникает вопрос о единственности решения. Если заданы статистические характеристики моделируемого процесса в форме функций распределения, то можно указать несколько уравнений различных типов, порождающих процессы с такими характеристиками. В случае нелинейных моделей это является неизбежным следствием ограниченности исходных сведений о процессе. Если единственное решение задачи синтеза отсутствует, то при выборе уравнения, которое будет заложено в основу функционирования какого-либо устройства, можно учитывать соображения сложности, экономичности и так далее. На практике число эквивалентных, с точки зрения статистических характеристик, уравнений обычно не велико (не более трех, четырех), и из них всегда можно выбрать единственное [32].

В последнее время, в связи с широким использованием цифровых устройств в радиотехнических системах для статистического описания сигналов и помех используют случайные последовательности, которые могут быть заданы **разностными стохастическими уравнениями**

$$\overline{x}_i = \varphi(\overline{x}_{i-1}, i) + v(\overline{x}_{i-1}, i-1)\overline{\xi}_i,\ i = 2, 3, \ldots, k, \qquad (3.3)$$

где $\overline{x}_i$ - состояние системы в момент времени t_i; $\varphi(\overline{x}_{i-1}, i)$ - векторная функция; $v(\overline{x}_{i-1}, i-1)$ - матричная функция; $\overline{\xi}_i$ – последовательность СВ [32, 33]. Если в качестве возбуждающей последовательности $\overline{\xi}_i$ использовать дискретный белый шум, то уравнение (3.3) будет определять марковскую последовательность.

При использовании стохастических уравнений (3.1), (3.3) в качестве моделей случайных сигналов и помех возникают задачи анализа и синтеза [38]. Первая из них заключается в определении статистических характеристик (в первую очередь ПРВ и КФ) СП или случайной последовательности по заданным функциям f, v и φ. Более сложной задачей синтеза является определение неизвестных функций f, v и φ по заданным статистическим характеристикам.

Для непрерывных СП обе эти задачи решены для достаточно большого числа частных случаев [8, 16, 23]. При этом анализ выполняется на основе решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова [44].

Для случайных последовательностей эти задачи до конца решены лишь для случая линейной функции $\varphi(\overline{x}_{i-1},i)$ и независящей от $\overline{x}_{i-1}$ функции v [5]. Кроме того, в работах [32, 38, 44] рассмотрено решение задачи синтеза и для нелинейной функции. Однако при этом накладываются ограничения на вид ПРВ. Отсутствие конструктивных решений задачи синтеза, применительно к разностному уравнению (3.3), не позволяет получить ММ случайных последовательностей с заданными статистическими свойствами.

3.3. Нелинейные модели марковских случайных процессов

В данном разделе рассматривается задача построения стохастических моделей негауссовских СП с заданной ПРВ. Возможность достаточно простого определения нелинейных функций $f(\overline{x},t)$ и $v(\overline{x},t)$ для стохастических уравнений (3.2) обусловлена существованием обыкновенного ДУ, связывающего эти функции с ПРВ $w(x)$ при $t\to\infty$. При этом задача нахождения нелинейных функций $f(\overline{x},t)$ и $v(\overline{x},t)$ наиболее проста если ПРВ $w(x)$ входит в класс распределения Пирсона [44]. Вместе с тем, для стохастических разностных уравнений (3.3) лишь для линейных систем может быть точно определено безусловное распределение.

В работах [16, 38] подробно исследованы стохастические ДУ, определяющие различные негауссовские процессы. Запишем векторное стохастическое ДУ, описывающее непрерывную динамическую систему

$$d\overline{x}(t)=f(\overline{x},t)dt+\nu(\overline{x},t)\sqrt{N_\xi(t)}\,d\chi(t), \tag{3.4}$$

где $N_\xi(t)$ - диагональная матрица с неотрицательными элементами, $\chi(t)$ - стандартный винеровский процесс с $M\{d\chi(t)d\chi^T(t)\}=E\,dt$; E - единичная диагональная матрица. При этом стационарная ПРВ будет:

1) рэлеевской $w(x)=\dfrac{x}{\sigma^2}exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right),\ x>0,\ \sigma^2=-\dfrac{N_\xi}{2a}$,

если $\dfrac{dx}{dt}=ax+\dfrac{N_\xi}{2x}+\xi(t)$;

(3.5)

2) Накагами $w(x)=\dfrac{2}{\Gamma(m)}\left(\dfrac{m}{a}\right)^m x^{2m-1}\exp\left(-\dfrac{mx^2}{a}\right),\ x>0,\ a>0,\ m\ge 0.5$,

когда $\frac{dx}{dt} = -N_\xi \left(2m\left(\frac{x^2}{a} + 1 \right) - 1 \right) x^{1-4m} + \sqrt{2} x^{1-2m} \xi(t);$

(3.6)

3) логарифмически-нормальной

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{\ln^2(x/m)}{2\sigma^2} \right),\ x > 0,\ \sigma^2 = \frac{aN_\xi}{2}$$

при $\frac{dx}{dt} = -ax\left(\ln(x/m) - \sigma^2 \right) + ax\xi(t).$

(3.7)

Стохастические ДУ (3.4)-(3.7) исследованы наиболее полно, дают адекватное описание СП во многих радиотехнических системах и позволяют получить замкнутые выражения для алгоритмов оценивания сигналов. Однако системы, базирующиеся непосредственно на таких уравнениях, как правило, не могут быть реализованы и исследованы из-за отсутствия необходимых стабильных нелинейных элементов аналоговой техники. В связи с этим на практике осуществляется переход от непрерывных к дискретным во времени системам на основе различных разностных схем [32, 33]. Для обеспечения соответствия разностной схемы и уравнений вида (3.3), (3.4) от ЭВМ требуется высокое быстродействие и большая точность представления чисел.

Стохастические разностные уравнения (3.3) свободны от этого недостатка, так как представляют последовательность чисел, для формирования которой можно воспользоваться методами цифровой техники. Поэтому в задачах с нелинейными моделями наблюдений, но при гауссовских компонентах, системы с дискретным временем имеют очевидные преимущества при технической реализации. Вместе с тем, при отличии ПРВ случайных последовательностей (3.3) от гауссовских возникает задача определения нелинейных функций $\varphi(\overline{x}_{i-1}, i)$ и $\nu(\overline{x}_{i-1}, i-1)$ по заданным распределениям.

В ряде задач желательно построить (синтезировать) нелинейное уравнение (3.3) на основе априорных данных о виде безусловного одномерного распределения. К сожалению, такого же простого пути, какой существует для построения моделей (3.5)-(3.7), здесь нет. В работе [15] синтез марковской модели приводится не на основе априорных статистических характеристик СП, а на экспериментальных данных. При этом решение получено лишь для ограниченного класса линейных функций $\varphi(\overline{x}_{i-1}, i)$, $\nu(\overline{x}_{i-1}, i-1)$. Полученные модели марковских СП используются для решения задач прогноза.

Рассмотрим асимптотический подход для решения поставленной задачи, основанный на предположении о существовании предельного стохастического ДУ Ито [16, 38]

$$dx(t) = f(x,t)dt + \nu(x,t)\sqrt{N_\xi(t)}\, d\chi(t) \qquad (3.8)$$

для заданного разностного стохастического уравнения (3.3), записанного в виде

$$x_i - x_{i-1} = \varphi(x_{i-1}, i) + \nu(x_{i-1}, i-1)\sqrt{V_\xi}\,\xi_i, \tag{3.9}$$

где $M\{\xi_i\} = 0$; $M\{\xi_i^2\} = 1$.

Будем связывать значения x_{i-1} и x_i с моментами времени $t_{i-1} = t$ и $t_i = t + \Delta t$. При условии существования предельных соотношений для детерминированных функций

$$\frac{\varphi(x(t), t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = f(x(t), t) + O(\Delta t), \quad \frac{V_\xi(t+\Delta t)}{\Delta t} = N_\xi(t) + O(\Delta t),$$

перепишем (3.9) в форме, позволяющей найти характеристики приращений $x_i - x_{i-1}$:

$$x_i - x_{i-1} = f_g(x, \tau)\tau + \nu_{i-1}(x)\sqrt{V_x(t)\tau}\cdot\xi_i,$$

где $$f_g(x, \tau) = \frac{(\varphi(x(t), t+\Delta t) - x(t))V_x(t)}{V_\xi(t+\Delta t)}, \qquad V_x(t) = M\{x^2(t)\},$$

$\tau = \dfrac{V_\xi(t+\Delta t)}{V_x(t)}$, $\nu_{i-1}(x) = \nu(x_{i-1}, i-1)$, ξ_i – независимые СВ, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

3.3.1. Моделирование случайных последовательностей с ПРВ семейства распределений Пирсона

Каждому конкретному распределению из семейства распределений Пирсона, которое описывается с помощью ДУ

$$\frac{d\ln w(x)}{dx} = \frac{a_1 x + a_0}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \tag{3.10}$$

соответствует свой набор коэффициентов a_0, a_1, b_0, b_1, b_2. Значит, задавая конкретное распределение, мы тем самым задаем и коэффициенты.

В качестве примера рассмотрим гамма-распределение, для которого ПРВ запишется в виде [44]

$$w(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, \ \alpha > -1, \ \beta > 1, \tag{3.11}$$

где α и β - параметры распределения, $\Gamma(\bullet)$ - гамма-функция [7]. Вычисляя производную в (3.11), получим

$$\frac{d\ln w(x)}{dx} = \frac{\alpha\beta - x}{\beta x} \tag{3.12}$$

Сравнивая (3.11) и (3.10), найдем $a_0 = \alpha\beta$, $a_1 = -1$, $b_1 = \beta$, $b_0 = b_2 = 0$.

Рекуррентное разностное уравнение запишется в следующем виде [44]

$$x_k = x_{k-1} + \frac{V_x \Delta t}{2}\left[\beta(\alpha + 1) - x_{k-1}\right] + \sqrt{\beta x_{k-1}\Delta t}\,\xi_k \tag{3.13}$$

Учитывая слагаемые более высокого порядка малости, вместо (3.13) получим

$$x_k = x_{k-1} + \frac{V_x \Delta t}{2}\left[\beta(\alpha+1) - x_{k-1}\right] + \sqrt{\Delta t\left[\beta x_{k-1} - \frac{\Delta t \beta^2(1+\alpha)}{4}\right]}\xi_k . \qquad (3.14)$$

Для конкретных значений α и β величина V_x может быть выражена через них, т.е. $V_x = (\alpha+1)\beta^2$ и уравнение (3.13) будет содержать только один параметр Δt.

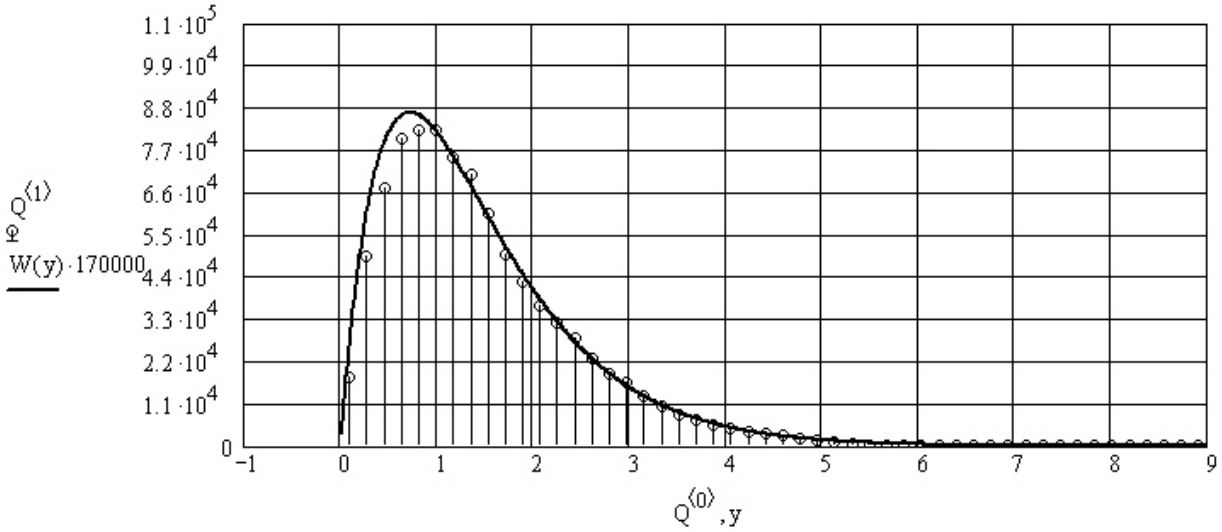


Рис. 3.2. График теоретической ПРВ (сплошная линия) и ПРВ, полученной с помощью алгоритма (3.14) при Δt =0.001

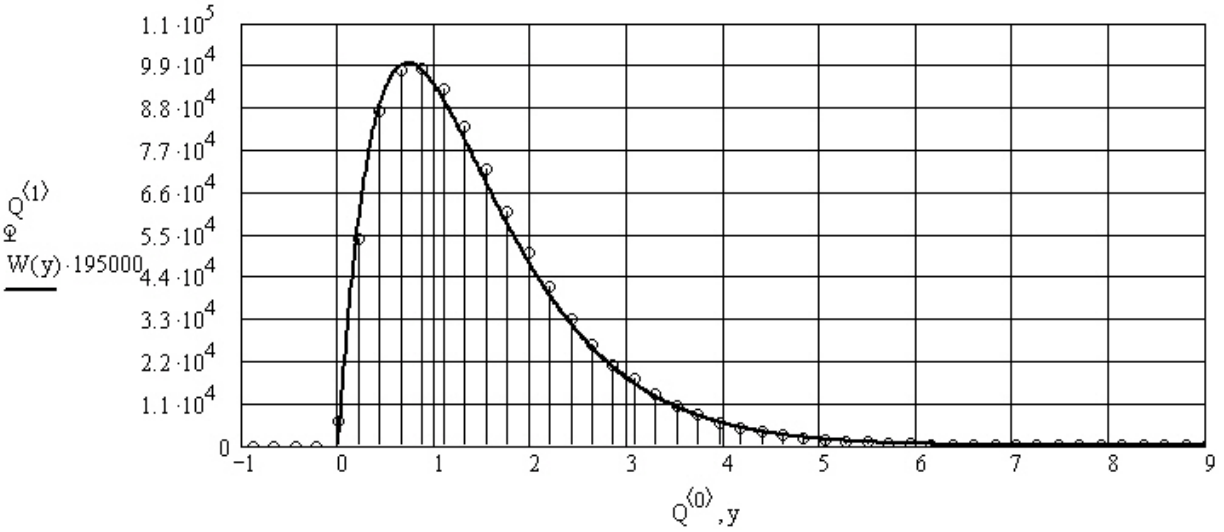


Рис. 3.3. График теоретической ПРВ (сплошная линия) и ПРВ, полученной с помощью алгоритма (3.14) при Δt =0.003

Для экспериментальной проверки степени совпадения ПРВ последовательности (3.14) с гамма-распределением было проведено статистическое моделирование синтезированного алгоритма. На рис. 3.2 и 3.3 представлены теоретическое распределение и распределения, полученные в результате моделирования. Весь диапазон изменения x_k был разбит на 100

одинаковых интервалов. Экспериментальные распределения получены на основе независимой выборки объемом 100000. Проведена проверка гипотез о принадлежности экспериментальных распределений гамма-распределению с помощью критерия χ^2. Для заданного числа интервалов (100) и выбранного уровня значимости ($\alpha = 0.005$) критическое значение χ^2=140. При значениях Δt<0.003 все статистики χ^2 оказались меньше критического значения. Значит гипотеза о том, что алгоритм (3.14) дают случайные последовательности с гамма–распределением принимаются. При Δt>0.003 некоторые реализации (3.14) приводили к неустойчивости. Для устранения этого явления, по всей видимости, необходимо использовать приближения более высокого порядка. Динамическая система, описываемая разностным уравнением (3.14), является нелинейной. Поэтому провести более подробный анализ устойчивости этих алгоритмов не представляется возможным.

3.3.2. Моделирование случайных последовательностей с распределением Накагами

Распределение Накагами часто используется для описания амплитудных замираний радиосигнала, прошедшего через турбулентную среду. ПРВ Накагами записывается следующим образом:

$$w(x) = \frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{a}\right)^m x^{2m-1}\exp\left(-\frac{mx^2}{a}\right),\ \ x>0,\ \ a>0,\ \ m\geq 0.5,$$

где $\Gamma(m)$ - гамма-функция.

Нелинейное стохастическое ДУ, описывающее СП с ПРВ Накагами имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -N_\xi\left(2m\left(\frac{x^2}{a}+1\right)-1\right)x^{1-4m} + \sqrt{2}x^{1-2m}\xi(t).$$

В работе [44] получен рекуррентный для моделирования случайных последовательностей с ПРВ Накагами (при $m = 0.5$)

$$x_k = x_{k-1} - N_\xi\Delta t\left(2m\left(\frac{x_{k-1}^2}{a}+1\right)-1\right)x_{k-1}^{1-4m} + \sqrt{2}x_{k-1}^{1-2m}\sqrt{\Delta t}\xi_k. \qquad (3.15)$$

Для проверки степени совпадения ПРВ последовательности (3.15) с распределением Накагами было проведено статистическое моделирование синтезированного алгоритма [16, 44]. При моделировании случайной последовательности с помощью алгоритма (3.15) удовлетворительные результаты были получены только для следующих значений коэффициентов: $m = 0.5$, $N_\xi = 1$, $a = 1$. Попытка моделирования при Δt>0.5 оказалась неудачной, динамическая система при любом выборе коэффициентов a, N_ξ

оказывалась неустойчивой. Полученные распределения значительно отличались от теоретической ПРВ. При получении случайных последовательностей с ПРВ Накагами с помощью алгоритма (3.15) можно изменить способ определения коэффициентов a и N_ξ.

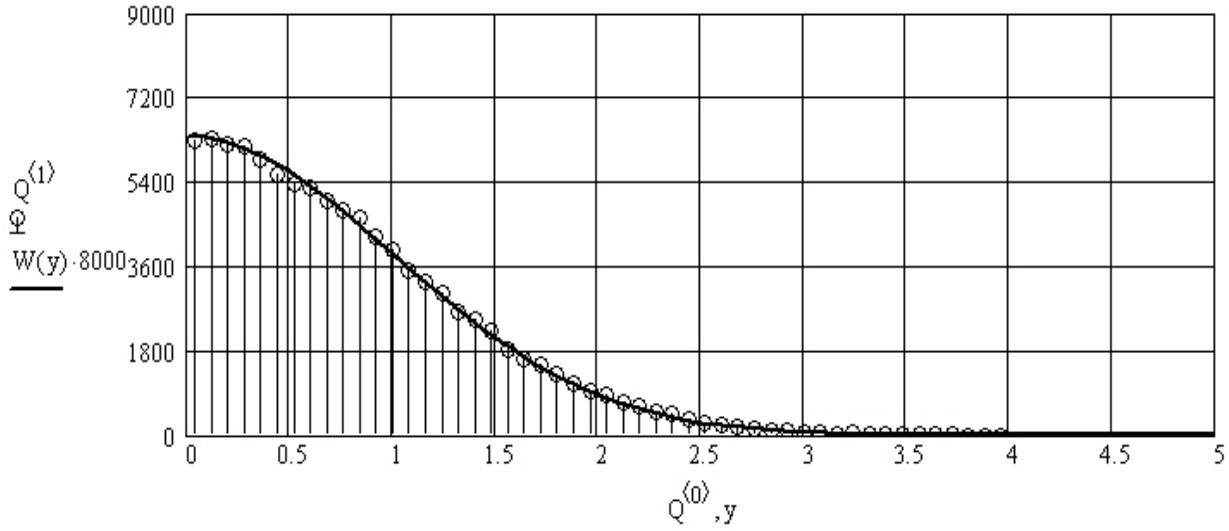


Рис. 3.4. График теоретической ПРВ (сплошная линия) и ПРВ, полученной с помощью алгоритма (3.15) при Δt=0.001

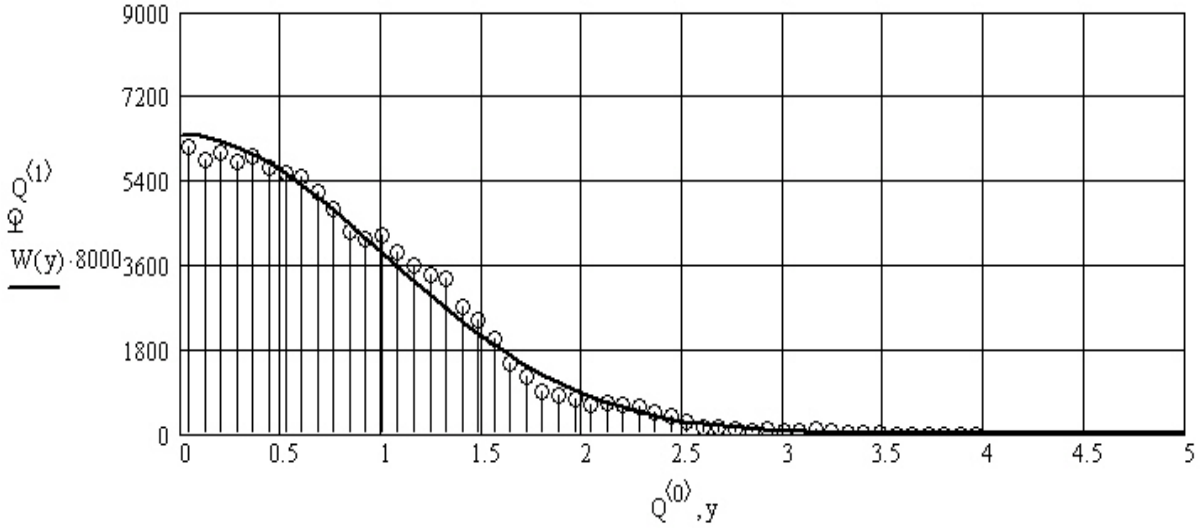


Рис. 3.5. График теоретической ПРВ (сплошная линия) и ПРВ, полученной с помощью алгоритма (3.15) при Δt=0.003

На рис. 3.4 и 3.5 представлены теоретическое распределение и распределения, полученные в результате моделирования. Весь диапазон изменения x_k был разбит на 100 одинаковых интервалов. Экспериментальные распределения получены на основе независимой выборки объемом 100000. Проведена проверка гипотез о принадлежности экспериментальных распределений семейству распределений Накагами с помощью критерия χ^2. Для заданного числа интервалов (100) и выбранного уровня значимости ($\alpha = 0.005$) критическое значение χ^2=140. При значениях Δt<0.003 все

статистики χ^2 оказались меньше критического значения. Значит гипотеза о том, что алгоритм (3.15) дает случайные последовательности с распределением Накагами при $m = 0.5$ принимаются. При $\Delta t > 0.003$ некоторые реализации (3.15) приводили к неустойчивости. Для устранения этого явления, по всей видимости, необходимо использовать приближения более высокого порядка.

3.4. Модели случайных процессов в виде временных рядов

3.4.1. Авторегрессионные модели случайных последовательностей

Пусть последовательность СВ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$x_i = \varphi\left(x_{i-1}, \xi_i\right), \quad i = 1, 2, \ . \ . \ . , \tag{3.16}$$

с начальным условием $x_0 = \varphi_0(\xi_0)$, где φ и φ_0 – некоторые функции; $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$ – заданная последовательность независимых СВ, называемая **порождающей** или **возмущающей последовательностью**. Уравнение (3.16) представляет собой простейшую **авторегрессионную модель** СП $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ [20].

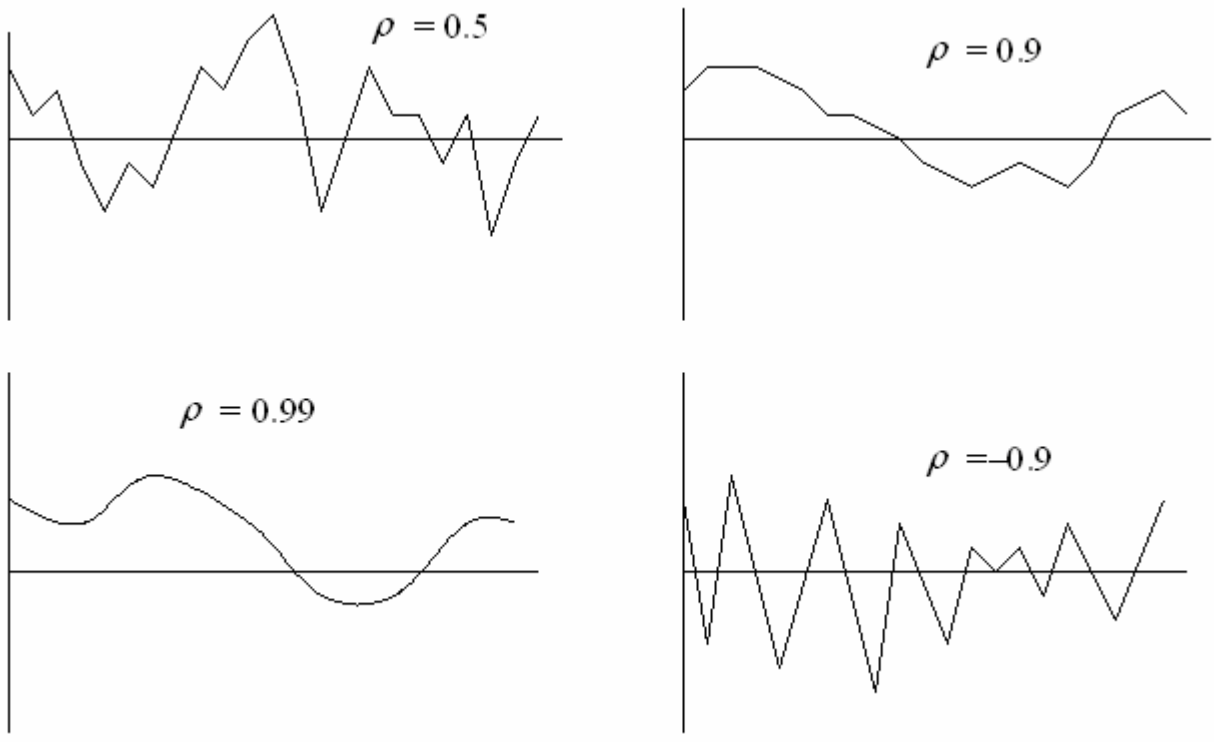


Рис. 3.6. Процессы авторегрессии первого порядка

В качестве возмущающей последовательности чаще всего используется последовательность стандартных независимых гауссовских СВ. В случае линейности функции φ процесс X также будет гауссовским, а при

соответствующем выборе нелинейных функций и негауссовских возмущений можно получить широкий класс негауссовских процессов [4, 28].

Примером марковской СП может быть **процесс авторегрессии 1-го порядка**, полученный с помощью линейного преобразования последовательности $\xi_1,\xi_2,...,\xi_i,...$ независимых гауссовских СВ $\{\xi_i\}$ по следующему правилу:

$$x_i = \rho x_{i-1} + \xi_i, \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{3.17}$$

где $|\rho| < 1$; $M\{\xi_i\} = 0$; $M\{\xi_i^2\} = \sigma_\xi^2$. Каждое очередное значение x_i содержит часть предыдущего ρx_{i-1} и добавку в виде независимой СВ ξ_i [2, 5].

На рис. 3.6 представлены типичные графики реализаций такого процесса при различных значениях параметра ρ, входящего в модель (3.17). Во всех случаях параметр σ, влияющий только на масштаб по оси ординат, выбран равным единице. Из этих рисунков видно, что при ρ, близких к единице, процесс становится более гладким; при малых ρ, напротив, значения процесса слабо зависимы между собой; при отрицательных ρ корреляция между соседними значениями процесса отрицательна, поэтому он часто меняет знак.

При выборе начального значения x_1, обеспечивающего стационарность и постоянство дисперсии $M\{x_i^2\} = \sigma_x^2$, параметр ρ равен коэффициенту корреляции между любыми двумя соседними значениями СП. Действительно, умножая левую и правую часть (3.17) на x_{i-1} и находя математическое ожидание, получим $M\{x_i x_{i-1}\} = \rho\sigma_x^2$ или $\rho = M\{x_i x_{i-1}\}/\sigma_x^2$.

Повторяя аналогичные операции после подстановки в уравнение (3.17) $x_{i-1} = \rho x_{i-2} + \xi_{i-1}$, $x_{i-2} = \rho x_{i-3} + \xi_{i-2} \ldots$, можно записать следующую формулу для КФ:

$$R_x(k) = M\{x_i \quad x_{i-k}\}/\sigma_x^2 = \rho^{|k|} = e^{-\alpha|k|},$$

где $\alpha = -\ln\rho$; $\sigma_x^2 = \sigma_\xi^2/(1-\rho^2)$.

Таким образом, СП (3.1) имеет экспоненциальную КФ. В то же время СП (3.17) является марковской, поскольку любые вероятностные характеристики значения x_i полностью определяются только предшествующим значением СП x_{i-1}. При заданном x_{i-1} формула (3.17) позволяет найти все характеристики x_i без учета предыстории, т. е. значений x_1, x_2, ... ,x_{i-2} СП. Так, условная ПРВ

$$w(x_i/x_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}(x_i - \rho x_{i-1})^2\right)$$

может быть получена из ПРВ $w(\xi_i) = \left(1/\sqrt{2\pi}\sigma_\xi\right)$ exp $\left(-\xi_i^2/2\sigma_\xi^2\right)$ с учетом связи $\xi_i = x_i - \rho x_{i-1}$ и правил нахождения ПРВ функций СВ. Легко записать выражение и для совместного распределения произвольного числа n членов рассмотренной марковской СП:

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w(x_1)\prod_{i=2}^{n} w(x_i/x_{i-1}) = w(x_1)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}\sum_{i=2}^{n}(x_i - \rho\, x_{i-1})^2\right). \quad (3.19)$$

Поскольку вид всех ПРВ перехода (3.18) не зависит от номера члена СП, то уравнение (3.17) представляет однородную марковскую СП. Для стационарности необходимо выбрать СВ x_1 таким образом, чтобы все безусловные ПРВ $w(x_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ были одинаковыми. Проведенный анализ (3.17) показывает, что в стационарном случае все члены $\{x_i\}$ последовательности имеют нулевое среднее и дисперсию $\sigma_x^2 = \sigma_\xi^2/(1-\rho^2)$. Кроме того, СП $\{x_i\}$ гауссовская, так как получена в результате линейного преобразования (1.42) гауссовских СВ $\{\xi_i\}$. Таким образом, ПРВ всех значений стационарной последовательности (3.17) будут иметь следующий вид: $w(x_i) = \left(1/\sqrt{2\pi}\sigma_x\right)\exp\left(-x_i^2/2\sigma_x^2\right)$, $i = 1, 2, ..., n$. При этом начальное значение x_1 формируется как нормальная СВ с нулевым средним и дисперсией $\sigma_x^{\,2}$, а последующие члены последовательности образуются в соответствии с рекуррентным соотношением (3.17).

Уравнения вида (3.17), которые часто называются **уравнениями авторегрессии** или стохастическими разностными уравнениями, представляют весьма узкий класс гауссовских марковских СП с экспоненциальной КФ. Вместе с тем имеются различные возможности для существенного расширения этого класса [2, 5, 20]. Одной из них является описание СП с помощью авторегрессионных (АР) уравнений более высокого порядка:

$$x_i = \rho_1\, x_{i-1} + \rho_2\, x_{i-2} + \ldots + \rho_m\, x_{i-m} + \xi_i\ , \quad i = 2, 3, \ldots, n, \quad (3.20)$$

где m – порядок авторегрессии. С помощью подбора коэффициентов $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ можно получить гауссовские СП x_i, $i = 1, 2, ..., n$, с разнообразными корреляционными свойствами [2]. Действительно, умножая (3.19) на x_{i-k} и находя математические ожидания, получим после деления на $\sigma_x^2 = M\{x_i^2\}$, $i = 1, 2, ..., n$, следующее соотношение для значений КФ:

$$R_x(k) = \rho_1 R_x(k-1) + \rho_2 R_x(k-2) + ... + \rho_m R_x(k-m), \ k > 0 \quad (3.21)$$

Общее решение этого разностного уравнения в стационарном случае представляется суммой экспонент [33]:

$$R_x(k) = A_1 e^{\alpha_1 |k|} + A_2 e^{\alpha_2 |k|} + \ldots + A_m e^{\alpha_m |k|},$$

где $\alpha_v = \ln z_v$; z_v, $v = 1, 2, \ldots, m$, - корни характеристического уравнения $z^m - \rho_1 z^{m-1} - \rho_2 z^{m-2} - \ldots - \rho_m = 0$. Требование стационарности СП (3.20) выполняется, если $\alpha_v < 0$, т.е. когда все корни z_v, $v = 1, 2, \ldots, m$ характеристического уравнения лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости.

Подставляя в (3.21) значения $k = 1, 2, ..., m$ получим известную систему уравнений Юла-Уокера [2, 5]:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\rho_1 & + & \rho_2 R_x(1) & + & \ldots & + & \rho_m R_x(m-1) & = & R_x(1), \\
\rho_1 R_x(1) & + & \rho_2 & + & \ldots & + & \rho_m R_x(m-2) & = & R_x(2), \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\rho_1 R_x(m-1) & + & \rho_2 R_x(m-2) & + & \ldots & + & \rho_m & = & R_x(m).
\end{array}
$$

Решение этой системы позволяет найти коэффициенты $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_m$ уравнения авторегрессии (3.20) по заданным или оцененным на основе эксперимента значениям $R_x(1),\ R_x(2),\ \ldots,\ R_x(m)$ КФ СП.

В качестве примера рассмотрим процесс авторегрессии второго порядка: $x_i = \rho_1 x_{i-1} + \rho_2 x_{i-2} + \xi_i,\quad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Для стационарности процесса необходимо, чтобы корни характеристического уравнения $z^2 - \rho_1 z - \rho_2 = 0$ лежали внутри единичного круга, т. е. чтобы параметры ρ_1 и ρ_2 находились в треугольной области, показанной на рис. 3.7 [2, 5].

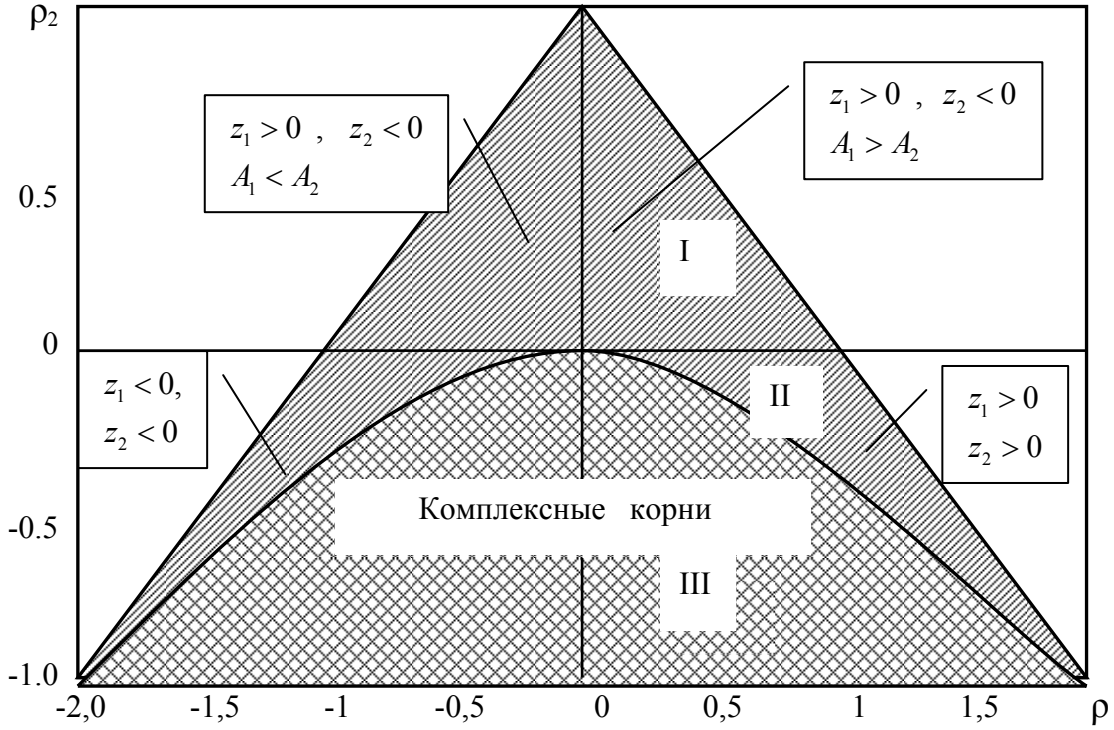


Рис. 3.7. Область значений коэффициентов ρ_1 и ρ_2 стационарного СП

Значения КФ стационарной СП связаны между собой рекуррентным соотношением $R_x(k) = \rho_1 R_x(k-1) + \rho_2 R_x(k-2)$, $k > 0$, с начальными условиями $R_x(0) = 1$ и $R_x(1) = \rho_1 / (1 - \rho_2)$. Из этого соотношения следует, что

$$R_x(k) = A_1 z_1^{|k|} + A_2 z_2^{|k|} = A_1 e^{\alpha_1 |k|} + A_2 e^{\alpha_2 |k|},$$

где $\alpha_1 = \ln z_1$, $\alpha_2 = \ln z_2$; z_1 и z_2 - корни $(z_1 \neq z_2)$ характеристического уравнения; $A_1 = \dfrac{z_1 (1 - z_2^2)}{(z_1 - z_2)(1 + z_1 z_2)}$; $A_2 = 1 - A_1$. Дисперсия СП находится по формуле: $\sigma_x^2 = \sigma_\xi^2 / (1 - \rho_1 R_x(1) - \rho_2 R_x(2))$. Система двух уравнений Юла-

Уокера $\rho_1 + \rho_2 R_x(1) = R_x(1)$, $\rho_1 R_x(1) + \rho_2 = R_x(2)$ позволяет определить коэффициенты ρ_1 и ρ_2 уравнения авторегрессии по заданным или измеренным значениям $R_x(1)$ и $R_x(2)$ КФ.

Вид КФ определяется областью треугольника допустимых значений коэффициентов ρ_1 и ρ_2, (рис. 3.7). Если $\rho_1^2 + 4\rho_2 \geq 0$, корни характеристического уравнения действительны и КФ представляет сумму двух затухающих экспонент. При $\rho_1 > 0,\ \rho_2 > 0$ (область I на рис. 3.7) корни имеют разные знаки: $z_1 > 0,\ z_2 < 0$. Отрицательному корню соответствует осциллирующее слагаемое $A_2 z_2^{|k|} = A_2 (-1)^{|k|} |z_2|^{|k|}\ A_2 \gamma_2^{-|k|} = A_2 (-1)^{|k|} |\gamma_2|^{-|k|}$. Однако в области I коэффициент $A_1 > A_2$ и КФ $R_x(k)$ не изменяет знака. Во второй области, показанной на рис. 3.7, оба корня положительны и КФ монотонно убывает. На одной границе области II $(\rho_2 = 0)$ авторегрессия имеет первый порядок и $R_x(k) = \rho_1^{|k|}$.

На другой границе, где $\rho_1^2 + 4\rho_2 = 0$ характеристическое уравнение имеет кратный корень $z_1 = z_2 = \rho_1/2$. В этом случае выражение для КФ запишется в таком виде: $R_x(k) = (1 + A|k|)(\rho_1/2)^{|k|}$, где $A = (1 - \rho_1^2/4)/(1 + \rho_1^2/4)$. В третьей области рис. 3.7 корни характеристического уравнения комплексные и КФ определяется по следующей формуле: $R_x(k) = A_0\, d^{|k|} \sin(\omega_0 |k| + \varphi)$, где $d = \sqrt{-\rho_2}$; $\omega_0 = \arccos(\rho_1/2d)$, $A_0 = 1/\sin\varphi$; $\operatorname{tg}\varphi = \left((1 + d^2)/(1 - d^2)\right)\operatorname{tg}\omega_0$. При этом графики КФ имеют вид синусоиды с экспоненциальным уменьшением амплитуды.

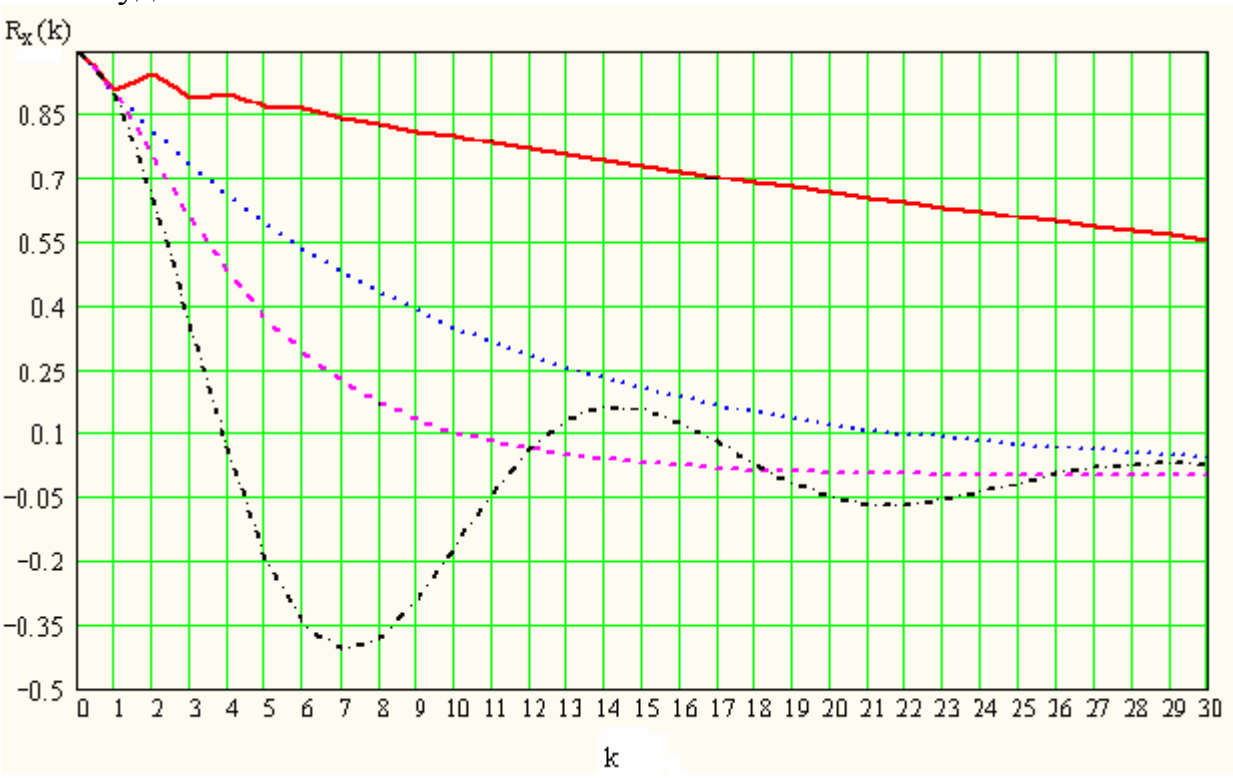


Рис. 3.8. Корреляционные функции при $R_x(1)=0.9$

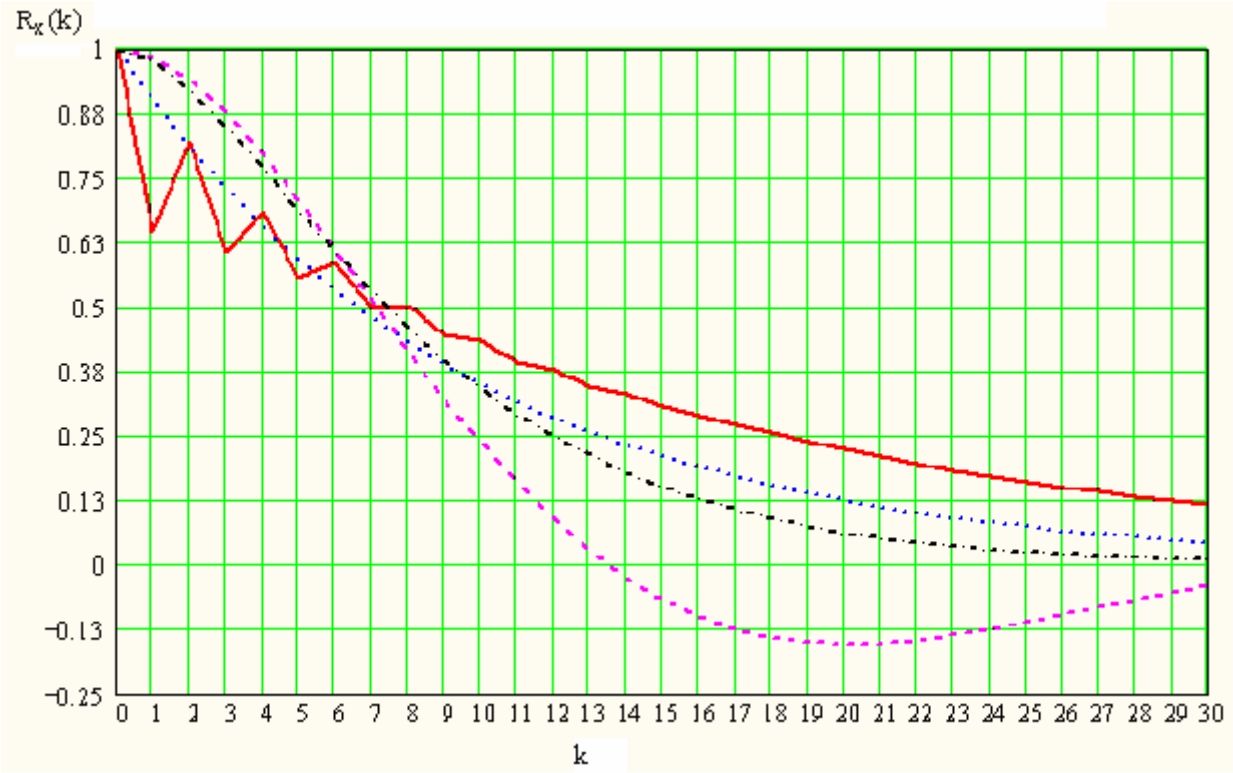


Рис. 3.9. Корреляционные функции при $R_x(7)=0.5$

Для иллюстрации рассмотренных ситуаций на рис. 3.8 и рис. 3.9 представлены зависимости КФ $R_x(k)$ при различных значениях параметров ρ_1 и ρ_2 АР уравнения. При построении зависимостей КФ на рис. 3.8 коэффициенты $(\rho_1,\ \rho_2)$ подбирались из различных областей треугольнике допустимых значений (рис. 3.7), но с учетом дополнительного условия $R_x(1)=M\{x_i x_{i-1}\}=0{,}9$. Для всех КФ, представленных на рис. 3.9, таким дополнительным условием является один и тот же интервал корреляции $k_0=7$ на уровне $0{,}5$, т.е. $R_x(k=7)=0{,}5$ [5].

3.4.2. Модели авторегрессии-скользящего среднего

Стохастический линейный процесс можно представить как выходной сигнал линейного фильтра, на вход которого поступает белый шум ξ_i (рис. 3.10)

$$x_i=\xi_i+\psi_1\xi_{i-1}+\psi_2\xi_{i-2}+\ldots=\xi_i+\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j\xi_{i-j}=\psi(B)\xi_i, \qquad (3.22)$$

где $\psi(B)=1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\ldots$ - линейный оператор, называемый **передаточной функцией** фильтра [2].

Последовательность $\psi_1, \psi_2, \ldots$, образованная весами, теоретически может быть конечной или бесконечной. Если эта последовательность (конечная или

бесконечная) сходящаяся, фильтр называется устойчивым, а процесс x_i будет стационарным.

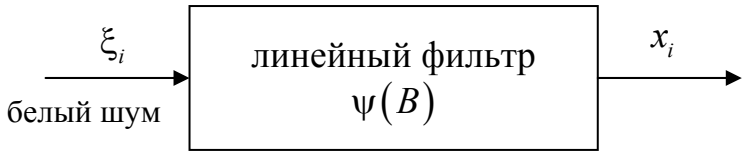


Рис. 3.10. Представление временного ряда с помощью линейного фильтра

Модель авторегрессии (3.20) выражает отсчет x_i процесса в виде конечной взвешенной суммы n предыдущих отсчетов процесса $x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots, x_{i-n}$ плюс случайный отсчет ξ_i. Другой тип моделей, имеющий большое значение в описании СП, – это так называемый **процесс скользящего среднего**. Пусть x_i линейно зависит от конечного числа m предыдущих отсчетов ξ:

$$x_i = \xi_i - \theta_1 \xi_{i-1} - \theta_2 \xi_{i-2} - \ldots - \theta_m \xi_{i-m} . \qquad (3.23)$$

Такой процесс называется процессом скользящего среднего порядка m. Заметим, что веса $1, -\theta_1, -\theta_2, \ldots, -\theta_m$, на которые умножаются ξ, не обязаны давать в сумме единицу или хотя бы быть положительными [2].

Если определить оператор скользящего среднего порядка m как $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_m B^m$, то модель скользящего среднего можно сжато записать, как $x_i = \theta(B)\xi_i$. Она содержит $m+2$ неизвестных параметра: $\mu, \theta_1, \ldots, \theta_m, \sigma_\xi^2$, которые должны на практике оцениваться по наблюдениям.

Для достижения большей гибкости в подгонке моделей к наблюдаемым временным рядам иногда целесообразно объединить в одной модели и авторегрессию, и скользящее среднее. Это приводит к комбинированной модели авторегрессии - скользящего среднего [2]

$$x_i = \rho_1 x_{i-1} + \ldots + \rho_p x_{i-p} + \xi_i - \theta_1 \xi_{i-1} - \ldots - \theta_q \xi_{i-q} \qquad (3.24)$$

или $\rho(B)x_i = \theta(B)\xi_i$, в которой имеется $p+q+2$ неизвестных параметра: $\mu;\ \rho_1, \ldots, \rho_p;\ \theta_1, \ldots, \theta_q;\ \sigma_\xi^2$, оцениваемых по наблюдениям.

На практике часто оказывается, что адекватное описание наблюдаемых временных рядов достигается при помощи моделей авторегрессии, скользящего среднего или комбинированной модели, в которых p и q не больше, а часто и меньше 2 [4].

3.5. Методы моделирования случайных процессов

Большой класс СП, имеющих место в информационно-измерительных системах, системах автоматического управления, а также в каналах связи, подверженных воздействию случайных возмущений описывается с помощью ДУ вида

$$\dot{\mathbf{y}} = f\left(\mathbf{y}, t, \mathbf{x}(t)\right),\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,\ t \in [0, T], \tag{3.25}$$

где $\mathbf{y} = \left(y_1, \ldots, y_n\right)^T$ - вектор состояния системы, $\mathbf{x}(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_m(t)\right)^T$ - векторный стационарный СП.

При исследовании на ЭВМ системы (3.25) необходимо получать реализации СП. Методы моделирования СВ рассматривались в главе 2. Ниже приводятся некоторые распространенные на практике методы моделирования гауссовских стационарных СП: метод формирующего фильтра (п. 3.5.1), метод скользящего суммирования (п. 3.5.2) и рекуррентные моделирующие алгоритмы (п. 3.5.3).

При имитации системы (3.25) на ЭВМ осуществляется переход от непрерывной системы к ее дискретной модели. Как правило, используются численные методы, входящие в математическое обеспечение ЭВМ (например, метод Рунге-Кутта и его модификации) [37]. При этом возникают методические ошибки, в том числе и при получении реализаций СП. Величина ошибок определяется выбранным шагом интегрирования h.

Для линейных стационарных систем, находящихся под воздействием гауссовских стационарных случайных возмущений, могут быть получены алгоритмы моделирования, лишенные методических ошибок. Эти алгоритмы рассматриваются в п. 3.5.3. Они основаны на методе дискретизации линейных стохастических уравнений . Метод дискретизации дает сравнительно простые и легко реализуемые алгоритмы моделирования гауссовских векторных и скалярных СП с дробно-рациональным спектром высокого порядка. В п. 3.5.4 метод дискретизации применяется для процессов с типовыми КФ. Помимо задач цифрового моделирования алгоритмы дискретизации оказываются полезными при расчетах корреляционных характеристик линейных систем и применении методов оптимальной фильтрации к обработке СП.

В настоящее время разработан ряд методов моделирования гауссовских стационарных СП $\mathbf{x}(t)$ с заданными характеристиками: математическим ожиданием m_x, КФ $R_x(\tau)$ или спектральной плотностью $S_x(\omega)$. При решении задач моделирования в целях удобства зачастую считают математическое ожидание нулевым, а дисперсию σ_x^2 - единичной.

Использование преобразования

$$x(t) = m_x + \sigma_x \overset{\circ}{x}(t)$$

позволяет получить процессы с требуемыми значениями этих характеристик. Здесь $M\left[\overset{\circ}{x}(t)\right] = 0$, $\sigma^2\left[\overset{\circ}{x}(t)\right] = 1$. Как известно, любая из функций $R_x(\tau)$ или $S_x(\omega)$ описывает полностью рассматриваемый класс процессов. Обе характеристики связаны взаимно однозначно преобразованиями Фурье [36]:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau}\, d\omega, \tag{3.26}$$

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau. \qquad (3.27)$$

Обычно задача формулируется следующим образом. По известным характеристикам процесса (математическому ожиданию, дисперсии и КФ или спектральной плотности) требуется построить вычислительный алгоритм, позволяющий получать на ЭВМ реализации СП $x(t)$ или последовательностей x_k, $k=0,1,2,\ldots$. В гауссовском случае модель процесса, заданная математическим ожиданием и КФ, является полностью определенной. Шаг дискретизации Δt может быть не равен шагу интегрирования h системы (3.25).

Известные методы можно разбить на две большие группы: **точные** (метод рекуррентных алгоритмов дискретизации) и **приближенные** (методы формирующего фильтра, скользящего суммирования). В точных методах отсутствует методическая ошибка по КФ, т. е. КФ $R_x[l]=M[x_{k+l}\,x_k]$ последовательности x_k равна дискретным значениям $R_x(k\Delta t)$ КФ $R_x(\tau)$ моделируемого процесса с непрерывным временем [41].

Для приближенных методов равенство заданных и воспроизводимых на ЭВМ характеристик выдерживается не точно, с некоторой погрешностью [41]. В настоящее время практически отсутствуют работы по анализу погрешностей приближенных методов моделирования, поэтому основным и наиболее надежным способом контроля приближенных алгоритмов является статистическая обработка моделируемых реализаций [7, 28, 35, 39].

3.5.1. Метод формирующего фильтра

Формирующим фильтром называют динамическую систему, преобразующую СП $\xi(t)$ вида белого шума в СП $x(t)$ с заданными статистическими характеристиками [1, 41]. Белый шум представляет собой стационарный СП с постоянной спектральной плотностью S_0. Его КФ имеет вид

$$R_x(\tau)=2\pi S_0\delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$ - дельта-функция Дирака, определяемая соотношениями

$$\delta(\tau)=\begin{cases}\infty, & \tau=0,\\ 0, & \tau\neq 0,\end{cases}\qquad \int_0^{\infty}\delta(\tau)\,d\tau=1.$$

Полагаем процесс $\xi(t)$ - гауссовским, нормированным условием $S_0=1/2\pi$, $M[\xi(t)]=0$. Чтобы найти передаточную функцию формирующего фильтра $\Phi(p)$, спектральную плотность процесса $x(t)$ представляют в виде произведения двух комплексно сопряженных сомножителей:

$$S_x(\omega)=S(j\omega)\,S(-j\omega). \qquad (3.28)$$

Формирующий фильтр с передаточной функцией $\Phi(p)=S(p)/\sqrt{S_0}$ должен быть устойчивым. Отметим, что моделируемый процесс является стационарным с заданной спектральной плотностью лишь при $t\to\infty$. Для дробно-рациональной спектральной плотности $S_x(\omega)$ функция $\Phi(p)$ имеет вид

$$\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{S_0}}\frac{F_m(p)}{H_n(p)}. \tag{3.29}$$

где $F_m(p), H_n(p)$ - полиномы степени $m, n, m<n$. Ей соответствует ДУ, записанное в операторной форме:

$$H_n(D)\,x(t)=\sqrt{S_0}F_m(D)\,\xi(t),\quad D=d/dt. \tag{3.30}$$

От этого уравнения с помощью известных преобразований легко перейти к системе ДУ первого порядка [41]. Стационарный СП $x(t)$ может быть представлен первой компонентой n-мерного марковского процесса $\mathbf{x}(t)=\left[x_1(t),\ldots,x_n(t)\right]^T$, $x_1(t)=x(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\,\xi(t). \tag{3.31}$$

Если $\sqrt{2\pi}F_m(p)=\beta_0p^m+\beta_1p^{m-1}+\ldots+\beta_m$, $H_n(p)=p^n+\alpha_1p^{n-1}+\ldots+\alpha_n$, то матрица A и вектор B равны

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & & \ldots & -\alpha_1 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ b_{n-m}\\ \vdots\\ b_{n-1}\\ b_n \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

где $b_{n-m}=\beta_0$,

$$b_k=\beta_{k-(n-m)}-\sum_{j=1}^{k-(n-m)}\alpha_j b_{k-j},\quad k=n-m+1,\ldots,n. \tag{3.33}$$

Процесс $\mathbf{x}(t)$ - гауссовский с нулевым средним. После окончания переходного процесса в уравнении (3.31) корреляционная матрица $\Gamma=M\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^T\right]$, установившегося стационарного процесса находится из уравнения:

$$A\Gamma+\Gamma A^T+BB^T=0. \tag{3.34}$$

Белый шум с бесконечно большой дисперсией является абстрактным физически нереализуемым процессом. Для моделирования формирующего фильтра на ЭВМ разработаны различные способы, требующие предварительных вычислений [41].

Приведем приближенный и достаточно простой метод интегрирования на цифровой ЭВМ уравнений формирующего фильтра [7, 41]. На ЭВМ моделируется дискретный белый шум $\xi_k\sim N(0,1)$, $k=0,1,2,\ldots,\xi_k$ -

некоррелированы. Рассмотрим ступенчатый процесс $\xi_h(t)$ с шагом h, порождаемый дискретным белым шумом

$$\xi_k(t) = \xi_k, \quad t \in \left[kh,\ (k+1)h \right].$$

Спектральная плотность процесса $\xi_h(t)$ равна

$$S_h(\omega) = \frac{h}{2\pi} \left[\frac{\sin(\omega h/2)}{\omega h/2} \right]^2.$$

При $h \to 0$ и фиксированном диапазоне частот $\omega \in [0, \omega_0]$ функция $S_h(\omega)$ стремится к постоянной спектральной плотности, причем максимальное по ω отклонение достигается на конце промежутка при $\omega = \omega_0$. Относительная погрешность в имитации процессом $\xi_h(t)$ свойств белого шума характеризуется величиной

$$\frac{\left| S_h(0) - S_h(\omega_0) \right|}{S_h(0)} \le \varepsilon_*, \tag{3.35}$$

где ε_* - заданное значение погрешности. Из неравенства (3.35) получаем неравенство $h \le h_* = 2\sqrt{3\varepsilon_*} \big/ \omega_0$, позволяющее выбрать величину h.

Величина ω_0 определяет тот частотный диапазон, в пределах которого необходимо воспроизводить спектральную плотность $S_x(\omega)$ моделируемого процесса. Значение ω_0 находится из условия

$$\sup_{\omega \in [0,\ \omega_0]} \left\{ S_x(\omega) \big/ S_x(0) \right\} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - заданная малая величина. При этом диапазон частот $[0, \omega_0]$ должен перекрывать полосу пропускания системы, на вход которой подается процесс $x(t)$.

Уравнение формирующего фильтра при моделировании на ЭВМ, получается из формулы (3.30) при $S_0 = h/2\pi$ и имеет вид

$$H_n(D)\, x(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{h}}\ F_m(D) \xi_h(t), \tag{3.36}$$

где h - шаг интегрирования ДУ формирующего фильтра. При моделировании на ЭВМ от этого уравнения следует перейти к системе ДУ первого порядка.

Векторному уравнению (3.31) соответствует уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \frac{1}{\sqrt{h}} B \xi_h(t). \tag{3.37}$$

Начальные условия задаются такими, чтобы можно было исключить переходный процесс: $\mathbf{x}(0) \sim N(\mathbf{0}, \Gamma)$, Γ - корреляционная матрица, определяемая из уравнения (3.34). При нулевых начальных условиях следует отбросить начальный отрезок реализации длиной T_0. Для процессов с типовыми нормированными КФ $\rho_x(\tau)$ (см. примеры в п. 3.5.3 и 3.5.4)

приведены расчеты, показывающие, что величина T_0 приближенно равна $T_0 \approx (1 \ldots 3)\tau_k$, где τ_k - интервал корреляции процесса. Величина τ_k определяется условием $|\rho_x(\tau_k)| = 0.05$, где в случае неоднозначности в качестве τ_k берется наибольший из корней уравнения [41].

Примеры применения метода формирующего фильтра для процессов с типовыми характеристиками приведены в п. 3.5.4. При малых h КФ процессов (3.31) и (3.37), а также (3.30) и (3.36) приближенно равны. При $h \to 0$ методическая ошибка стремится к нулю. Отметим, что при интегрировании системы ДУ методом Рунге-Кутта на каждом шаге несколько раз вычисляются правые части. Составляя программы, следует предусмотреть, чтобы при вычислении правых частей использовалась одна и та же для данного шага интегрирования случайная величина ξ_k. Приведенный метод, основанный на моделировании посредством цифровой ЭВМ формирующего фильтра, обладает методической ошибкой, величина которой уменьшается при $h \to 0$.

3.5.2. Метод скользящего суммирования

Дискретные значения моделируемого процесса формируются в виде скользящей суммы

$$x_k = \sum_{j=-M}^{M} a_j \xi_{k-j}, \quad \xi_k \sim N(0, 1) \tag{3.38}$$

с весовыми коэффициентами a_j. Существует ряд способов определения a_j [1, 41]. Один из них основан на применении интеграла свертки

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\xi(t-\tau)\, d\tau, \tag{3.39}$$

где $\xi(t)$ - нормированный белый шум; $g(\tau)$ - весовая функция формирующего фильтра. Функция $g(t)$ определяется формулой

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{S_x(\omega)}\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{3.40}$$

Формирующий фильтр с весовой функцией (3.40) имеет вещественную частотную характеристику $G(\omega) = \sqrt{2\pi S_x(\omega)}$. Соответствующая весовая функция (3.40) четна, поэтому непрерывный линейный фильтр с такой весовой функцией физически не реализуем. Однако это свойство не является препятствием для цифрового моделирования. Дискретизация интеграла (3.39) с шагом Δt дает следующие значения весовых коэффициентов:

$$a_j = \sqrt{\Delta t}\, g(j\Delta t), \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \pm M.$$

Значения $g(j\Delta t)$ вычисляются, как правило, с помощью численных методов [37]. При этом бесконечный верхний предел интегрирования

в формуле (3.40) заменяют на конечный. Генерируемая последовательность x_k имеет КФ $R_x[l] = M[x_{k+l}\, x_k]$, равную

$$R_x[l] = \sum_{j=-M}^{M-l} a_j\, a_{l+j} = \sum_{j=-M}^{M-l} g(j\Delta t)\, g\big((j+l)\Delta t\big)\Delta t\,. \qquad (3.41)$$

Истинная КФ имеет вид

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, g(t+\tau)\, dt\,. \qquad (3.42)$$

Функция $R_x[l]$ является интегральной суммой для интеграла (3.42). При условиях $\Delta t \to 0$, $l\,\Delta t = \tau = \text{const}$ КФ последовательности x_k стремится к требуемой $R_x(\tau)$. Контроль правильности вычисления a_j и выбора числа членов M (теоретически должно быть $M = \infty$) осуществляется путем расчета по формуле (3.41) функции $R_x[l]$ и сравнением ее с требуемой КФ. Поскольку последовательность (3.38) является гауссовской, то близость функций $R_x[l]$ и $R_x(\tau)$ означает близость заданного и моделируемого процессов на уровне конечномерных распределений. Метод скользящего суммирования пригоден для моделирования гауссовских процессов с произвольными спектральными плотностями.

3.5.3. Дискретные модели линейных стационарных систем и стационарных случайных процессов

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему при действии возмущений, заданных в виде стационарных СП. Полагаем, что СП выражаются с помощью формирующих фильтров (3.31) через белый шум. Последовательное соединение исходной системы и формирующего фильтра образует эквивалентную систему [41].

Такая система может быть описана векторным ДУ

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\boldsymbol{\xi}(t)\,, \qquad (3.43)$$

где $\mathbf{x}$ - n-мерный вектор состояния, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ - матрицы постоянных коэффициентов размеров $n \times n$ и $n \times m$; $\boldsymbol{\xi}(t)$ - m-мерный гауссовский белый шум с нулевым средним и матричной КФ $R_\xi(\tau) = \delta(\tau) I_m$; I_m - единичная матрица. Начальные условия представляют собой гауссовский вектор $\mathbf{x}_0 \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma}_0)$, $\boldsymbol{\Gamma}_0$ - корреляционная матрица, $\mathbf{x}_0$ и $\boldsymbol{\xi}(t)$ - независимые случайные векторы.

Дискретизация системы. Для моделирования системы (3.43) на цифровой ЭВМ перейдем к дискретной модели. Выразим $\mathbf{x}(t)$ через матричный экспоненциал

$$\mathbf{e}^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k / k!; \qquad (3.44)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{At}\,\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} B\boldsymbol{\xi}(\tau)\,d\tau\,. \tag{3.45}$$

Используя свойство $\mathbf{e}^{A(t+\Delta t)} = \mathbf{e}^{A\Delta t}\,\mathbf{e}^{At}$, представим процесс $\mathbf{x}(t)$ и момент $t+\Delta t$ в следующем виде:

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{e}^{A\Delta t}\left[\mathbf{e}^{At}\,\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} B\boldsymbol{\xi}(\tau)\,d\tau\right] + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{e}^{A(t+\Delta t-\tau)} B\boldsymbol{\xi}(\tau)\,d\tau\,, \tag{3.46}$$

где Δt - шаг дискретизации.

Соотношению (3.46) соответствует рекуррентное уравнение

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_\Delta \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\zeta}_{k+1}, \tag{3.47}$$

где $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\,\Delta t)$; $\mathbf{A}_\Delta = \left[\mathbf{a}_{ij}^{\Delta}\right] = \mathbf{e}^{A\,\Delta t}$;

$$\boldsymbol{\zeta}_{k+1} = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{e}^{A(t+\Delta t-\tau)} B\boldsymbol{\xi}(\tau)\,d\tau = \int_0^{\Delta t} \mathbf{e}^{A\tau} B\boldsymbol{\xi}(t+\Delta t-\tau)\,d\tau\,. \tag{3.48}$$

Векторы $\boldsymbol{\zeta}_{k+1}$ являются независимыми гауссовскими $\boldsymbol{\zeta}_{k+1} \sim N(\mathbf{0}, R_\zeta)$ и не зависят от $\mathbf{x}_k$. Корреляционная матрица $R_\zeta = M\left[\boldsymbol{\zeta}_{k+1}\boldsymbol{\zeta}_{k+1}^T\right]$ имеет вид

$$R_\zeta = \int_0^{\Delta t} W(\tau) W^T(\tau)\,d\tau\,, \quad W(\tau) = \mathbf{e}^{A\tau} B\,. \tag{3.49}$$

Представим R_ζ в виде

$$R_\zeta = \mathbf{B}_\Delta \mathbf{B}_\Delta^T, \tag{3.50}$$

где $\mathbf{B}_\Delta = \left[b_{ij}^{\Delta}\right]$ - матрица порядка $n \times r$, r - ранг матрицы R_ζ.

Здесь матрица $\mathbf{B}_\Delta$ находится по R_ζ с помощью алгоритма (2.20)-(2.22). Тогда $\boldsymbol{\zeta}_{k+1}$ может быть выражен через $\boldsymbol{\xi}_{k+1} \sim N(\mathbf{0}, I_r)$ равенством $\boldsymbol{\zeta}_{k+1} = \mathbf{B}_\Delta \boldsymbol{\xi}_{k+1}$. Отсюда и из формулы (3.47) следует уравнение

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_\Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_\Delta \boldsymbol{\xi}_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots. \tag{3.51}$$

Уравнение (3.51) может использоваться для моделирования динамической системы (2.34) на ЭВМ, а также для получения реализации стационарных СП, заданных уравнением формирующего фильтра вида (2.43). Моделирующий алгоритм, основанный на уравнении (3.51), не имеет методических ошибок. Алгоритм позволяет воспроизводить на ЭВМ случайные последовательности с заданными КФ [41].

Корреляционные моменты. Определение начальных условий для компенсации переходных процессов. Корреляционная матрица $\boldsymbol{\Gamma}_k = M\left\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T\right\}$, как следует из уравнения (3.51), определяется рекуррентным соотношением

$$\boldsymbol{\Gamma}_{k+1} = \mathbf{A}_\Delta \boldsymbol{\Gamma}_k\,\mathbf{A}_\Delta^T + R_\zeta\,. \tag{3.52}$$

Примем далее, что матрица A в системе (3.43) – матрица Гурвица, т. е. ее собственные числа удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_j < 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, n$.

В силу (3.43) матричная КФ $R_{\mathbf{x}}(t+\tau,t)=M\left\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}^T(t)\right\}$ при $\tau\geq 0$ равна

$$R_{\mathbf{x}}(t+\tau,t)=\mathbf{e}^{A\tau}M\left\{\left[\mathbf{e}^{At}\,\mathbf{x}_0+\int_0^{t+\tau}\mathbf{e}^{A(t-s)}B\boldsymbol{\xi}(s)ds\right]\times\left[\mathbf{e}^{At}\,\mathbf{x}_0+\int_0^{t}\mathbf{e}^{A(t-s)}B\boldsymbol{\xi}(s)ds\right]^T\right\}.$$

Отсюда, учитывая некоррелированность процесса $\boldsymbol{\xi}(s)$ и его независимость от $\mathbf{x}_0$, после взятия математического ожидания получаем формулу

$$R_{\mathbf{x}}(t+\tau,t)=\mathbf{e}^{A\tau}\left(\mathbf{e}^{At}\,\boldsymbol{\Gamma}_0\mathbf{e}^{A^Tt}+\int_0^{t}\mathbf{e}^{A(t-s)}BB^T\mathbf{e}^{A^T(t-s)}\,ds\right).$$

Здесь выражение в скобках равно корреляционной матрице $R_{\mathbf{x}}(t,t)=M\left\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\right\}$ процесса $\mathbf{x}(t)$. При $t=k\Delta t$ справедливо равенство $\boldsymbol{\Gamma}_k=R_{\mathbf{x}}(t,t)$.

После замены переменной интегрирования $t-s=u$ и функция $R_{\mathbf{x}}(t,t)$ примет вид

$$R_{\mathbf{x}}(t,t)=\mathbf{e}^{At}\,\boldsymbol{\Gamma}_0\mathbf{e}^{A^Tt}+\int_0^{t}\mathbf{e}^{Au}BB^T\mathbf{e}^{A^Tu}\,du$$

Для матриц Гурвица имеем последовательно равенства:

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{e}^{At}=0;\quad\lim_{t\to\infty}\mathbf{e}^{At}\,\boldsymbol{\Gamma}_0\mathbf{e}^{A^Tt}=0$$

$$\lim_{t\to\infty}R_{\mathbf{x}}(t,t)=\int_0^{\infty}\mathbf{e}^{Au}BB^T\mathbf{e}^{A^Tu}\,du=\boldsymbol{\Gamma}_\infty.$$

Эти равенства означают, что в системе (3.43) асимптотически устанавливаются стационарные СП с нулевым средним и корреляционной матрицей $R_{\mathbf{x}}(t+\tau,t)=\mathbf{e}^{A\tau}\,\boldsymbol{\Gamma}_\infty$.

Матрица $\boldsymbol{\Gamma}_\infty$ находится предельным переходом в уравнении (3.52) при $k\to\infty$. Переходя в формуле (3.43) к пределу, получаем линейное алгебраическое уравнение

$$\boldsymbol{\Gamma}_\infty=\mathbf{A}_\Delta\boldsymbol{\Gamma}_\infty\mathbf{A}_\Delta^T+R_\xi. \tag{3.53}$$

Матрицу $\boldsymbol{\Gamma}_\infty$ можно также найти из соотношения (3.34). Если положить в (3.52) $\boldsymbol{\Gamma}_0=\boldsymbol{\Gamma}_\infty$, то из формулы (3.53) получаем равенства $\boldsymbol{\Gamma}_0=\boldsymbol{\Gamma}_1=\ldots=\boldsymbol{\Gamma}_k=\ldots=\boldsymbol{\Gamma}_\infty$.

Это означает, что корреляционные свойства процесса $\mathbf{x}(t)$ не изменяются с течением времени. В системе (3.43) отсутствуют переходные процессы, а стационарный процесс устанавливается, начиная с момента $t=0$, поэтому для устранения переходных процессов в уравнении (3.51) необходимо положить $\mathbf{x}_0\sim N(\mathbf{0},\boldsymbol{\Gamma}_\infty)$.

Матрица $\mathbf{A}_\Delta=\mathbf{e}^{A\Delta t}$ находится из матричной системы ДУ

$$\dot{X}=AX \tag{3.54}$$

интегрированием выражения (3.54) на промежутке $[0, \Delta t]$ при начальном условии $X(0) = I_n$. После интегрирования получаем $X(\Delta t) = \mathbf{A}_\Delta$. Для приближенных вычислений можно пользоваться формулой (3.44), ограничиваясь конечным числом членов:

$$\mathbf{e}^{A\Delta t} \approx \sum_{k=0}^{L} A^k \, \Delta t^k / k! . \tag{3.55}$$

Рассмотрим, какой вид имеет уравнение (3.51) при малом шаге Δt. В (3.55) отбросим члены второго и высшего порядка малости. Тогда получим $\mathbf{e}^{A\Delta t} \approx I_n + A\Delta t$, $R_\zeta \approx BB^T \Delta t$. После подстановки этих выражений в формулу (3.51) следует приближенное равенство

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{x}_k + A\mathbf{x}_k \, \Delta t + B\sqrt{\Delta t}\, \boldsymbol{\xi}_{k+1} .$$

При стремлении Δt к нулю получаем

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \Delta t^{-1/2} \, B \boldsymbol{\xi}_{\Delta t}(t) .$$

Это выражение соответствует формуле (3.37), выведенной ранее другим способом.

Моделирующий алгоритм. Алгоритм цифрового моделирования включает следующие операции [41]:

1. Модель динамической системы или формирующего фильтра приводится к виду (3.43).

2. Вычисляется n-мерная матрица $\mathbf{A}_\Delta$. Для этого n раз интегрируется система

$$d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_j , \tag{3.56}$$

где $\mathbf{e}_j$ - j-й столбец единичной матрицы I_n, $\mathbf{x}$ - n-мерный вектор. Решение системы (3.56) в момент Δt дает j-й столбец матрицы $\mathbf{A}_\Delta$.

3. Вычисляется матрица $R_\zeta = \left[R_{ij} \right]$. В соответствии с формулой (3.49) ее элементы равны

$$R_{ij} = \sum_{l=1}^{m} R_{ij}^{(l)} , \quad R_{ij}^{(l)} = \int_0^{\Delta t} w_{il}(\tau) w_{jl}(\tau) \, d\tau , \tag{3.57}$$

где $w_{il}(\tau)$ - компоненты матрицы $w(\tau)$.

Для определения $R_{ij}^{(l)}$ m раз интегрируются системы ДУ:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \, \mathbf{x}(0) = B_l, \; l = 1, \ldots, m; \\ &\dot{R}_{ij}^{(l)} = x_i(t) x_j(t), \; R_{ij}^{(l)}(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.58}$$

Здесь B_l - l-й столбец матрицы B, $x_i(\tau) = w_{il}(\tau)$. В результате суммирования величин $R_{ij}^{(l)}(\Delta t)$ по l находятся элементы симметрической матрицы R_ζ.

4. По рекуррентному алгоритму (3.52) вычисляется корреляционная матрица $\boldsymbol{\Gamma}_\infty$. В качестве $\boldsymbol{\Gamma}_0$ можно принять любую неотрицательно определенную симметрическую матрицу, например нулевую. Выбор $\boldsymbol{\Gamma}_0$

оказывает влияние только на время переходного процесса. Итеративный процесс (3.52) заканчивается, когда матрица $\mathbf{\Gamma}_k$ примет с заданной точностью установившееся значение.

5. С помощью алгоритма (2.20)-(2.22) вычисляется матрица $\mathbf{B}_\Delta$ размера $n \times r$, определяемая соотношением (3.50).

6. Разыгрывается вектор $\mathbf{x}_0$ начальных условий; $\mathbf{x}_0 \sim N\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Gamma}_0\right)$ или $\mathbf{x}_0 \sim N\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Gamma}_\infty\right)$ при моделировании стационарных процессов и установившихся режимов движения (3.43). Для этого также применяются алгоритмы (2.20)-(2.22). Разыгрыванием начального условия заканчивается подготовительный этап вычислений.

7. Выполняется цифровое моделирование динамической системы или стационарного СП по формуле (3.51).

Сравнивая алгоритм (3.51) с методами моделирования стационарных процессов, рассмотренными в п. 3.5.1 и п. 3.5.2, можно отметить следующее: алгоритм не содержит методических ошибок, т. е. статистические характеристики генерируемой последовательности и выборки с шагом Δt из реализации процесса с непрерывным временем совпадают; подготовительный этап не содержит операций, выполняемых только аналитическими методами, – все операции выполняются численно с использованием стандартных процедур; при моделировании отсутствуют переходные нестационарные процессы; исходными данными являются не спектральные и корреляционные характеристики, а матрицы A, B марковского процесса (3.43), определение которых, как правило, не вызывает трудностей. Причем для векторных процессов задание пары A, B на практике часто являются более естественным способом описания, чем матричные корреляционные или спектральные характеристики. Данный метод может иметь преимущества по сравнению с известными методами для процессов со спектрами относительно высокого порядка.

С использованием дискретной модели (3.51) могут решаться задачи статистического анализа линейных стационарных систем. Дисперсии и корреляционные моменты фазовых координат x_i системы (3.43) являются компонентами матрицы $\mathbf{\Gamma}_k = M\left\{\mathbf{x}\left(k\ \Delta t\right)\mathbf{x}^T\left(k\ \Delta t\right)\right\}$ или матрицы $\mathbf{\Gamma}_\infty$ в установившемся режиме. Эти матрицы находим из уравнений (3.52) и (3.53). Рассмотрим матрицу

$$R_{\mathbf{x}}\left[k+l,\, k\right] = M\left\{\mathbf{x}\left(\left(k+l\right)\Delta t\right)\mathbf{x}^T\left(k\ \Delta t\right)\right\}.$$

Ее элементы представляют собой КФ и взаимные КФ. Как следует из уравнения (3.51)

$$R_{\mathbf{x}}\left[k+l,\, k\right] = \mathbf{A}_\Delta^l \mathbf{\Gamma}_k. \tag{3.59}$$

В установившемся режиме для стационарных процессов соотношение (3.59) принимает вид

$$R_{\mathbf{x}}\left[k+l,\, k\right] = R_{\mathbf{x}}\left[k\right] = \mathbf{A}_\Delta^l \mathbf{\Gamma}_\infty. \tag{3.60}$$

При большом n в выражении (3.43) применение формул (3.52), (3.53) и (3.59), (3.60) позволяет значительно сократить объем промежуточных вычислений по сравнению с известными методами анализа непрерывных систем [23, 32].

Пример 3.1. Частным случаем системы (3.43) является марковский гауссовский стационарный процесс первого порядка [5, 41]. Его нормированная КФ равна $\rho_\xi(\tau)=\mathbf{e}^{-\alpha|\tau|}$, уравнение (3.43) имеет вид

$$\dot{x}=ax+b\xi(t),\ \ a=-\alpha,\ \ b=\sigma_\xi\sqrt{2\alpha}\,. \tag{3.61}$$

Формулы (3.47)-(3.50) дают для коэффициентов дискретной модели (3.51) следующие выражения:

$$\mathbf{A}_\Delta=\mathbf{e}^{-\alpha|\tau|},\ \ R_\zeta=b^2\int_0^{\Delta t}\mathbf{e}^{-2\alpha\tau}\,d\tau=\sigma_\xi^2\left(1-\mathbf{e}^{-2\alpha\Delta t}\right),\ \mathbf{B}_\Delta=\sqrt{R_\zeta}=\sigma_\xi\left[1-\mathbf{e}^{-2\alpha\Delta t}\right]^{1/2},\quad \mathbf{\Gamma}_\infty=\sigma_\xi^2.$$

Модель (3.51) примет вид

$$x_{k+1}=\mathbf{e}^{-\alpha\Delta t}x_k+\sigma_\xi\sqrt{1-\mathbf{e}^{-2\alpha\Delta t}}\,\boldsymbol{\xi}_{k+1},\ k=0,1,\ldots,\ \ x_0\sim N(0,1).$$

Пример 3.2. Рассмотрим стационарный СП $x(t)$, имеющий спектр второго порядка [41]

$$S_x(\omega)=\frac{\sigma_x^2}{2\pi}\frac{\left|\beta_0 j\omega+\beta_1\right|^2}{\left|(j\omega)^2+\alpha_1 j\omega+\alpha_2\right|^2}. \tag{3.62}$$

Используя соотношения (3.32) и (3.33), представим его в виде компоненты марковского процесса

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+b_1\xi(t),\ x_1=x(t);\\ \dot{x}_2&=-\alpha_2x_1-\alpha_1x_2+b_2\xi(t),\end{aligned}\right\} \tag{3.63}$$

где $b_1=\sigma_x\beta_0$, $\quad b_2=\sigma_x(\beta_1-\alpha_1\beta_0)$. Для исключения переходных процессов в уравнении (3.63) необходимо, чтобы начальное условие моделировалось в виде двумерного гауссовского вектора $\mathbf{x}_0\sim N(\mathbf{0},\mathbf{\Gamma})$, где корреляционная матрица $\mathbf{\Gamma}=\left[\gamma_{ij}\right]$ находится из (3.34) или (3.53). Решение уравнения (3.34) для данной системы дает следующие значения γ_{ij}:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{11}&=\left[b_1^2\alpha_2+\left(b_2+\alpha_1b_1\right)^2\right]\Big/\left(2\alpha_1\alpha_2\right);\\ \gamma_{12}&=\gamma_{21}=-b_1^2/2,\ \gamma_{22}=\left(b_2^2+b_1^2\alpha_2\right)\Big/\left(2\alpha_1\right).\end{aligned}\right\}. \tag{3.64}$$

Для построения алгоритма (3.51) найдем матрицы $\mathbf{A}_\Delta=\mathbf{e}^{A\Delta t}$, R_ζ и $\mathbf{B}_\Delta$. ДУ, необходимые для определения $\mathbf{A}(\tau)=\left[\mathrm{a}_{ij}(\tau)\right]$ имеют вид

$$\dot{x}_1=x_2,\ \ \dot{x}_2=-\alpha_2x_1-\alpha_1x_2,\ \ \mathbf{A}_\Delta=\mathbf{A}(\Delta t). \tag{3.65}$$

Первый столбец матрицы $\mathbf{A}(\tau)$ получаем, решая эту систему при начальных условиях $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$, второй - при начальных условиях $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$. В результате имеем:

а) при $\alpha_2 - \alpha_1^2/4 > 0$, $\omega = \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2/4}$,

$$\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{e}^{-\alpha_1\tau/2}\begin{bmatrix} \cos\omega\tau + \dfrac{\alpha_1}{2\omega}\sin\omega\tau & \dfrac{\sin\omega\tau}{\omega} \\ -\dfrac{\alpha_2\sin\omega\tau}{\omega} & \cos\omega\tau - \dfrac{\alpha_1}{2\omega}\sin\omega\tau \end{bmatrix}; \qquad (3.66, а)$$

б) при $\alpha_2 = \alpha_1^2/4$

$$\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{e}^{-\alpha_1\tau/2}\begin{bmatrix} 1 + \dfrac{\alpha_1}{2}\tau & \tau \\ -\alpha_2\tau & 1 - \dfrac{\alpha_1}{2}\tau \end{bmatrix}. \qquad (3.66, б)$$

Из формул (3.49) и (3.57) следует, что матрица R_ζ равна

$$R_\zeta = \int_0^{\Delta t} W(\tau) W^T(\tau)\, d\tau,$$

где $W(\tau)$ - решение системы (3.65) с начальными условиями $x_1(0) = b_1$, $x_2(0) = b_2$. В силу линейности системы (3.65) имеем

$$W(\tau) = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11}(\tau) \\ \mathrm{a}_{21}(\tau) \end{bmatrix} b_1 + \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{12}(\tau) \\ \mathrm{a}_{22}(\tau) \end{bmatrix} b_2.$$

Отсюда получаем формулы для элементов R_ζ:

$$R_{11} = \int_0^{\Delta t} \left[b_1 \mathrm{a}_{11}(\tau) + b_2 \mathrm{a}_{12}(\tau) \right]^2 d\tau$$

$$R_{22} = \int_0^{\Delta t} \left[b_1 \mathrm{a}_{21}(\tau) + b_2 \mathrm{a}_{22}(\tau) \right]^2 d\tau \qquad (3.67)$$

$$R_{12} = R_{21} = \int_0^{\Delta t} \left[b_1 \mathrm{a}_{11}(\tau) + b_2 \mathrm{a}_{12}(\tau) \right]\left[b_1 \mathrm{a}_{21}(\tau) + b_2 \mathrm{a}_{22}(\tau) \right] d\tau.$$

Матрицу $\mathbf{B}_\Delta = \left[b_{ij}^\Delta \right]$ определяем из соотношения (3.50) с помощью формул (2.20)-(2.22). Элементы $\mathbf{B}_\Delta$ равны:

$$b_{12}^\Delta = 0, \quad b_{11}^\Delta = \sqrt{R_{11}}, \quad b_{21}^\Delta = R_{21} R_{11}^{-1/2}, \quad b_{22}^\Delta = \sqrt{R_{22} - R_{12}^2/R_{11}}. \qquad (3.68)$$

В результате окончательно получаем

$$x_{1,k+1} = \mathrm{a}_{11}^\Delta x_{1,k} + \mathrm{a}_{12}^\Delta x_{2,k} + b_{11}^\Delta \xi_{1,\,k+1}; \qquad (3.69)$$

$$x_{2,k+1} = \mathrm{a}_{21}^\Delta x_{1,k} + \mathrm{a}_{22}^\Delta x_{2,k} + b_{21}^\Delta \xi_{1,\,k+1} + b_{22}^\Delta \xi_{2,\,k+1},$$

где $\mathrm{a}_{ij}^\Delta = \mathrm{a}_{ij}(\Delta t)$; $x_{1,k} = x_k$; $\xi_k = \left(\xi_{1,k}, \xi_{2,k} \right) \sim N(\mathbf{0}, I_2)$.

Приведенные в данном примере формулы позволяют моделировать СП с различными типами КФ, встречающиеся на практике [4, 41].

3.5.4. Моделирование стационарных процессов с типовыми корреляционными функциями

Во многих радиотехнических системах наблюдаются сигналы, которые достаточно хорошо описываются моделями стационарных СП с типовыми КФ [4]. Возмущения в динамических системах часто задаются также в виде гауссовских стационарных процессов с типовыми КФ и дробно-рациональными спектральными плотностями [1, 41].

Основываясь на рассмотренных в пп. 3.5.1-3.5.3 методах, получим алгоритмы для моделирования гауссовских стационарных СП с некоторыми типами КФ. В табл. 3.1 приведены КФ $R_i(\tau)$, спектральные плотности $S_i(\omega)$ СП и соответствующие им передаточные функции $\Phi_i(p)$ формирующих фильтров.

Таблица 3.1

№	$R_i(\tau)$	$S_i(\omega)$	$\bar{\Phi}_i(p)$
1	$\sigma_x^2 \mathrm{e}^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$	$\sigma_x^2 \dfrac{\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$	$\sigma_x \dfrac{\sqrt{2\alpha}}{p+\alpha}$
2	$\sigma_x^2 \mathrm{e}^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\cos\beta\tau$	$\sigma_x^2 \dfrac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{\pi\left[(\omega^2-\beta^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\omega^2\right]}$	$\sigma_x \dfrac{\sqrt{2\alpha}\left(p+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{p^2+2\alpha p+\alpha^2+\beta^2}$
3	$\sigma_x^2 \mathrm{e}^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(\cos\beta\tau+\dfrac{\alpha}{\beta}\sin\beta\lvert\tau\rvert\right)$	$\sigma_x^2 \dfrac{2\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\pi\left[(\omega^2-\beta^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\omega^2\right]}$	$\sigma_x \dfrac{2\sqrt{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}}{p^2+2\alpha p+\alpha^2+\beta^2}$
4	$\sigma_x^2 \mathrm{e}^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(1-\dfrac{\alpha\lvert\tau\rvert}{2}\right)$	$\sigma_x^2 \dfrac{1+3\omega^2/\alpha^2}{2\pi\alpha(1+\omega^2/\alpha^2)^2}$	$\sigma_x \dfrac{1+p\sqrt{3}/\alpha}{\sqrt{\alpha}(1+p/\alpha)^2}$

Приведенные в табл. 3.1 типовые КФ имеют следующие случайные возмущения, встречающиеся в приложениях: атмосферная турбулентность; шумы/помехи в следящих системах и информационно-измерительных устройствах; неоднородности земной поверхности; сейсмические нагрузки; характеристики потоков событий и др. [41]

Системы ДУ вида (3.37) для моделирования формирующих фильтров на ЭВМ представлены в табл. 3.2. При этом $x_1(t)=x(t)$. Там же даны значения шага интегрирования h_*, при котором обеспечивается заданная точность воспроизведения спектральной плотности (3.35) в установленном диапазоне частот. КФ $R_5(\tau)=\sigma_x^2 \mathrm{e}^{-\alpha\lvert\tau\rvert}(1+\alpha\lvert\tau\rvert)$ получается в результате предельного перехода при $\beta\to 0$ из КФ $R_3(\tau)$.

Моделирующие алгоритмы получаются из формул табл. 3.2 при $\beta=0$. Для исключения переходного процесса начальные условия в ДУ (табл. 3.2) следует задавать как реализацию случайного вектора $\mathbf{x}_0 \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Gamma}_\infty)$. Подставляя в (3.64) параметры КФ, определяем корреляционные моменты γ_{ij}; $\gamma_{11}=\sigma_x^2$, значения γ_{12} и γ_{22} приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.2

№	Уравнения фильтра	Параметры	h_*	h_* при $\varepsilon_* = \delta = 0.1$
1	$\dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 \xi_h(t)$	$a_1 = -\alpha$; $b_1 = \sigma_x \sqrt{2\alpha/h}$	$\frac{2\delta}{\alpha}\sqrt{\frac{3\varepsilon_*}{1-\delta^2}}$	$\frac{0.1}{\alpha}$
2	$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + b_1\xi_h(t)\\ \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_2\xi_h(t)\end{aligned}\right\}$	$a_1 = -(\alpha^2+\beta^2)$; $b_1 = \sigma_x\sqrt{2\alpha/h}$; $a_2 = -2\alpha$; $b_2 = \sigma_x\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - 2\alpha\right)\sqrt{2\alpha/h}$	$2\delta\sqrt{\frac{3\varepsilon_*}{\alpha^2+\beta^2}}$	$\frac{0.1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$
3	$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_2\xi_h(t)\end{aligned}\right\}$	$a_1 = -(\alpha^2+\beta^2)$; $a_2 = -2\alpha$; $b_2 = 2\sigma_x\sqrt{\alpha(\alpha^2+\beta^2)/h}$	$2\sqrt{\frac{3\varepsilon_*\delta}{\alpha^2+\beta^2}}$	$\frac{0.3}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$
4	$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + b_1\xi_h(t)\\ \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_2\xi_h(t)\end{aligned}\right\}$	$a_1 = -\alpha^2$; $b_1 = \sigma_x\sqrt{3\alpha/h}$; $a_2 = -2\alpha$; $b_2 = \sigma_x\,\alpha^{3/2}h^{-1/2}\left(1-2\sqrt{3}\right)$	$2\frac{\delta\sqrt{\varepsilon_*}}{\alpha}$	$\frac{0.66}{\alpha}$

Таблица 3.3

$R_i(\tau)$	γ_{12}	γ_{22}
$R_2(\tau)$	$-\alpha\sigma_x^2$	$\sigma_x^2\left(3\alpha^2+\beta^2-2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)$
$R_3(\tau)$	0	$\sigma_x^2(\alpha^2+\beta^2)$
$R_4(\tau)$	$-1.5\sigma_x^2\alpha$	$\sigma_x^2\,\alpha\left(4-\sqrt{3}\right) \approx 2.268\,\alpha\,\sigma_x^2$

Получим дискретные модели, позволяющие моделировать процессы с типовыми КФ без методических ошибок. Процесс с экспоненциальной КФ $R_1(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ рассматривался в примере 3.1 (3.61). Процессы с КФ $R_i(\tau), i \geq 2$, приведенными в табл. 3.1, имеют спектры второго порядка вида (3.62). Представление в виде компоненты марковского процесса имеет вид (3.63), где $\alpha_1 = 2\alpha$, а значения остальных параметров приведены в табл. 2.4. Дискретная модель определяется уравнениями (3.69), где значения a_{ij}^{Δ}, b_{ij}^{Δ} определяются подстановкой данных табл. 3.4 в формулы (3.66)-(3.67). Окончательные выражения для a_{ij}^{Δ}, R_{ij} через параметры КФ приведены в табл. 3.5.

Коэффициенты b_{ij}^{Δ} связаны с R_{ij} формулами (3.68). Стационарные СП с дробно-рациональной спектральной плотностью (3.62) могут моделироваться с помощью уравнения типа авторегрессии - скользящего среднего [2, 41]:

$$x_k = a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + b_1\xi_k + b_2\xi_{k-1}, \quad \xi_k \sim N(0,1). \qquad (3.70)$$

Таблица 3.4

$R_i(\tau)$	α_2	b_1	b_2
$R_2(\tau)$	$\alpha^2+\beta^2$	$\sigma_x\sqrt{2\alpha}$	$\sigma_x\sqrt{2\alpha}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-2\alpha\right)$
$R_3(\tau)$	$\alpha^2+\beta^2$	0	$2\sigma_x\sqrt{\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)}$
$R_4(\tau)$	α^2	$\sigma_x\sqrt{3\alpha}$	$\sigma_x\alpha^{3/2}\left(1-2\sqrt{3}\right)$

Таблица 3.5

a_{ij}^{Δ}	$R_2(\tau)$	$R_3(\tau)$	$R_4(\tau)$
a_{11}^{Δ}	ρs_1	ρs_1	$\rho\left(1+\alpha_{\Delta}\right)$
a_{12}^{Δ}	$\frac{\rho}{\beta}\sin\beta_{\Delta}$	$\frac{\rho}{\beta}\sin\beta_{\Delta}$	$\rho\Delta t$
a_{21}^{Δ}	$-\rho\alpha\bar{\alpha}\left(1+\bar{\beta}^2\right)\sin\beta_{\Delta}$	$-\rho\alpha\bar{\alpha}\left(1+\bar{\beta}^2\right)\sin\beta_{\Delta}$	$-\alpha^2\rho\Delta t$
a_{22}^{Δ}	ρs_2	ρs_2	$\rho\left(1-\alpha_{\Delta}\right)$
R_{11}	$1-\rho^2+2\bar{\alpha}^2\rho^2\sin^2\beta_{\Delta}\left(\sqrt{1+\bar{\beta}^2}-1\right)$	$1-\rho^2\left[s_1^2+\left(1+\bar{\alpha}^2\right)\sin^2\beta_{\Delta}\right]$	$1+\rho^2\left[\alpha_{\Delta}+\alpha_{\Delta}^2\left(\sqrt{3}-2\right)-1\right]$
$R_{12}=R_{21}$	$\alpha\rho^2\left[\cos\beta_{\Delta}+\sin\beta_{\Delta}\left(\sqrt{\bar{\alpha}^2+1}-\bar{\alpha}\right)\right]^2-\alpha$	$2\rho^2\alpha\left(1+\bar{\alpha}^2\right)\sin^2\beta_{\Delta}$	$\alpha\left\{\rho^2\left[1.5+\alpha_{\Delta}\left(\sqrt{3}-3\right)+\right.\right.$ $\left.\left.+\alpha_{\Delta}^2\left(2-\sqrt{3}\right)\right]-1.5\right\}$
R_{22}	$\alpha^2\left\{\rho^2\left[2s_1^2\left(\sqrt{1+\bar{\beta}^2}-1\right)-1-\bar{\beta}^2\right]+\right.$ $\left.+1+\left(1-\sqrt{1+\bar{\beta}^2}\right)^2\right\}$	$\beta^2\left(1+\bar{\alpha}^2\right)\left\{1-\rho^2\times\right.$ $\left.\times\left[s_2^2+\left(1+\bar{\alpha}^2\right)\sin^2\beta_{\Delta}\right]\right\}$	$\alpha^2\rho^2\left[\sqrt{3}-4+\alpha_{\Delta}\left(5-2\sqrt{3}\right)+\right.$ $\left.+\alpha_{\Delta}^2\left(\sqrt{3}-2\right)\right]+\alpha^2\left(4-\sqrt{3}\right)$
$\alpha_{\Delta}=\alpha\Delta t;\ \ \beta_{\Delta}=\beta\Delta t;\ \ \rho=e^{-\alpha_{\Delta}};\ \ \bar{\alpha}=\alpha/\beta;\ \ \bar{\beta}=\beta/\alpha;$ $s_1=\cos\beta_{\Delta}+\bar{\alpha}\sin\beta_{\Delta};\ \ s_2=\cos\beta_{\Delta}-\bar{\alpha}\sin\beta_{\Delta}$			

Для определения параметров уравнения (3.70) найдем спектральную плотность последовательности ξ_k:

$$s(\lambda)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\rho_x(j\Delta t)\cos(\lambda j)/2\pi.$$

Функция $s(\lambda)$ является элементом $S_{11}(\lambda)$ матричной спектральной плотности $S(\lambda)=\left[S_{ij}(\lambda)\right]$ последовательности (3.69) и определяется формулой

$$S(\lambda)=\frac{1}{2\pi}G^{-1}(z)R_{\xi}\left[G^{*}(z)^{-1}\right]\Big|_{z=e^{j\lambda}} \qquad (3.71)$$

где $G(z)=I_2z-\mathbf{A}_{\Delta}$, $G^{*}(z)$ - матрица, сопряженная по Эрмиту к $G(z)$. Обратная к матрице $G(z)$ порядка 2×2 легко находится с помощью присоединенной матрицы. Подставив в формулу (3.71) элементы матриц $\mathbf{A}_{\Delta}$ и R_{ξ}, получим выражение для спектральной плотности:

$$S_{11}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\frac{z^{-1}\left(c_0z^2+c_1z+c_0\right)}{\left|z^2-a_1z-a_2\right|^2}\Big|_{z=e^{j\lambda}},$$

где в знаменателе – определитель матрицы $G(z)$, постоянные c_i, a_i равны

$$a_1=a_{11}^{\Delta}+a_{22}^{\Delta};\ \ a_2=a_{12}^{\Delta}a_{21}^{\Delta}-a_{11}^{\Delta}a_{22}^{\Delta};$$

$$c_0=a_{12}^{\Delta}R_{12}-R_{11}a_{22}^{\Delta};$$

$$c_1=R_{11}\left(a_{22}^{\Delta}\right)^2-2R_{12}a_{12}^{\Delta}a_{22}^{\Delta}+R_{22}\left(a_{12}^{\Delta}\right)^2+R_{11}.$$

Для процессов с типовыми КФ $R_i(\tau)$, $i=2,3,4$, отсюда получаем

$$a_1=2e^{-\alpha\Delta t}\cos\beta\Delta t;\ \ a_2=-e^{-2\alpha\Delta t}.$$

Здесь для КФ $R_4(\tau)$ нужно положить $\beta=0$. Для определения коэффициентов b_1, b_2 выполним факторизацию числителя, т. е. представим его в виде

$$P(z)=\frac{1}{z}\left(c_0z^2+c_1z+c_0\right)=\left|b_1z+b_2\right|^2,\ z=e^{j\lambda}.$$

Корни трехчлена $c_0z^2+c_1z+c_0$ имеют вид $v_{1,2}=-\dfrac{c_1}{2c_0}\pm\sqrt{\left(c_1/2c_0\right)^2-1}$.

В качестве v_1 примем тот из корней, который по модулю меньше единицы, он определяется формулой

$$v_1=-\frac{c_1}{2c_0}+\operatorname{sign}\left(\frac{c_1}{c_0}\right)\sqrt{\left(c_1/2c_0\right)^2-1}.$$

Второй корень равен $v_2=1/v_1$. Разлагая трехчлен на линейные множители, преобразуем $P(z)$ к виду

$$P(z)=c_0\left(z-v_1\right)\left[1-1/\left(zv_1\right)\right]=c\left(z-v_1\right)\left(\frac{1}{z}-v_1\right),$$

где $c=-c_0/v_1$ - положительная величина. Отсюда следует

$$P(z)=\left(\sqrt{c}z-\sqrt{c}v_1\right)\left(\sqrt{c}z^{-1}-\sqrt{c}v_1\right)=\left|b_1z+b_2\right|^2,$$

где $b_1=\sqrt{c}=\sqrt{-c_0/v_1}$, $z=e^{j\lambda}$, $b_2=-\sqrt{c}v_1=-v_1\sqrt{-c_0/v_1}$.

Для того, чтобы избавиться от переходного процесса, необходимо разыгрывать начальные условия $\left(x_0, x_1, \xi_2, \xi_1\right)$ как гауссовский четырехмерный случайный вектор с нулевым средним и корреляционной матрицей

$$R=\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & R_x(\Delta t) & 0 & 0\\ R_x(\Delta t) & \sigma_x^2 & 0 & b_1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & b_1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Для удобства пользования дискретный алгоритм моделирования процессов с типовыми КФ $R_i(\tau)$ и его параметры представлены в табл. 3.6. Приведенные в таблице выражения совпадают с формулами табл. 3.2.

Таблица 3.6

$R_i(\tau)$	Алгоритм	a_1	a_2	b_i
$R_1(\tau)$	$x_k = a_1 x_{k-1} + b_1 \xi_k$	ρ	–	$b_1 = \sigma_x \sqrt{1-\rho^2}$
$R_2(\tau)$	$x_k = a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + b_1 \xi_k + b_2 \xi_{k-1}$	$2\rho\cos\beta_\Delta$	$-\rho^2$	$b_1 = \sqrt{-\frac{c_0}{v_1}}$; $b_2 = -v_1 b_1$; $v_1 = -\aleph + \mathrm{sign}(\aleph)\sqrt{\aleph^2 - 1}$; $\aleph = c_1/(2c_0)$; $c_0 = a_{12}^{\Delta} R_{12} - R_{11} a_{22}^{\Delta}$; $c_1 = R_{11}\left(a_{22}^{\Delta}\right)^2 - 2R_{12}a_{12}^{\Delta}a_{22}^{\Delta} + R_{22}\left(a_{12}^{\Delta}\right)^2 + R_{11}$.
$R_3(\tau)$		$2\rho\cos\beta_\Delta$	$-\rho^2$	
$R_4(\tau)$		2ρ	$-\rho^2$	

3.6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ И АНАЛИЗ АДЕКВАТНОСТИ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим построение статистической модели СП путем определения параметров модели. Типичными моделями СП, которые могут легко реализованы на ЭВМ являются модели авторегрессии-скользящего среднего, рассмотренные в п. 3.4. Данная задача также называется **идентификацией модели** и решается она путем статистического оценивания параметров СП [2, 15].

В частности, идентификация модели осуществляется при исследовании статистических характеристик радиопомех и замираний в каналах связи, представимых в виде последовательности дискретных отсчетов $x_1,\ldots,x_n$, поскольку их огибающие удобно представлять в виде временных рядов с заданными корреляционными свойствами [3, 4].

На основе полученной выборки отсчетов $x_1,\ldots,x_n$ выполняется идентификация модели СП путем оценивания параметров модели, а именно дисперсии и коэффициентов корреляции:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2}{N-1}, \quad \hat{R}(1) = \frac{\sum_{k=1}^{N-1}(x_k - \bar{x})(x_{k+1} - \bar{x})}{\hat{\sigma}_X^2 (N-2)}, \ldots, \hat{R}(n) = \frac{\sum_{k=1}^{N-n}(x_k - \bar{x})(x_{k+n} - \bar{x})}{\hat{\sigma}_X^2 (N-n-1)}. \quad (3.72)$$

После этого составляется система уравнений Юла-Уокера (см. п. 3.4.1), которая, например, для АР модели 2-го порядка будут иметь вид

$$\begin{aligned} \rho_1 \quad &+ \rho_2 R(1) = R(1) \\ \rho_1 R(1) \; &+ \; \rho_2 \quad = R(2) \end{aligned}. \quad (3.73)$$

В систему уравнений (3.73) подставляются коэффициенты корреляции из (3.72) и находятся соответствующие коэффициенты авторегрессии. При этом в случае авторегрессии 1-го порядка вместо системы будет лишь равенство $\rho_1 = R(1)$.

Диагностическая проверка адекватности модели, заключается в выражении белого шума через коэффициенты авторегрессии, полученные из (3.73) и

входные наблюдения $\tilde{z}_t$ с помощью исходных уравнений авторегрессии. При диагностике АР моделей в качестве критерия адекватности принимается критерий проверки нулевой гипотезы относительно независимости соседних отсчетов разностей $\Delta_i = x_i - \rho x_{i-1} - \rho_2 x_{i-2}$. Для этого используется следующий тест

$$T_{набл} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{3.74}$$

где n- количество отсчетов в выборке, r - выборочный коэффициент корреляции остатков Δ_i модели авторегрессии. При этом имеем

$$\hat{\sigma}_\Delta^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\Delta_k - \overline{\Delta}\right)^2}{(N-1)}, \quad r = \frac{\sum_{k=1}^{N-1}\left(\Delta_k - \overline{\Delta}\right)\left(\Delta_{k+1} - \overline{\Delta}\right)}{\hat{\sigma}_\Delta^2 (N-2)}. \tag{3.75}$$

Обычно анализируется выборка размером $n > 200$, уровень значимости принимается равным 0.05. По таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости и числу степеней свободы $k = n - 2$ выбирается критическая точка $t_{кр}$=1.96 для двухсторонней критической области. Если $T_{набл} < T_{кр}$, то принимается решение о независимости остатков, т. е. об адекватности модели. В противном случае требуется вычислить еще один коэффициент корреляции исходной выборки $\hat{R}(k)$ и решить систему Юла-Уокера более высокого порядка, после чего повторить всю процедуру проверки адекватности. Очевидно, что чем выше порядок АР модели, тем она более гибкая в смысле аппроксимации параметров исходной выборки данных.

3.7. Заключительные замечания

Таким образом, задача цифрового моделирования СП формулируется как задача нахождения алгоритмов (по возможности наиболее простых), позволяющих получать на ЭВМ дискретные реализации (выборочные функции) моделируемых процессов. Это самостоятельная и довольно сложная задача синтеза дискретных СП, имитирующих непрерывные процессы с заданными статистическими характеристиками. Она решается путем отыскания удобных для реализации на ЭВМ линейных и нелинейных преобразований, с помощью которых можно превратить независимые равномерно или нормально распределенные случайные числа, вырабатываемые датчиком случайных чисел, в случайные последовательности с требуемыми вероятностными свойствами [1, 4, 7, 28].

Ввиду ограниченности объема данного пособия за рамками изложения остались многие специальные методы моделирования СП, такие как метод канонических разложений [1, 6], одномерные и двумерные модели разрывных СП [16], методы имитации импульсных помех на ЭВМ [4, 16] и др.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Решение различных задач математического моделирования, возникающих при проектировании телекоммуникационных систем, а также во многих других областях, приводит к необходимости получения на ЭВМ реализаций многомерных массивов СВ с заданными вероятностными характеристиками – **случайных полей**. Модели случайных полей используются для имитации фона в оптико-электронных системах, при описании свойств рельефа земной поверхности, для моделирования метеополей, применяются в устройствах фильтрации и кодирования изображений. Типичными примерами применения моделей многомерных случайных полей в системах связи являются: описание фазовых искажений на двумерной сетке время-частота; описание пространственно-временных сигналов в системах связи с несколькими антеннами (MIMO – Multi-Input Multi-Output).

При решении задач обработки случайных полей важным этапом является выбор адекватной модели наблюдений [5, 12, 31]. В настоящее время не существует универсального способа формирования случайных полей с произвольно заданными характеристиками. Поэтому известные модели случайных полей соответствуют реальным случайным полям лишь по ограниченному числу параметров (форма КФ, распределение амплитуд и т.п.) [8, 11, 12, 31, 41]. Ниже рассмотрен ряд известных моделей, которые могут быть использованы для приближенного описания случайных полей при синтезе различных алгоритмов обработки.

Наиболее изученными являются АР модели случайных полей [5, 20, 31]. Это объясняется тем, что на основе АР уравнений был разработан математический аппарат для моделирования случайных последовательностей (см. главу 3). Центральное место в его развитии, как и в области обычных одномерных сигналов, отводится теории **гауссовских полей**. Поскольку в подавляющем большинстве реальных информационных систем данные формируются в виде дискретных массивов, то в первую очередь интерес представляют методы описания дискретных полей. Поэтому ниже рассматриваются случайные поля, заданные на прямоугольных многомерных сетках.

В настоящем пособии при рассмотрении моделей случайных полей используется идея представления спектрально-корреляционных характеристик многомерных сигналов в разделимой по пространственным координатам форме [31]. Это дает возможность использования достижений теории одномерных сигналов, приводя к относительно простым ММ, уже позволившим получить решение ряда задач статистической обработки данных [20].

Эффективным методом решения разнообразных задач обработки сигналов служит спектральный анализ [8, 31, 43]. К сожалению, существует лишь узкий класс так называемых «разделимых» случайных полей на многомерных сетках [31], для которых можно получить полезные для приложений аналитические соотношения. В частности, важнейший класс изотропных случайных полей

дискретного аргумента не удается исследовать известными методами спектрального анализа. Это объясняется несоответствием декартовой системы координат в пространстве R_0^N точек с целочисленными координатами и естественной для изотропных случайных полей сферической системой координат в R^N.

В данной главе рассматриваются методы математического моделирования случайных полей, приводятся необходимые сведения об их характеристиках, дается обобщение параметрических (неканонических) представлений стационарных СП на случайные поля, исследуются свойства моделей полей и моделирующих алгоритмов.

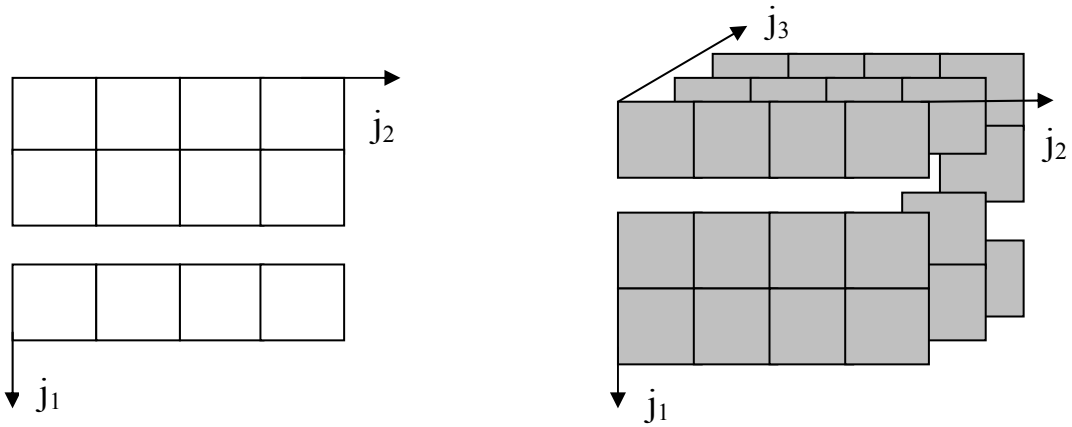
Задачи моделирования случайных полей относятся к сравнительно новой и еще мало изученной области в теории и практике статистического моделирования. Особую важность здесь приобретает проблема сокращения вычислительных затрат. Объемы вычислений и машинное время ЭВМ резко возрастают с ростом размерности случайного поля, а также с уменьшением шага дискретизации. Модели многомерных случайных полей (скалярных и векторных, гауссовских и негауссовских) теоретически мало изучены [41].

4.1. Моделирование многомерных дискретных случайных полей

Наиболее распространенными в настоящее время являются информационные комплексы, включающие в себя пространственные системы датчиков и цифровую вычислительную технику. Поэтому будем в основном рассматривать случайные поля с дискретными пространственными и временными переменными. Не ограничивая общности, будем считать, что случайные поля заданы на многомерных прямоугольных сетках с единичным шагом. На рис. 4.1, а и 4.1, б изображены двумерная и трехмерная сетки. В общем случае случайное поле задано в узлах n-мерной сетки $\Omega = \{\overline{j} = (j_1, ..., j_n) : j_k = \overline{1, M}_k,\ k = \overline{1, n}\}$.

В зависимости от физической природы значения отсчетов случайного поля могут быть скалярными (например, яркость монохроматического изображения) или векторными (поле скоростей, цветные изображения, поле смещений). Если обозначить через $x_{\overline{j}}$ значение отсчета случайного поля в узле (пикселе) $\overline{j}$, то случайное поле есть совокупность этих значений на сетке: $X = \{x_{\overline{j}} : \overline{j} \in \Omega\}$.

Если данные представляют собой временную последовательность сечений случайного поля (кадров), то иногда удобно считать эту последовательность одним случайным полем, увеличив размерность сетки на единицу. Например, последовательность случайных полей на плоскости (рис. 4.1, а) можно рассматривать как одно случайное поле на трехмерной сетке (рис. 4.1, б).



а б

Рис. 4.1. Двумерная (а) и трёхмерная (б) прямоугольные сетки

Если x_{ij} - некоторая физическая величина в точке (i,j), то совокупность отсчетов $\{x_{ij}\}$ представляет собой **реализацию** случайного поля X, являющегося случайной функцией $x(i,j,\xi)$ двух пространственных переменных и СВ ξ. Рассматривая подобные процессы развивающимися во времени, к пространственным переменным (i,j) нужно добавить еще и временную переменную i. При этом поле $X=\{x_{ij}^i\}$ становится трехмерным. Трехмерный массив изменяющихся во времени данных $\{x_{ijk}^i\}$ дает пример четырехмерного поля и т.д.

Если требуется временную переменную выделить особо, то будем ее записывать сверху: $X=\{x_{\bar{j}}^i : \bar{j}\in\Omega, i\in I\}$. Такое случайное поле задано на прямом произведении $\Omega\times I$ сеток Ω и I, где I – множество значений временного индекса. Сечение $x^i=\{x_{\bar{j}}^i : \bar{j}\in\Omega\}$, т. е. совокупность отсчетов случайного поля при фиксированном значении временного индекса i, называется i-м кадром случайного поля. Каждый кадр задан на сетке Ω. Например, на рис. 4.1, б изображено три двумерных кадра.

Для описания случайного поля, как и любой другой системы СВ, можно задать совместную функцию распределения вероятностей его элементов $F\left(x_{\bar{j}} : \bar{j}\in\Omega\right)=P\left(z_{\bar{j}}<x_{\bar{j}} : \bar{j}\in\Omega\right)$ или совместную ПРВ $w\left(x_{\bar{j}} : \bar{j}\in\Omega\right)$. Однако изображение обычно состоит из очень большого количества элементов (тысячи и миллионы), поэтому ПРВ при таком количестве переменных становится очень сложной и требуются другие, менее громоздкие методы описания случайных полей.

4.1.1. Алгоритмы формирования дискретных случайных полей

По своему строению случайные поля значительно сложнее СП. Во-первых, реализации случайного поля являются функциями нескольких переменных, теория которых принципиально сложнее теории функций одной переменной. Во-вторых, значительно усложняется понятие марковости.

СП можно представить развивающимся во времени, математическим выражением такого развития и является модель (3.1). Для марковских последовательностей временной интервал может быть разбит любой точкой *i* на условно независимые прошлое $\Gamma^- = \{x^k : k < i\}$ и будущее $\Gamma^+ = \{x^k : k > i\}$. Однако случайное поле определено на *n*-мерной области Ω, для геометрического разбиения которого на две части Γ^- и Γ^+ требуется, по меньшей мере, $(n-1)$-мерная область Γ. **Свойство марковости** случайного поля состоит в том, что для любого множества Γ (из некоторого класса множеств) СВ, входящие в Γ^-, условно независимы от СВ, входящих в Γ^+, при известных значениях Γ. Назвать Γ^-, Γ и Γ^+ прошлым, настоящим и будущим можно весьма условно. Тем не менее марковское свойство позволяет представить случайное поле также формирующимся во времени от Γ^- через Γ к Γ^+, причём Γ с течением времени перемещается по Ω. Например, если в качестве Γ брать строки двумерной сетки Ω, то поле X можно представить формирующимся построчно [20].

Дальнейшее развитие этой идеи позволяет обобщить АР модели случайных последовательностей на случайные поля. В связи с этим рассмотрим в общем виде задачу рекуррентного формирования случайного поля $\left\{x_{\bar{j}};\ \bar{j} = (j_1\ j_2\ \ldots\ j_N) \in J\right\}$ на N-мерной прямоугольной сетке $J = \left\{\bar{j},\ j_k = 1 + M_k,\ k = 1,2,\ldots,N\right\}$. При этом предполагается, во-первых, существование некоторой процедуры последовательного перебора точек $\bar{j} \in J$, т.е. правила линейного упорядочения точек $\bar{j}, \bar{l} \in J$, на основе которого можно сказать, что элемент $\bar{j}$ предшествует элементу $\bar{l}\ (\bar{j} < \bar{l})$ или наоборот. Во-вторых, должен быть задан алгоритм, определяющий, каким образом очередное значение случайного поля $x_{\bar{j}}$ может быть найдено на основе ранее вычисленных значений $\left\{x_{\bar{l}}, \bar{l} \in G_{\bar{j}}\right\}$, где $G_{\bar{j}} \subset J$ - некоторая область индексов $\bar{l} \in J$, предшествующих очередному элементу $\bar{j}$. Такую область $G_{\bar{j}}$ конечных размеров обычно называют **областью локальных состояний** [8, 12, 31]. Наконец, для формирования случайного поля $\left\{x_{\bar{j}}, \bar{j} \in J\right\}$ с определенными вероятностными характеристиками на каждом шаге рекуррентных вычислений функция $x_{\bar{j}} = \Phi_{\bar{j}}\left(x_{\bar{l}}, \bar{l} \in G_{\bar{j}}\right)$ должна включать в качестве аргумента совокупность $\left\{\xi_{\bar{l}}, \bar{l} \in Y_{\bar{j}}\right\}, Y_{\bar{j}} \subset J$ вспомогательных СВ.

Таким образом, представление случайного поля на основе рекуррентной процедуры должно иметь следующий вид

$$x_{\bar{j}} = \Phi_{\bar{j}}\left(x_{\bar{l}}, \bar{l} \in G_{\bar{j}};\ \xi_{\bar{i}}, i \in Y_{\bar{i}}\right), \tag{4.1}$$

где $G_{\bar{j}}$ - области элементов $\bar{l} \in J$, на которых уже определены предыдущие значения случайного поля $\left\{x_{\bar{l}}\right\}; \varphi_{\bar{j}}\left(x_{\bar{l}}; \xi_{\bar{l}}\right), \bar{j} \in J$, вообще говоря, нелинейные скалярные или векторные функции двух тензорных аргументов. Наиболее простым частным случаем (4.1) является линейное стохастическое уравнение

$$x_{\bar{j}} = \sum_{\bar{l} \in G_{\bar{j}}} \alpha_{\bar{j},\bar{l}} x_{\bar{l}} + \sum_{\bar{l} \in Y_{\bar{j}}} \beta_{\bar{j},\bar{l}} \xi_{\bar{l}},\ \bar{j} \in J \tag{4.2}$$

с белым гауссовским СП $\left\{\xi_{\bar{l}}\right\}$, соответствующее известному уравнению авторегрессии - скользящего среднего [2] для СП. Однако в отличие от своего одномерного аналога, свойства случайного поля $x_{\bar{j}}, \bar{j} \in J$, порождаемого (4.2), в настоящее время изучены не полностью даже для моделей (4.2) с постоянными коэффициентами $\alpha_{\bar{j},\bar{l}} = \alpha_{\bar{l}}$, $\beta_{\bar{j},\bar{l}} = \beta_{\bar{l}}$ и не изменяющимся видом областей $G_{\bar{j}} = G$ и $Y_{\bar{j}} = Y$:

$$x_{\bar{j}} = \sum_{\bar{l} \in G} \alpha_{\bar{l}} x_{\bar{j}-\bar{l}} + \sum_{\bar{l} \in Y} \beta_{\bar{l}} \xi_{\bar{j}-\bar{l}},\ \bar{j} \in J\,. \tag{4.3}$$

Если порядок формирования случайной последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ обычно соответствует наблюдаемым во времени значениям, то порядок формирования случайного поля $X = \{x_{\bar{j}} : \bar{j} \in \Omega\}$ требует дополнительного определения. Для этого нужно линейно упорядочить узлы сетки Ω, тогда про любые два элемента поля можно сказать, что один из них предшествует другому. Если $x_{\bar{i}}$ предшествует $x_{\bar{j}}$, то будем отмечать это как $\left(\bar{i}\right) < \left(\bar{j}\right)$, т. е. номер элемента $x_{\bar{i}}$ меньше номера $x_{\bar{j}}$ при данной развертке. Существует множество вариантов такого упорядочения. В двумерном случае чаще всего применяются **пилообразная** и **треугольная развертки** (рис. 4.2).

а б

Рис. 4.2. Пилообразная (а) и треугольная (б) развертки

В результате развертки поле преобразуется в случайную последовательность. Предположим, что она является марковской порядка *s*, т. е. условная ПРВ любого $x_{\bar{i}}$ относительно всех предшествующих ему элементов зависит только от элементов некоторого конечного отрезка

$\Gamma_{\bar{i}} = \{x_{\bar{j}} : (\bar{i}) - s \le (\bar{j}) < (\bar{i})\}$. Множество $\Gamma_{\bar{i}}$ называется **глобальным состоянием**. В двумерном случае оно при пилообразной (и треугольной) развертке включает в себя несколько последних строк и показано на рис. 4.3. Следовательно, можно представить $x_{\bar{i}}$ в каузальном виде как функцию элементов глобального состояния и возмущения $\xi_{\bar{i}}$:

$$x_{\bar{i}} = \varphi_{\bar{i}}(x_{\bar{j}} : \bar{j} \in \Gamma_{\bar{i}}; \xi). \tag{4.4}$$

Полученное выражение представляет **АР модель** случайного поля. Однако использовать (4.4) для представления полей на сетках больших размеров трудно, а для бесконечных сеток – невозможно ввиду большого или даже бесконечного числа аргументов функций $\varphi_{\bar{i}}$.

Преодолеть эту трудность позволяет то обстоятельство, что ПРВ $x_{\bar{i}}$ часто зависит не от всего глобального состояния $\Gamma_{\bar{i}}$, а только от некоторой его части $L_{\bar{i}}$, называющейся **локальным состоянием** и включающей в себя только достаточно близкие к $x_{\bar{i}}$ элементы поля, не упреждающие $x_{\bar{i}}$ относительно данной развертки. На рис. 4.3 область, соответствующая локальному состоянию $L_{\bar{i}}$, обозначена двойной штриховкой.

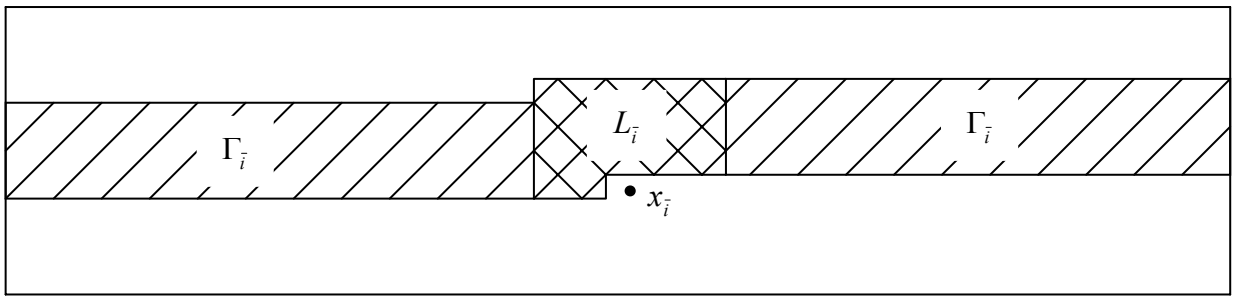


Рис. 4.3. Области локального и глобального состояний

В результате поле *X* может быть представлено АР моделью

$$x_{\bar{i}} = \varphi_{\bar{i}}\left(x_{\bar{j}} : \bar{j} \in L_{\bar{i}}; \xi_{\bar{i}}\right), \tag{4.5}$$

которая во многих случаях может быть приемлема для решения прикладных задач. Конечно, может оказаться, что даже область локального состояния $L_{\bar{i}}$ слишком велика, и возникают значительные технические трудности при имитации или обработке полей. В таких ситуациях можно $L_{\bar{i}}$ уменьшить до приемлемых размеров, используя полученную модель (4.5) как некоторое приближение к реальным физическим объектам.

4.1.2. Авторегрессионные модели случайных полей

Рассмотрим линейную гауссовскую АР модель

$$x_{\bar{i}} = \sum_{\bar{j} \in D} \alpha_{\bar{j}} x_{\bar{i}+\bar{j}} + \beta \xi_{\bar{i}}, \tag{4.6}$$

где применена многомерная развертка сетки Ω. Здесь $\alpha_{\bar{j}}$ – весовые коэффициенты; $\bar{i}+\bar{j}=(i_1,i_2,...,i_n)+(j_1,j_2,...,j_n)=(i_1+j_1,...,i_n+j_n)$; $\{(\bar{i}+\bar{j}):\bar{j}\in D\}=L_{\bar{i}}$ – локальное состояние; $\{\xi_{\bar{i}}:\bar{i}\in\Omega\}$ – система стандартных гауссовских СВ. Одним из первых подобную модель применительно к оценке плоских изображений исследовал Хабиби [20]:

$$x_{i_1\,i_2}=\rho_1 x_{i_1-1,i_2}+\rho_2 x_{i_1,i_2-1}-\rho_1\rho_2 x_{i_1-1,i_2-1}+\sigma\sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}\,\xi_{i_1i_2}. \quad (4.7)$$

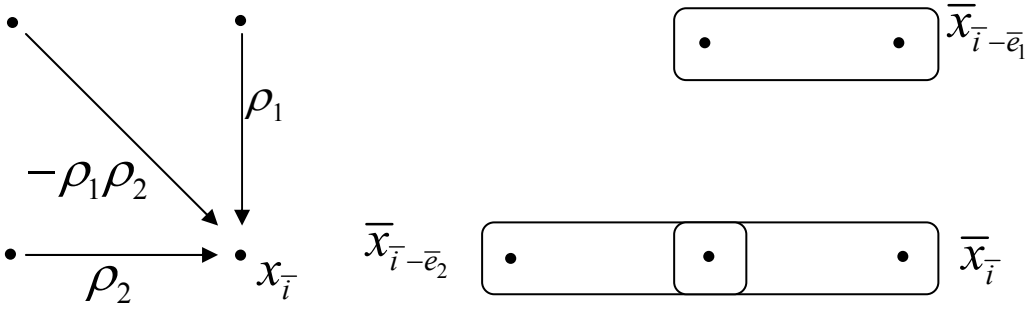
При этом первый элемент поля формируется как $x_{1,1}=\sigma_X\xi_{1,1}$;

первый столбец $x_{i_1,1}=\rho_1 x_{i_1-1,1}+\sigma_X\sqrt{1-\rho_1}\,\xi_{i_1,1}$;

первая строка $x_{1,i_2}=\rho_2 x_{1,i_2-1}+\sigma_X\sqrt{1-\rho_2}\,\xi_{1,i_2}$.

Схема вычислений для этой модели представлена на рис. 4.4, а. Порождаемое поле имеет разделимую экспоненциальную КФ

$$V_x(i_1,i_2)=M\left[x_{i_1i_2}x_{00}\right]=\sigma^2\rho_1^{|i_1|}\rho_2^{|i_2|}. \quad (4.8)$$



а б

Рис. 4.4. Схемы формирования авторегрессионных СП

Перепишем (4.7) в виде

$$\left(1-\rho_1 z_1^{-1}\right)\left(1-\rho_2 z_2^{-1}\right)x_{i_1,i_2}=\sigma_x\sqrt{\left(1-\rho_1^2\right)\left(1-\rho_2^2\right)}\,\xi_{i_1,i_2},$$

где $z_1^{-1}x_{i_1,i_2}=x_{i_1-1,i_2}$, $z_2^{-1}x_{i_1,i_2}=x_{i_1,i_2-1}$ - операторы сдвига вдоль соответствующих направлений.

Для n-мерного случая будем иметь

$$\begin{aligned}&\left(1-\rho_1 z_1^{-1}\right)\left(1-\rho_2 z_2^{-1}\right)\ldots\left(1-\rho_n z_n^{-1}\right)x_{i_1,i_2,\ldots,i_n}=\\&=\sigma_x\sqrt{\left(1-\rho_1^2\right)\left(1-\rho_2^2\right)\ldots\left(1-\rho_n^2\right)}\,\xi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\end{aligned} \quad (4.9)$$

или $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\rho_k z_k^{-1}\right)x_{\bar{i}}=\sigma_\xi\,\xi_{\bar{i}}$, где $\sigma_\xi^2=\sigma_x^2\prod_{k=1}^{n}\left(1-\rho_k^2\right)$.

Порождаемое поле является **анизотропным** и имеет множительную КФ

$$V_x\left(i_1,\ldots,i_n\right)=\sigma^2\prod_{k=1}^{n}\rho_k^{|i_k|}.$$

На основе модели (4.7) разработано большое количество алгоритмов фильтрации случайных полей. Однако она, как и ее многомерный вариант (4.9), имеет существенный недостаток – множительность (факторизуемость) КФ. В двумерном случае элементы поля, одинаково коррелированные с элементом $x_{i_1 i_2}$, расположены на ромбе с центром в $\left(i_1, i_2\right)$, а в многомерном случае – на ромбоиде, хотя более естественными сечениями КФ для реальных полей были бы эллипс и эллипсоид (рис. 4.5). Для частичного скругления сечений КФ можно отказаться от частного вида весовых коэффициентов (4.9), а также расширить область локальных состояний. Однако такое расширение приводит к резкому увеличению числа слагаемых в (4.6).

Существенного скругления сечений КФ случайного поля позволяют достичь модели с кратными корнями характеристических уравнений одномерных АР моделей [45]. Решим сначала эту задачу для одномерной модели, для чего рассмотрим одномерную авторегрессию длины M:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_{i-j}+\beta\xi_i,\quad i=\overline{1\ldots M}.$$

Здесь $\{\xi_i\}$ – гауссовская последовательность независимых компонент с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_ξ^2. Решение задачи синтеза будет заключаться в том, чтобы по заданным $1/\rho$ – корню характеристического уравнения, n – его кратности и σ_x^2 – требуемой дисперсии поля определить неизвестные коэффициенты авторегрессии $\left\{\alpha_j,\ j=\overline{1\ldots n};\ \beta\right\}$.

Модели (4.6) и её частному случаю (4.10) соответствует пространственный линейный фильтр с передаточной функцией

$$H\left(\bar{z}\right)=\frac{\beta}{1-\sum_{\bar{j}\in D}\alpha_{\bar{j}}\bar{z}^{-\bar{j}}},\qquad(4.11)$$

где $\bar{z}^{-\bar{j}}=z_1^{-j_1}z_2^{-j_2}\ldots z_N^{-j_N}$. При этом спектральная плотность случайного поля X записывается следующим образом:

$$S_x\left(\bar{z}\right)=H\left(\bar{z}\right)S_\xi\left(\bar{z}\right)H\left(\bar{z}^{-1}\right)=\sigma_\xi^2H\left(\bar{z}\right)H\left(\bar{z}^{-1}\right).$$

КФ поля X может быть найдена с помощью обратного z-преобразования спектральной плотности:

$$R\left(\bar{r}\right)=\frac{\beta^2}{\left(2\pi i\right)^N}\oint_{C_N}S_x\left(\bar{z}\right)\bar{z}^{\bar{r}-\bar{1}}d\bar{z},\qquad(4.12)$$

где $C_N = \{|\bar{z}| = 1\}$ – единичная полиокружность в многомерном комплексном пространстве.

В случае с кратными корнями уравнение (4.10) можно записать в операторной форме следующим образом:

$$\left(1 - \rho z^{-1}\right)^n x_i = \beta \xi_i, \quad i = \overline{1 \ldots M}, \tag{4.13}$$

где z^{-1} – оператор сдвига. Учитывая, что действие оператора сдвига на i-й элемент последовательности определяется как $z^{-k} x_i = x_{k-i}$, перепишем (4.13) в явном виде:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} C_n^j \rho^j x_{i-j} + \beta \xi_i, \quad i = \overline{1 \ldots M}. \tag{4.14}$$

Сравнение (4.13) и (4.14) дает возможность записать выражение для коэффициентов $\alpha_j = \alpha_j(\rho, n)$:

$$\alpha_j(\rho, n) = (-1)^{j+1} C_n^j \rho^j, \quad j = \overline{1 \ldots n}. \tag{4.15}$$

Значение неизвестного параметра β, являющегося коэффициентом усиления в передаточной функции (4.11), должно выбираться так, чтобы фильтр был устойчив. Далее будет показано, как можно определить β на основе КФ модели.

Одной из задач статистического анализа модели, является получение ее КФ [45]. Найдем вначале нормированную КФ, т. е. будем полагать $\sigma_x^2 = \sigma_\xi^2 = 1$. Для решения этой задачи воспользуемся формулой (4.12), записанной для одномерного случая

$$R(k) = \frac{\beta^2}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{z^{k-1}}{(z - \rho)^n \left(z^{-1} - \rho\right)^n} dz.$$

Так как подынтегральная функция имеет в точке $z = \rho$ полюс порядка n, то интеграл представляет собой коэффициент c_{-n} ее разложения в ряд Лорана, и поэтому может быть найден с использованием методов теории вычетов

$$R(k) = \beta^2 \operatorname*{Res}_{\rho} \left[\frac{z^{k-1}}{(z - \rho)^n \left(z^{-1} - \rho\right)^n} \right] = \frac{\beta^2}{(n-1)!} \lim_{z \to \rho} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left\{ \frac{z^{n+k-1}}{(1 - \rho z)^n} \right\}.$$

Используя правила дифференцирования произведения функций, после предельного перехода получаем

$$R(k)=\beta^2(\rho,n)\rho^k\sum_{\ell=0}^{n-1}g(n,\ell,k)\frac{\rho^{2(n-\ell-1)}}{\left(1-\rho^2\right)^{2n-\ell-1}},$$

(4.16)

где

$$g(n,\ell,k)=\frac{(n+k-1)!(2n-\ell-2)!}{\ell!(n-1)!(n-\ell-1)!(n+k-\ell-1)!},$$

а коэффициент $\beta=\beta(\rho,n)$ находится из условия $R(0)=1$:

$$\beta^2(\rho,n)=\frac{\left(1-\rho^2\right)^{2n-1}}{\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(C_{n-1}^{\ell}\rho^{\ell}\right)^2}.$$

(4.18)

Формулы (4.16)-(4.18) дают, при заданных ρ и n, общий вид нормированной КФ одномерной модели (4.10). Для того чтобы получить КФ при не равных единице дисперсиях σ_x^2 и σ_ξ^2, необходимо домножить правую часть (4.18) на σ_x^2/σ_ξ^2. Тем самым, получаем выражение для коэффициента β:

$$\beta=\frac{\sigma_x}{\sigma_\xi}\sqrt{\frac{\left(1-\rho^2\right)^{2n-1}}{\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(C_{n-1}^{\ell}\rho^{\ell}\right)^2}}.$$

(4.19)

Формулы (4.15) и (4.19) полностью определяют неизвестные коэффициенты одномерной АР модели (4.10) с кратными корнями характеристических уравнений [45].

Рассмотрим теперь случай N измерений. Модель случайного поля, при заданной дисперсии σ_x^2, полностью определяется вектором параметров $(\rho_1,\rho_2,\ \ldots\ ,\rho_N)$ и вектором кратностей $(n_1,n_2,\ldots,n_N)$ характеристических корней.

Пусть многомерное разделимое случайное поле порождается следующими АР уравнениями, записанными в операторной форме:

$$\prod_{k=1}^{N}\left(1-\rho_k z_k^{-1}\right)^{n_k}x_{\bar{i}}=\beta\xi_{\bar{i}},\quad \bar{i}\in\Omega,$$

(4.20)

где N – размерность поля; ρ_k и n_k – параметр и кратность корней модели вдоль k-й оси; Ω – сетка, на которой определено поле X.

Определим коэффициенты авторегрессии для многомерной модели с кратными корнями. Для этого раскроем в (4.20) скобки:

$$\left(\prod_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{n_k}\alpha_{kl}z_k^{-l}\right)x_{\bar{i}} = \beta\xi_{\bar{i}},$$

$$\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\ldots\sum_{j_N=0}^{n_N}\alpha_{\bar{j}}x_{\bar{i}-\bar{j}} = \beta\xi_{\bar{i}}, \quad \bar{i}\in\Omega.$$

(4.21)

Шаблон коэффициентов модели $\left\{\alpha_{\bar{j}}, \quad \bar{j}=(j_1,j_2,\ldots,j_N), \quad j_k=\overline{1\ldots n_k}\right\}$ определен на N-мерном параллелепипеде размера $(n_1+1)\times(n_2+1)\times\ldots\times(n_N+1)$. Из (4.20) и (4.21) следует, что коэффициенты $\alpha_{\bar{j}}$ являются произведениями соответствующих коэффициентов α_{kj_k} одномерных авторегрессий вдоль k-й оси:

$$\alpha_{\bar{j}} = \prod_{k=1}^{N}\alpha_{kj_k},$$

(4.22)

где $\bar{j}=(j_1,j_2,\ldots,j_N), \; j_k=\overline{1\ldots n_k}$. Коэффициент β многомерной модели (4.21) находится аналогично:

$$\beta = \frac{\sigma_x}{\sigma_\xi}\prod_{k=1}^{N}\beta_k,$$

(4.23)

где β_k – соответствующий нормированный одномерный коэффициент.

Таким образом, выражение (4.21) дает общий вид АР модели многомерного разделимого гауссовского случайного поля, а формулы (4.22) и (4.23) полностью определяют ее коэффициенты, т. е. задача синтеза модели решена. КФ модели (4.21), как уже отмечалось, является произведением КФ соответствующих одномерных авторегрессий:

$$R(\bar{r}) = \prod_{k=1}^{N}R_k(r_k).$$

Для того чтобы корни характеристического уравнения были действительными, необходимо, чтобы параметр ρ выбирался из диапазона от нуля до единицы. Чем больше значение ρ, тем более крупные детали появляются на моделируемом изображении, т. е. этот параметр характеризует величину связи между соседними элементами.

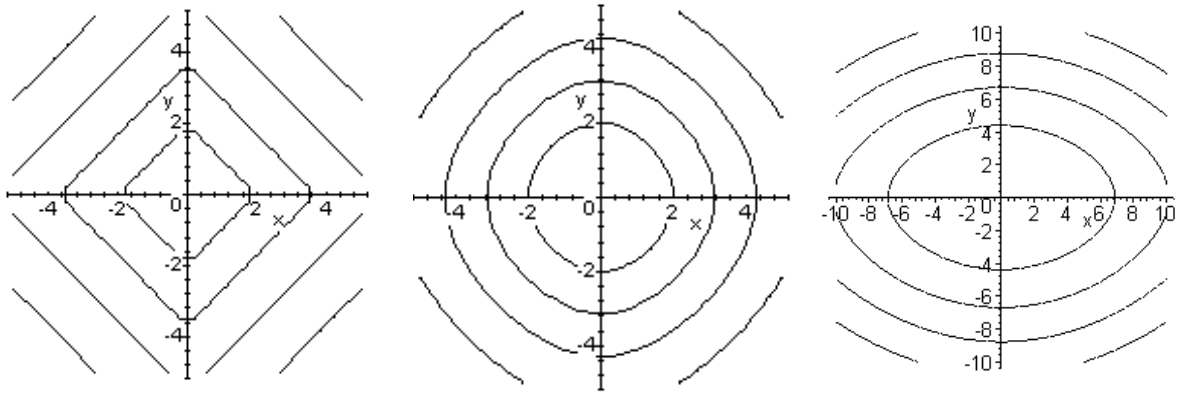
Рассмотрим некоторые примеры. Хорошо изученная трехточечная модель Хабиби (4.7) является частным случаем 2-мерной модели (4.21) кратности (1,1), причем значение параметра ρ задает коэффициент корреляции соседних элементов. Легко видеть, что ее КФ, вычисленная по формулам (4.16), (4.24), совпадает с (4.8):

$$R(i,j) = \sigma_x^2 \rho_y^{|i|} \rho_x^{|j|}.$$

Для 2-мерной модели кратности (2,2) КФ записывается более сложно [45]:

$$R(i,j) = \sigma_x^2 \rho_y^{|i|} \rho_x^{|j|} \left(1 + |i| \frac{1-\rho_y^2}{1+\rho_y^2}\right)\left(1 + |j| \frac{1-\rho_x^2}{1+\rho_x^2}\right).$$

Анализ приведенных результатов показывает, что, варьируя параметры связи и соотношения кратностей, можно получить широкий спектр разнотипных текстур, на основе которых возможно построение комплексных моделей многозональных изображений, причем, с ростом кратности корней, случайное поле приближается по свойствам к изотропному. Это подтверждается также видом сечений равного уровня КФ, приведенных на рис. 4.5.



а) кратность (1, 1), параметры (0.9, 0.9)

б) кратность (3, 3), параметры (0.9, 0.9)

в) кратность (2, 3), параметры (0.9, 0.9)

Рис. 4.5. Сечения КФ двумерной модели с кратными корнями

Полезный во многих приложениях вариант модели многомерного случайного поля можно получить, взяв за основу одномерную авторегрессию с кратными корнями. Пусть необходимо сформировать реализации N-мерного случайного поля $X = \{x_{\bar{j}},\ \bar{j} \in \Omega\}$ заданного на сетке

$\Omega = \left\{\left(\overline{1, M_1}\right) \times \left(\overline{1, M_2}\right) \times ... \times \left(\overline{1, M_N}\right)\right\}$. Это можно сделать следующим образом: вначале моделируется N одномерных АР последовательностей $\left\{\vec{x}^k = \left(x_1^k, x_2^k, ..., x_{M_k}^k\right),\ k = 1...N\right\}$ на основе модели с кратными корнями (4.14) ($\vec{n} = \left(n_1, n_2, ..., n_N\right)$ – вектор кратностей вдоль соответствующих осей). Далее, элемент $x_{\bar{j}}$ поля X получается перемножением соответствующих элементов одномерных последовательностей:

$$x_{\bar{j}} = \prod_{k=1}^{N} x_{j_k}^k,\ \ \bar{j} = \left(j_1, j_2, ..., j_N\right) \in \Omega.$$

Найдем КФ данной модели, для чего умножим (4.25) на $x_{\bar{j}+\bar{s}},\ \bar{j} + \bar{s} = \left(j_1 + s_1, j_2 + s_2, ..., j_N + s_N\right)$ и найдем

$$M\left\{x_{\bar{j}} x_{\bar{j}+\bar{s}}\right\} = \prod_{k=1}^{N} M\left\{x_{j_k}^k x_{j_k+s_k}^k\right\} = \prod_{k=1}^{N} R^k\left(s_k\right).$$

Здесь $R^k(\cdot)$ – КФ (4.16) одномерной АР модели вдоль k-й оси. Таким образом, данная модель является разделимой моделью случайного поля, причем ее КФ совпадает с КФ N-мерной АР модели с кратными корнями. Закон распределения вероятностей такого случайного поля оказывается негауссовским и, в общем случае N, достаточно сложным. Вместе с тем, рассмотренная модель отличается простотой и очень малыми вычислительными затратами. Действительно, даже для простейшего случая $N = 2$ одномерная ПРВ случайного поля находится как ПРВ произведения двух гауссовских СВ в виде [38]:

$$w\left(x_j\right) = \frac{1}{\sigma_x^4} K_0\left(\frac{x_j}{\sigma_x^4}\right),$$

где $K_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя третьего рода нулевого порядка.

Проведем оценку вычислительной сложности предложенной модели. Для получения реализации N-мерного СП, определенного на сетке размером $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_N$ элементов, требуется $O\left(\prod_{k=1}^{N}\left(n_k + 1\right) M_k\right)$ операций умножения.

4.2. Алгоритмы моделирования непрерывных случайных полей

Для специальных классов распределений задача моделирования случайного вектора может быть существенно упрощена. В приложениях часто приходится моделировать изотропные случайные векторы [4, 41]. К этому

классу распределений приводит, например, моделирование изотропных случайных полей. Случайный вектор $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ называется **изотропным**, если его орт $\mathbf{e}=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ распределен равномерно на поверхности m-мерной сферы и не зависит от распределения величины $|\mathbf{x}|$. Здесь $|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_m^2}$ - модуль вектора. Для того, чтобы случайный вектор $\mathbf{x}$ был изотропным, необходимо и достаточно, чтобы его ПРВ зависела только от модуля $\mathbf{x}$, т. е.

$$w(\mathbf{x})=w(|\mathbf{x}|),$$

где $w(x)$ - некоторая неотрицательная функция, $x\in(0,+\infty)$.

Переходя к сферической системе координат $\left(r,\overset{\circ}{\mathbf{x}}\right)$, можно представить ПРВ изотропного случайного вектора в виде

$$w\left(r,\overset{\circ}{\mathbf{x}}\right)=w_0(r)/|S_1|,$$

где $|S_1|=2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$ - площадь поверхности единичной сферы в m-мерном пространстве; r и $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ соответственно длина вектора и его проекция на сферу единичного радиуса; $w_0(r)$ - плотность распределения $|\mathbf{x}|$:

$$w_0(r)=w(r)r^{m-1}|S_1|. \tag{4.26}$$

Моделирование изотропного случайного вектора осуществляется по формуле $\mathbf{x}=|\mathbf{x}|\mathbf{e}$, где $|\mathbf{x}|$ - СВ с плотностью $w_0(r)$, $\mathbf{e}=(e_1,\ldots,e_m)$ - реализация изотропного направления в m-мерном пространстве R^m. Вектор $\mathbf{e}$ является ортом вектора $\mathbf{x}$, $|\mathbf{e}|=1$. При $m=2$ изотропное направление задается на плоскости полярным углом φ, равномерно распределенным на $[0,2\pi]$. Моделирующий алгоритм имеет вид

$$e_1=\cos\varphi;\ \ e_2=\sin\varphi;\ \ \varphi\sim\mathrm{Uni}[0,2\pi]. \tag{4.27}$$

Рассмотрим **двухпараметрическую модель** случайного поля [41]. Пусть требуется получить в области $D\subset R^m$ реализацию однородного вещественного случайного поля $X(\mathbf{x})$ с заданным математическим ожиданием m_X, дисперсией σ_X^2 и КФ $K_X(\mathbf{x})=\sigma_X^2\rho_X(\mathbf{x})$. Здесь $\rho_X(\mathbf{x})$ - нормированная КФ случайного поля. Следует отметить, что задача моделирования случайного поля по заданным двум первым моментам математически однозначно определена лишь для гауссовского поля. Для негауссовских полей данная задача не имеет однозначного решения [11].

Нормированная КФ $\rho_X(\mathbf{x})$ связана преобразованиями Фурье со спектральной плотностью $S_X(\mathbf{u})$, которую мы будем считать нормированной условием $\int\limits_{R^m}S_X(\mathbf{u})d\mathbf{u}=1$. Рассмотрим модель случайного поля

$$\zeta(\mathbf{x})=m_X+\sigma_X z\left\{\cos\left[\mathbf{v}^T(\mathbf{x}_0+\mathbf{x})\right]+\sin\left[\mathbf{v}^T(\mathbf{x}_0+\mathbf{x})\right]\right\}, \tag{4.28}$$

где $\mathbf{v} \in R^m$ - m-мерный случайный вектор с ПРВ равной $S_X(\mathbf{u})$; z - СВ с ПРВ $w_z(\lambda)$, не зависящая от $\mathbf{v}$, $M\{z\} = 0$, $M\{z^2\} = 1$; $\mathbf{x}_0$ - начальный детерминированный вектор; $\mathbf{x}$ - аргумент поля; $\mathbf{v}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x})$ - скалярное произведение векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}$.

Моделирование случайного поля на основе параметрической модели (4.28) сводит задачу к получению реализаций m-мерного случайного вектора $\mathbf{v}$, имеющего ПРВ равную спектральной плотности $S_X(\mathbf{u})$ моделируемого поля. Моделирование вектора $\mathbf{v}$ значительно упрощается при имитации специальных классов полей. Рассмотрим распространенный на практике случай изотропных случайных полей, имеющих корреляционные и спектральные характеристики, зависящие от модулей соответствующих векторов:

$$\rho_X(\mathbf{x}) = \rho_0(|\mathbf{x}|); \quad S_X(\mathbf{u}) = S_0(|\mathbf{u}|).$$

При моделировании изотропных полей распределение вектора $\mathbf{v}$ также изотропно. Моделирование изотропного случайного вектора $\mathbf{v}$ сводится к моделированию его модуля $|\mathbf{v}|$ - СВ с плотностью распределения $w_0(u)$ (4.26) и орта $\mathbf{e}$, задающего изотропное направление в пространстве частот. Для двух- и трехмерных полей плотности $w_0(u)$ равны соответственно

$$\varphi_0(u) = \begin{cases} 2\pi u S_0(u), & m = 2; \\ 4\pi u^2 S_0(u), & m = 3, u \in R^1. \end{cases} \tag{4.29}$$

Алгоритмы моделирования $|v|$ для двух- и трехмерных полей с типовыми характеристиками представлены в табл. 4.1. ПРВ $|\mathbf{v}|$ вычислялись по формулам (4.29) и указанным в табл. 4.1 типовым спектрам. Вывод моделирующих алгоритмов дан в главе 2. Для двумерных полей изотропное направление задается формулой (4.27); в трехмерном случае удобен алгоритм:

$$\mathbf{e}_1 = 1 - 2\gamma_1; \quad \mathbf{e}_2 = \sqrt{1 - \mathbf{e}_1^2}\cos(2\pi\gamma_2); \quad \mathbf{e}_3 = \sqrt{1 - \mathbf{e}_1^2}\sin(2\pi\gamma_2).$$

Таблица 4.1

m	Номер алгоритма	Нормированная корреляционная функция $\rho_0(x)$		Моделирующий алгоритм $\lvert v\rvert$
$m=2$	1	$\exp\left(-\alpha\lvert x\rvert\right)$	$\frac{1}{2\pi\alpha^2}\left(1+\lvert u\rvert^2/\alpha^2\right)^{-3/2}$	$\alpha\sqrt{1/\gamma^2-1}$
	2	$\left[1+\alpha^2\lvert x\rvert^2\right]^{-3/2}$	$\frac{1}{2\pi\alpha^2}\exp\left(-\lvert u\rvert/\alpha\right)$	$-\alpha\ln\left(\gamma_1\gamma_2\right)$
	3	$\exp\left(-\alpha^2\lvert x\rvert^2/2\right)$	$\frac{1}{2\pi\alpha^2}\exp\left(-\lvert u\rvert^2/2\alpha^2\right)$	$\alpha\sqrt{-2\ln\gamma}$
	4	$\sin\left(\alpha\lvert x\rvert\right)/\left(\alpha\lvert x\rvert\right)$	$\frac{1}{2\pi\alpha^2}\left(1-\lvert u\rvert^2/\alpha^2\right)^{-1/2}$	$\alpha\sqrt{1-\gamma^2}$
$m=3$	1	$\exp\left(-\alpha\lvert x\rvert\right)$	$\frac{\alpha}{\pi^2\left(\alpha^2+\lvert u\rvert^2\right)^2}$	$\alpha\sqrt{\xi_1^2-2\ln\gamma}\,/\lvert\xi_2\rvert$
	2	$\exp\left(-\alpha^2\lvert x\rvert^2/2\right)$	$\frac{(2\pi)^{-3/2}}{\alpha^3}\exp\left(-\frac{u^2}{2\alpha^2}\right)$	$\alpha\sqrt{\xi_1^2-2\ln\gamma}$

Примечание. $\gamma,\ \gamma_1,\ \gamma_2\sim\mathrm{Uni}[0,1];\quad \xi_1,\ \xi_2\sim N(0,1)$.

Моделирующие алгоритмы в многомерном случае можно найти в работе [13].

Как уже отмечалось, ряд **моделей анизотропных полей** описываются с помощью КФ множительного вида

$$\rho_{\xi}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{m} \rho_i(x_i). \tag{4.30}$$

Аргументы нормированных КФ $\rho_i(x_i)$ - компоненты вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. В этом случае спектральная плотность равна

$$S_{\xi}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{m} S_i(u_i); \quad S_i(u_i) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} S_i(u_i)\, du_i = 1$$

и, следовательно, компоненты вектора **v** - независимые величины с ПРВ, равными $S_i(u_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Моделирование **v** осуществляется последовательным разыгрыванием реализации его компонент $v_1, \ldots, v_m$ как независимых СВ.

В табл. 4.2 представлены алгоритмы моделирования компонент вектора **v** для полей, имеющих КФ вида (4.30) с типовыми характеристиками. Алгоритм 1 моделирует распределение Коши, алгоритм 2 - нормальное распределение, алгоритм 3 - равномерное распределение на отрезке $[-\alpha, \alpha]$. Моделирующие алгоритмы 4 и 5 выведены в главе 2.

Таблица 4.2

Номер алгоритма	Нормированная корреляционная функция $\rho_i(x)$		Моделирующий алгоритм v_i
1	$\exp(-\alpha\lvert x\rvert)$	$\dfrac{\alpha}{\pi(\alpha^2+u^2)}$	$\alpha\ \mathrm{tg}\left[\pi(\gamma-1/2)\right]$
2	$\exp(-\alpha^2x^2/2)$	$\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\exp\left[-u^2/(2\alpha^2)\right]$	$\alpha\xi$

3	$\sin(\alpha\|x\|)/(\alpha\|x\|)$	$S_i(u)=\begin{cases}1/(2\alpha), & u\in[-\alpha,\alpha]\\ 0, & u\notin[-\alpha,\alpha]\end{cases}$	$2\alpha(\gamma-1/2)$
4	$\exp(-\alpha\|x\|)\cos\beta x$	$\frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha^2+(\beta+u)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(\beta-u)^2}\right]$	$\alpha\ \mathrm{tg}[\pi(\gamma-1/2)]+\beta\aleph$
5	$\exp(-\alpha^2x^2/2)\cos\beta x$	$\frac{\exp\left\{-\frac{(u+\beta)^2}{2\alpha^2}\right\}+\exp\left\{-\frac{(u-\beta)^2}{2\alpha^2}\right\}}{2\alpha\sqrt{2\pi}}$	$\alpha\xi+\beta\aleph$

Примечание. $\gamma\sim\mathrm{Uni}[0,1]$; $\xi\sim N(0,1)$; $\aleph=\pm1$ с вероятностью $p=0.5$.

Ряд анизотропных случайных полей, в частности, поля, имеющие эллиптическую анизотропию, могут моделироваться как изотропные случайные поля. Анизотропия воспроизводится на ЭВМ изменением масштаба аргумента поля. Например, двумерное случайное поле с КФ вида

$$\rho_X(x,y)=\exp\left[-\sqrt{(x/r_x)^2+(y/r_y)^2}\right] \tag{4.31}$$

заменой $y'=Ly$ сводится к изотропному случайному полю вида 1 (табл. 4.1), $\alpha=1/r_x$. Здесь $(x,y)\in R^2$, r_x, r_y - интервалы корреляции поля вдоль осей X, Y соответственно, $L=r_x/r_y$ - степень анизотропии. Обратной заменой $y=y'/L$, которая соответствует сжатию реализации вдоль оси Y (при $L>1$) и растяжению (при $L<1$), осуществляется переход от изотропного поля к модели (4.31).

Для поля со спектральной плотностью и КФ вида

$$S_X(\mathbf{u})=(2\pi)^{-m/2}\sqrt{\det B}\exp(-\mathbf{u}^TB\mathbf{u}/2),\qquad \rho_X(\mathbf{x})=\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^TB^{-1}\mathbf{x}\right),$$

где B - положительно определенная матрица порядка m, реализации вектора $\mathbf{v}$ получаются моделированием m-мерного гауссовского вектора с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей B^{-1}.

4.3. Заключительные замечания

Рассмотренный круг моделей случайных полей не является исчерпывающим. Модели высших порядков могут обеспечить лучшую аппроксимацию реальных изображений. Однако выбор модели обусловлен, помимо требования точности описания, возможностью построения эффективного алгоритма обработки [8, 11, 31]. С учетом этого рассмотренные модели хорошо соответствуют реальным данным, обладают существенными преимуществами с вычислительной точки зрения, позволяя строить рекуррентные процедуры оценивания и использовать при обработке быстрые спектральные преобразования [8].

Многомерные случайные поля стали объектом исследований сравнительно недавно, и именно этим объясняется далекое от завершения, а во многих случаях носящее постановочный характер, изложение рассмотренных ММ на пространственных сетках. При отборе вероятностных моделей случайных полей в данной работе предпочтение было отдано таким методам представления случайных полей на многомерных сетках, которые позволяют дать наиболее простое и, вместе с тем, полное вероятностное описание случайных полей, позволяющее решать разнообразные задачи статистического синтеза и анализа систем. В результате за рамками изложения остались важнейший класс гиббсовских случайных полей [30], имитация которых во многих случаях требует больших вычислительных затрат, а также множество моделей, например, волновых [20] и тензорных [20, 31], которые применяются в задачах статистического моделирования для оценки эффективности и устойчивости алгоритмов, предназначенных для практического использования.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ И СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Системы массового обслуживания (СМО) отражают процессы функционирования многих современных сложных систем. Теория массового обслуживания получила свое первоначальное развитие благодаря запросам телефонии при изучении процесса загрузки телефонной станции [6, 18, 21].

Примеры СМО: телефонные станции, билетные кассы, системы организации транспорта (грузоперевозки, поток автомобилей через мост) и т. п. Каждая такая система состоит из некоторого количества обслуживающих единиц: «каналов» обслуживания (например, линии связи). Работа любой СМО состоит в обработке (обслуживании) поступающего на нее потока требований или **заявок**. Заявки поступают одна за другой в случайные моменты времени. Обслуживание поступившей заявки продолжается какое-то время, после чего канал освобождается и может принимать следующую заявку.

Каждая СМО, в зависимости от числа каналов и их производительности, обладает некоторой пропускной способностью, позволяющей ей более или менее успешно справляться с потоком заявок. Под **пропускной способностью** в узком смысле слова обычно понимают среднее число заявок, которое система может обслужить в единицу времени. Случайный характер потока заявок приводит либо к отказам, либо к образованию очередей. На случайности, связанные с характером потока заявок, накладывается еще случайное время обслуживания отдельных заявок в каналах СМО.

Таким образом, предметом теории массового обслуживания является установление зависимостей между характером потока заявок, производительностью отдельных каналов, числом каналов и показателями эффективности обслуживания.

5.1. Модели случайных потоков

5.1.1. Виды потоков и способы их задания

В теории массового обслуживания вводится в рассмотрение модель потока событий. **Потоком событий** называется последовательность событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ (рис. 5.1). Потоки событий, происходящих в случайные моменты времени $t_1, t_2 > t_1, ..., t_n > t_{n-1}, ...$, являются специфичным классом СП. Они используются в качестве ММ при исследовании СМО, в задачах приема импульсных сигналов, в задачах надежности и др. [21]

На рис. 5.1 изображена одна реализация потока событий. При этом в качестве событий могут быть, например, заявки на входе СМО и заявки на выходе СМО.

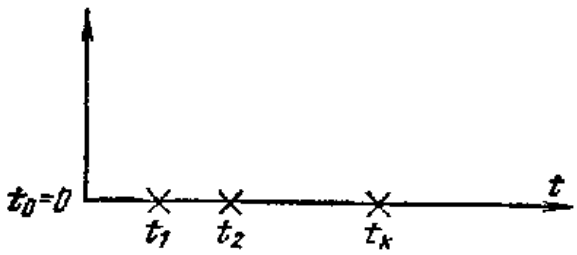


Рис. 5.1. Поток событий

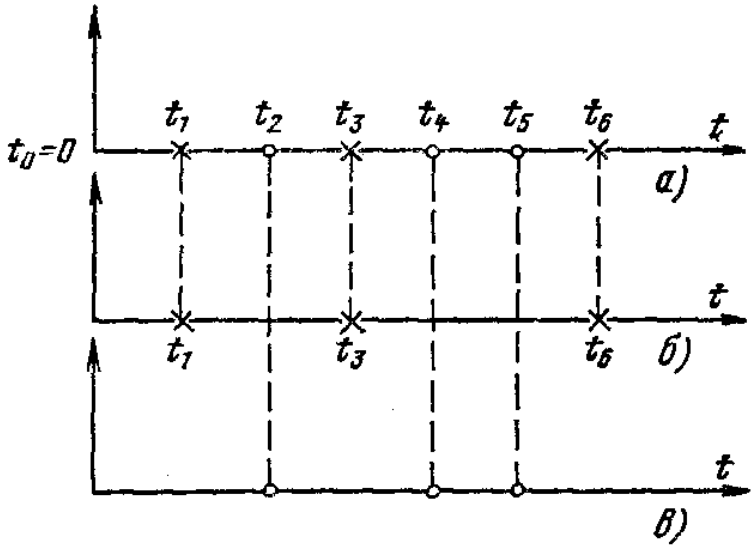


Рис. 5.2. Неоднородный поток событий
а – составной неоднородный поток;
б, в – составляющие однородные потоки

Потоки заявок могут быть однородными и неоднородными. В **неоднородном потоке** события, образующие поток, могут относиться к различным типам. Схематично неоднородный поток событий может быть изображен в виде рис. 5.2, где кружочками и крестиками изображаются однородные потоки событий.

Возможны различные эквивалентные способы задания случайных потоков. Наиболее общим способом представления характеристик потоков является задание многомерной ПРВ интервалов между моментами наступления событий $w(\tau_1,...,\tau_n)$, где $\tau_k = t_k - t_{k-1},\ t_0 = 0.$

При таком задании случайных потоков моделирование сводится к формированию на ЭВМ реализаций случайных чисел $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ с законом распределения $w(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Случайные потоки общего вида редко встречаются в приложениях. Обычно рассматриваются более узкие модели, например, потоки с ограниченным последействием, у которых интервалы $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ между событиями статистически независимы в совокупности, т. е.

$$w(\tau_1, \ldots, \tau_n) = w(\tau_1)w(\tau_2)\ldots w(\tau_n). \qquad (5.1)$$

Эти потоки задаются последовательностью одномерных законов распределения $w_k(\tau),\ k=1,2,\ldots$

Поток называется **регулярным**, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени.

В реальных СМО поток заявок обычно является случайным. Такие потоки характеризуются следующими тремя свойствами.

1. Поток событий называется **стационарным**, если вероятность попадания определенного числа событий на участок времени длиной τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси Ot расположен этот участок. Для стационарного потока характерна постоянная интенсивность, т. е. число заявок в единицу времени.

2. Поток событий называется **потоком без последействия**, если для любых, не перекрывающихся интервалов времени $(t_1, t_1+\Delta t_1)$ и $(t_2, t_2+\Delta t_2)$, где $\Delta t_1>0,\ \Delta t_2>0,\ t_2\ge t_1+\Delta t_1$, вероятность появления числа событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другой интервал (рис. 5.3).

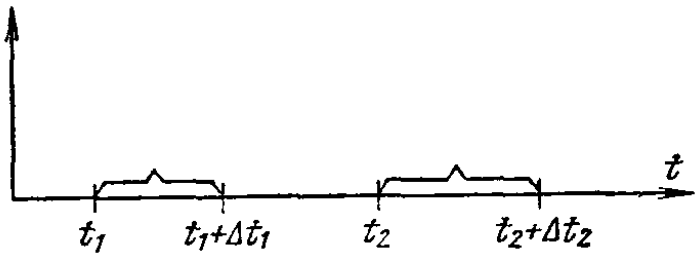


Рис. 5.3. Интервалы времени для определения последействия потока

3. Поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на малый интервал времени Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Это означает, что в ординарном потоке заявки приходят, как правило, поодиночке, а не парами, тройками и т. д.

5.1.2. Простейший поток

Если поток событий обладает тремя названными свойствами, то он называется **простейшим** (или стационарным пуассоновским) потоком. Простейший поток играет среди потоков событий особую роль, до некоторой степени близкую к роли нормального закона среди других законов распределения. Можно доказать, что при суммировании (взаимном наложении) большого числа ординарных, стационарных потоков с последействием получается поток близкий к простейшему.

Пусть имеется ряд независимых потоков $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, имеющих одинаковое распределение. «Суммирование» потоков состоит в том, что все

моменты появления событий переносятся на одну и ту же ось времени Ot. Рассмотрим на оси Ot два неперекрывающихся отрезка (рис. 5.3). Каждая из точек, попадающих в эти отрезки, случайным образом может оказаться принадлежащей тому или иному потоку, и по мере увеличения n удельный вес точек, принадлежащих одному и тому же потоку (и, значит, зависимых), уменьшается, а остальные точки принадлежат разным потокам и появляются на отрезках независимо друг от друга. При увеличении n суммарный поток будет терять последействие и приближаться к простейшему. На практике достаточно сложить 4-5 потоков, чтобы получить поток, достаточно близкий к простейшему.

Важной характеристикой является **интенсивность потока**, определяемая как предел

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi_1(t_0, \Delta t)}{\Delta t}, \tag{5.2}$$

где $\psi_1(t_0, \Delta t)$ — вероятность того, что на интервале $(t_0, t_0 + \Delta t)$ появятся одна или более заявок. Для стационарного потока его интенсивность не зависит от времени $\lambda(t) = \lambda$ и равна среднему числу событий в единицу времени.

Рассмотрим на оси Ot простейший поток событий. Выделим произвольный участок времени длиной τ. Число точек m, попадающих на участок τ, распределено по закону Пуассона

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}. \tag{5.3}$$

В частности, вероятность того, что не произойдет ни одного события $P_0(\tau) = \exp(-\lambda\tau)$; вероятность появления ровно одного события $P_1(\tau) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}$.

Важной характеристикой потока является закон распределения случайного интервала T между соседними событиями. Функция распределения $F(\tau) = P(T < \tau)$ для простейшего потока находится следующим образом: $1 - F(\tau) = P(T > \tau) = P_0(\tau) = \exp(-\lambda\tau)$ и $F(\tau) = 1 - \exp(-\lambda\tau),\ \tau > 0$.

Дифференцируя $F(\tau)$, найдем ПРВ интервалов между событиями простейшего потока:

$$w(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau},\ \tau > 0. \tag{5.4}$$

Математическое ожидание интервала T, распределенного по показательному закону $m_\tau = M[\tau] = 1/\lambda$, а дисперсия $D_\tau = D[\tau] = 1/\lambda^2$.

Следует заметить, что кроме характеристик входного потока заявок, режим работы СМО зависит еще от характеристик производительности самой системы: числа каналов n и быстродействия каждого канала. Одной из важнейших величин, связанных с системой, является время обслуживания одной заявки $T_{об}$.

Рассмотрим СВ $T_{об}$ и обозначим $F_{об}(t)$ ее функцию распределения: $F_{об}(t)=P(T_{об}<t)$, а $w_{об}(t)=F'_{об}(t)$ - ПРВ. Для практики особый интерес представляет случай, когда величина $T_{об}$ имеет показательное распределение

$$w_{об}(t)=\mu e^{-\mu t},\ t>0,$$

где параметр $\mu=1/m_{t_{об}}$ называется **интенсивностью обслуживания**.

Как известно параметр λ имеет смысл «плотности потока заявок». Аналогично, величину μ можно характеризовать как «плотность потока освобождений» занятого канала. Представим себе канал, непрерывно занятый (бесперебойно снабжаемый заявками); тогда очевидно, в этом канале будет иметь место простейший поток освобождений с плотностью μ.

5.1.3. Потоки с ограниченным последействием

Рассмотрим ординарный стационарный поток однородных событий с последействием. Такой поток называется **потоком Пальма**, если промежутки времени $\tau_1, \tau_2, \ldots,$ между последовательными событиями представляют собой независимые СВ, подчиняющиеся в общем случае закону распределения, отличающемуся от (5.4).

Потоки Пальма часто получаются в виде выходных потоков СМО. Если на какую-либо СМО поступает поток заявок, то он этой системой разделяется на два: поток обслуженных заявок и поток необслуженных заявок, который, в свою очередь, поступает на какую-либо другую СМО.

Теорема Пальма: пусть на СМО поступает поток заявок типа Пальма, причем заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ (не обслуживается); если при этом время обслуживания имеет показательный закон распределения, то поток необслуженных заявок также является потоком Пальма. В частности, если входной поток заявок будет простейшим, то поток необслуженных заявок, не будучи простейшим, будет все же иметь ограниченное последействие.

Потоки, у которых $w_1(\tau)=w(\tau)$, определяются единственным законом распределения $w(\tau)$ и называются **рекуррентными** (стационарными) потоками. Потоки с ограниченным последействием, у которых $w_2(\tau)=w_3(\tau)=\ldots w_n(\tau)=w(\tau)$, называются рекуррентными потоками с запаздыванием. Они задаются двумя законами распределения $w_1(\tau)$ и $w(\tau)$. Здесь $w_i(\tau)$ характеризует ПРВ временного интервала между i-й и $(i+1)$-й заявками.

Рассмотрим моделирование потоков с ограниченным последействием. Для получения реализаций последовательности моментов наступления событий t_k, $k=1, 2, \ldots,$ достаточно сформировать последовательность реализаций τ_k, $k=1, 2, \ldots,$ СВ с заданными законами распределения $w_k(\tau)$ соответственно

и вычислить моменты наступления событий: $t_k = t_{k-1} + \tau_k$. Моделирование рекуррентных потоков упрощается еще и тем, что СВ τ_k имеют одинаковый закон распределения.

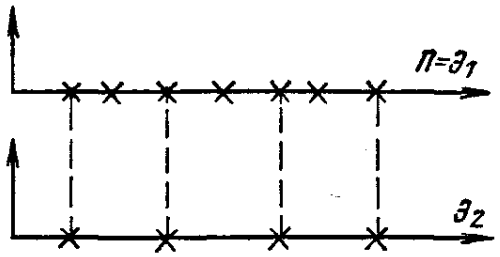


Рис. 5.4. Получение потока Эрланга путем просеивания простейшего потока

Пример потоков с ограниченным последействием – **потоки Эрланга**, которые образуются «просеиванием» простейшего потока (рис. 5.4). Если в простейшем потоке выбросить каждую вторую точку, то оставшиеся точки образуют поток, называемый потоком Эрланга первого порядка $(Э_1)$. Такой поток является потоком Пальма, поскольку величины $\tau_1, \tau_2, \ldots$, получаются суммированием независимых интервалов. Вообще, потоком Эрланга k-го порядка $(Э_k)$ называется поток, получаемый из простейшего, если сохранить каждую $(k+1)$-ую точку, а остальные выбросить.

Найдем закон распределения промежутка времени τ между соседними событиями в потоке Эрланга k-го порядка $(Э_k)$. Рассмотрим на оси Ot простейший поток с интервалами $\tau_1, \tau_2, \ldots$. Величина τ представляет собой сумму $k+1$ независимых СВ

$$\tau = \sum_{i=1}^{k+1} \tau_i ,$$

где $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k+1}$ - независимые СВ с экспоненциальным распределением.

Обозначим $w_k(\tau)$ ПРВ величины τ для потока $(Э_k)$. Произведение $w_k(\tau)d\tau$ есть вероятность того, что величина τ примет значение между τ и $\tau + \Delta\tau$. Следовательно, последняя точка промежутка τ должна попасть на элементарный участок $(\tau, \tau + \Delta\tau)$, а предыдущие k точек простейшего потока – на участок $(0, \tau)$. Вероятность первого события равна $P_1(\Delta\tau) \cong \lambda\Delta\tau$; вероятность второго события $P_k(\tau) = \dfrac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$. Перемножая эти вероятности, получим

$$w_k(\tau)\Delta\tau \cong \frac{\lambda(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}\Delta\tau .$$

При $\Delta\tau \to 0$ находим точное равенство для ПРВ интервалов времени для потока Эрланга k-го порядка

$$w_k(\tau) = \frac{\lambda(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau},\ \tau > 0. \qquad (5.5)$$

Заметим, что математическое ожидание $m_k = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\lambda} = \frac{k+1}{\lambda}$, а дисперсия интервалов между событиями в потоке Эрланга $D_k = (k+1)/\lambda^2$. Интенсивность Λ_k потока Эрланга k-го порядка $\Lambda_k = \frac{\lambda}{k+1}$. Таким образом, при увеличении порядка увеличиваются математическое ожидание и дисперсия промежутка времени между событиями, а интенсивность потока падает.

Рассмотрим, как будут изменяться характеристики потока Эрланга при увеличении k, если его интенсивность будет сохраняться постоянной. Пронормируем величину τ так, чтобы ее математическое ожидание (и, следовательно, интенсивность потока) оставались неизменными. Для этого изменим масштаб по оси времени и вместо τ рассмотрим величину $\tilde{\tau} = \frac{\tau}{k+1}$.

Назовем такой поток нормированным потоком Эрланга k-го порядка. ПРВ интервала $\tilde{\tau}$ между событиями

$$\tilde{w}_k(\tau) = \frac{\Lambda_k(\Lambda_k\tau)^k}{k!} e^{-\Lambda_k\tau},\ \tau > 0,$$

где $\Lambda_k = \lambda(k+1)$.

Математическое ожидание $\tilde{m}_k = 1/\lambda$ величины $\tilde{\tau}$, распределенной по закону $\tilde{w}_k(\tau)$, не зависит от k. Дисперсия интервала $\tilde{\tau}$ между событиями $\tilde{D}_k = \frac{D_k}{(k+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2(k+1)^2}$ неограниченно убывает с возрастанием k. Это означает, что при неограниченном увеличении k нормированный поток Эрланга приближается к регулярному потоку с постоянными интервалами, равными $1/\lambda$. Это свойство потоков Эрланга дает возможность, задаваясь различными k, получать любую степень последействия: от полного отсутствия $(k=0)$ до жесткой функциональной связи между моментами появления событий $(k=\infty)$.

5.1.4. Нормальный поток событий

Поток Пальма, для которого интервалы времени τ распределены по нормальному закону

$$w(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\tau^2}(\tau - m_\tau)^2\right],$$

называется **нормальным потоком** [21].

Следует заметить, что понятие нормального потока можно рассматривать только как приближенное. Дело в том, что при нормальном законе распределения СВ изменяется в интервале $(-\infty, +\infty)$, а интервал между событиями - положительная СВ, изменяющаяся в интервале $(0, \infty)$. Однако интервал практически возможных значений СВ, распределенной по нормальному закону, равен $(m_\tau - 3\sigma_\tau,\ m_\tau + 3\sigma_\tau)$.

Таким образом, при условии $m_\tau > 3\sigma_\tau$ можно сказать, что вероятность отрицательных значений СВ практически равна нулю, так как она меньше 0,003 (правило «трех сигм»). Именно для этого можно использовать нормальный закон распределения. В пределе, при $\sigma_\tau \to 0$, нормальный закон распределения переходит в регулярный.

Рассмотрим связь потока Эрланга с нормальным потоком. ПРВ СВ τ, равной интервалу между заявками в потоке Эрланга, определяется по формуле (5.5).

Функция распределения получается интегрированием

$$F_k(\tau) = \int_0^\tau w_k(\tau)\, d\tau = 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}.$$

Для функции

$$R(k,\ a) = \sum_{n=0}^{k} \frac{a^n}{n!} e^{-a}$$

составлены специальные таблицы. При больших значениях параметра a $(a > 20)$ для вычисления $R(k, a)$ можно использовать таблицы значений нормальной функции распределения:

$$R(k,a) \approx 0.5 + \Phi_0\left(\frac{k + 0{,}5 - a}{\sqrt{a}}\right),$$

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - интеграл вероятностей.

5.2. Самоподобные (фрактальные) модели случайных потоков

Рассмотренные пуассоновские модели потоков, когда ПРВ имеет показательный вид и входной поток обладает свойством марковости (см. главу 3), оказываются неадекватными при анализе трафика в сетях пакетной коммутации таких как Ethernet, Internet, Telnet и др. В подобных сетях обнаруживается **долгосрочная зависимость** или **самоподобие**. На интуитивном уровне это означает, что число событий на заданном временном интервале может зависеть от числа событий, поступивших в весьма отдаленные от него интервалы времени. При этом часто процесс носит «пачечный» характер. Проведенные в последние годы исследования показали, что поведение потока данных в таких сетях связи хорошо описывается с помощью моделей, основанных на теории фракталов [25].

5.2.1. Введение во фракталы

Английские военные топографы еще до войны заметили, что длина побережья Великобритании зависит от длины линейки, которой ее измеряют. Аналогичная зависимость определяет длину некоторых рек, побережье многих островов, путь, проходимый частицей при броуновском движении, и многое другое. В качестве наглядного примера можно привести так называемый «остров Коха». На рис. 5.5 показано, как можно построить такую фигуру [24].

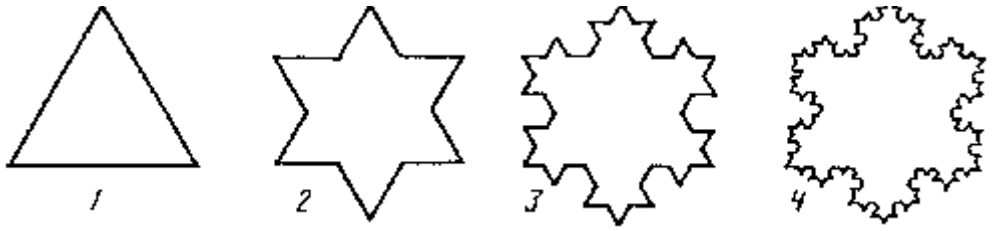


Рис. 5.5. Схема построения острова Коха

На первом шаге берем обычный равносторонний треугольник (рис. 5.5). Потом на каждой стороне достраиваем по треугольнику, сторона которого в три, а значит, площадь в девять раз меньше, чем у исходного треугольника и так далее. То, что получится после бесконечного количества таких шагов, называется островом Коха. При этом длина его побережья бесконечна, поскольку на втором шаге периметр фигуры увеличится в 4/3 раза, на третьем - еще в 4/3 и т. д. Это происходит потому, что каждый отрезок мы заменили ломаной, длина которой в 4/3 раза больше. Таким образом, периметр данной фигуры $p = \lim_{n\to\infty}\left(4/3\right)^n = \infty$. При этом с помощью формул геометрической прогрессии можно убедиться, что площадь острова Коха конечна.

Теперь представим себе, что мы решили измерить периметр острова Коха, пользуясь линейкой определенной длины. При этом мы, конечно, будем заменять сложную изрезанную береговую линию ломаной со звеньями, не меньшими, чем наша линейка, как это всегда делают географы. Измеренный периметр будет зависеть от длины линейки. Это кажется совершенно неожиданным. Но действительно, чем меньше длина линейки, тем больше измеренная длина побережья.

Остров Коха обладает еще одной интересной особенностью. Допустим, что мы фотографируем этот остров в океане из космоса. Мы можем фотографировать с любым увеличением, но часть побережья будет тем меньше, чем больше увеличение и мелкие детали в крупном масштабе, естественно, будут теряться. Типичная картина, которую мы увидим, показана на рис. 5.6. В крупном масштабе видим большой зубец и несколько маленьких. Увеличим маленький зубчик. То есть, по существу, увеличим маленький прямоугольник до размеров первоначального. Опять выделим маленький прямоугольник, опять увеличим и опять увидим то же самое и так до бесконечности. Это свойство, выглядеть в любом, сколь угодно мелком масштабе примерно одинаково, называется **масштабной инвариантностью**, а множества, которые им

обладают - **фракталами** [24]. Можно спросить, как же характеризовать фракталы, если размеры становятся какими-то зыбкими, ненадежными и начинают зависеть от размеров линейки?

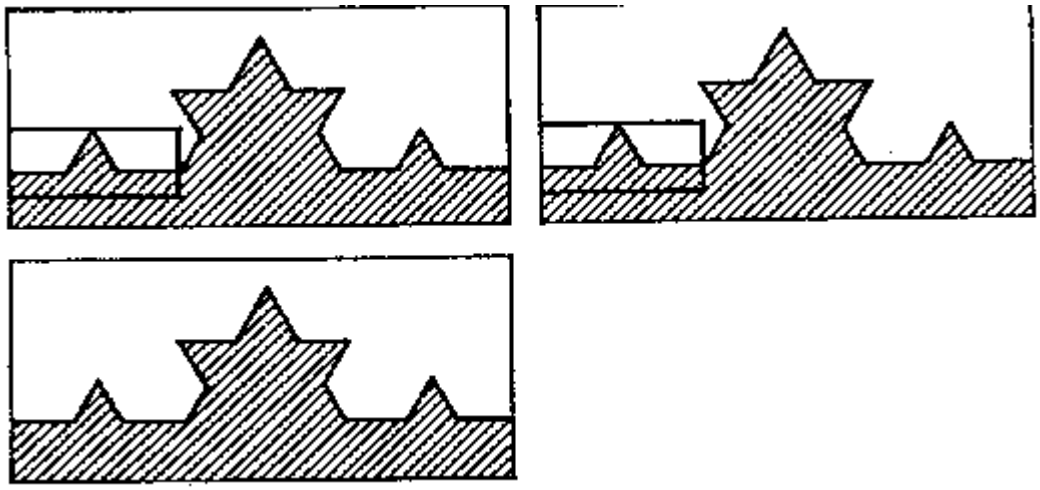


Рис. 5.6. Пример фрактальной масштабной инвариантности

На это математики могут ответить просто и остроумно: «Важна не сама длина, а то, как она зависит от размеров линейки, т. е. важно некое число, называемое фрактальной размерностью». Для отрезка размерность равна 1, для квадрата - 2, для куба - 3. Для фракталов размерность - дробное число. Отсюда и само название «фрактал», происходящее от английского «fractal» - дробный, неполный, частичный. Например, для острова Коха оно лежит между 1 и 2 - полоса в двумерном пространстве, т. е. уже не обычная кривая, но еще не плоскость (дробная размерность) [24].

5.2.2. Самоподобные (фрактальные) случайные процессы

Представленный пример фрактала (кривая Коха) относится к классу детерминированных фракталов, т. е. когда объект непосредственно составляется из своих малых копий. В теории телетрафика для описания поведения величины нагрузки в сетях связи с пакетной коммутацией применяется класс случайных (стохастических) фракталов. В этом случае свойство самоподобия (масштабной инвариантности) наблюдается лишь «в среднем», т. е. подобными являются не сами отсчеты сигнала, а, например, его КФ или ПРВ в разных временных масштабах. Три характерные особенности самоподобных процессов выражены в медленном убывании дисперсии, долгосрочной зависимости и флуктуационном характере спектра мощности таких процессов [25].

Рассмотрим дискретную случайную последовательность отсчетов:

$$X = \{x_i, i = 1,2,...\},$$

где x_i - СВ с заданным законом распределения. Будем предполагать, что все рассматриваемые СП имеют ограниченную ковариацию $B(x_i, x_{i+\tau}) < \infty$, $\forall\tau$ и

следовательно дисперсию $\sigma_{xi}^2 = B(x_i, x_i) < \infty$. СП будет обладать свойством самоподобия, если агрегированный процесс m-го порядка

$$X^{(m)} = [x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)}] = \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_{(k-1)m+i}, k = 1,2,... \right\} \quad (5.6)$$

будет иметь КФ $r^{(m)}(k)$ совпадающую с КФ $r(k)$ исходного СП для любых m. При выполнении данного условия можно утверждать, что дисперсия агрегированного процесса $X^{(m)}$ убывает согласно выражению

$$D(X^{(m)}) \approx m^{-\beta}, \qquad 0 < \beta < 1, \ m \to \infty, \quad (5.7)$$

т. е. дисперсия агрегированных процессов – средних выборок – уменьшается медленнее, чем величина, обратная размеру выборки. В результате в самоподобных процессах имеет место явление долгосрочной зависимости, которое приводит к расходимости КФ процесса:

$$\sum_k r(k) \to \infty, \quad r(k) \approx k^{-\beta}. \quad (5.8)$$

Наконец энергетический спектр самоподобных процессов описывается выражением

$$f(\omega) = \sum_k r(k) e^{-j\omega k} \approx c\omega^{-(1-\beta)}, \ \ \omega \to 0. \quad (5.9)$$

Собственно эти соотношения и определяют название самоподобного процесса: корреляционные свойства такого процесса, усредненного на различных временных интервалах, остаются неизменными.

Важнейшим параметром, характеризующим **«степень» самоподобия** СП, является **параметр Хёрста**.

Для выборочного случайного набора $X_j \left(j = 1, \ldots, N \right)$ можно определить выборочное среднее

$$M = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k, \quad (5.10)$$

выборочную дисперсию

$$S_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(X_j - M \right)^2 \quad (5.11)$$

и интегральное отклонение

$$D_j = \sum_{k=1}^{j} X_k - jM. \quad (5.12)$$

Определим **изменчивость** СП на интервале N как неубывающую функцию длины интервала

$$R_N = \max_{1<j<N} D_j - \min_{1<j<N} D_j. \quad (5.13)$$

Хёрстом было показано, что для большинства естественных процессов при больших значениях N выполняется соотношение

$$\frac{R}{S} \approx \left(\frac{N}{2} \right)^H$$

или иначе

$$\log\left(\frac{R}{S}\right) \approx H \log\left(\frac{N}{2}\right). \qquad (5.14)$$

Величина H получила название **параметра Хёрста** и лежит в интервале $0.5 < H < 1.0$. Для процессов, не обладающих свойством самоподобия, $H = 0.5$. Для самоподобных процессов с долгосрочной зависимостью этот параметр изменяется в пределах 0.7…0.9. Параметр β, который был введен выше для задания асимптотических свойств характеристик самоподобных СП, может быть выражен через параметр Хёрста:

$$\beta = 2 - 2H.$$

Степень самоподобия процесса можно оценить другим способом: параметр Херста можно определить путем построения графика отношения $\log(R_N / S_N)$ в зависимости от $\log(N/2)$ при разных N и вычислить величину H как тангенс угла наклона полученной линии. Следует заметить, что полученное множество точек не будут лежать на одной линии, поэтому их следует аппроксимировать линией, например, по методу наименьших квадратов. Данная методика определения параметра Херста получила название **R/S-метод** [25].

R/S-метод дает лишь приближенное значение показателя Херста, поэтому для его вычисления целесообразно пользоваться несколькими методиками и сравнения полученных результатов. Рассмотрим метод определения величины H на основе периодограммного анализа.

Для самоподобного СП $X = \{x_i\}$ вычисляется периодограмма

$$I_N(\omega) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N} x_k e^{jk\omega}\right|, \ \omega \in [0;\pi],$$

где N - количество отсчетов временного ряда. Учитывая, что самоподобие влияет на характер спектра $S(\omega)$, должен получаться график зависимости спектральной плотности вида

$$I_N(\omega) \approx [\omega]^{1-2H}, \text{ при } \omega \to 0.$$

Из последнего выражения следует, что множество случайных точек $\left(\log\left[I_N(\omega)\right]; \log(\omega)\right)$ будет располагаться линейно с коэффициентом наклона линии $1-2H$. На практике для вычисления оценки должны использоваться только нижние 10% частот, т. к. описанное выше поведение справедливо только для области частот, близких к нулю. Основным недостатком данного метода является большой объем вычислений при построении оценки показателя Херста.

5.2.3. Виды самоподобных случайных последовательностей

Простым примером самоподобных случайных последовательностей может служить случайное движение точки, начиная с некоторого момента времени t_0, когда она находилась в нуле. В каждый последующий момент времени $t_1, t_2, \ldots$

ее координата меняется на произвольную случайную добавку $\xi(t_i)$. Тогда модель движения можно описать как

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + \xi(t_i),$$

т. е. текущая координата определяется на основе предыдущей плюс случайное смещение. Если СВ $\xi(t_i)$ подчиняется нормальному закону распределения

$$w(\xi_i = \xi(t_i)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} e^{-\frac{\xi_i^2}{2\sigma_\xi^2}}$$

с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_ξ^2, то формируемый процесс $x(t_i)$ будет представлять собой броуновское движение частицы (стохастический винеровский процесс).

Рассмотрим координату частицы $x(t_k)$ в момент времени $t_k, k = 1, 2, \ldots$. Величина $x(t_k)$ будет состоять из случайных добавок ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ в предшествующие моменты времени, т. е.

$$x(t_k) = \sum_{i=1}^{k} \xi(t_i).$$

Следовательно, математическое ожидание координаты частицы

$$M\{x(t_k)\} = M\left\{\sum_{i=1}^{k} \xi(t_i)\right\} = \sum_{i=1}^{k} M\{\xi(t_i)\} = 0,$$

а дисперсия

$$M\{x^2(t_k)\} = M\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} \xi(t_i)\right)^2\right\} = \sum_{i=1}^{k} M\{\xi^2(t_i)\} = k\sigma_\xi^2 = \sigma_\xi^2|\Delta t|.$$

Таким образом, при $k \to \infty$ математическое ожидание СВ $x(t_k)$ равно нулю, а дисперсия стремится к бесконечности. Кроме того, для любых двух моментов времени t_1 и t_2, дисперсия разности $M\left\{\left(x(t_2) - x(t_1)\right)^2\right\} = \sigma_\xi^2(t_2 - t_1)$.

Так как процесс $x(t_i)$ представляет собой суммы гауссовских СВ и имеет известную дисперсию для каждого момента времени t_i, то можно записать ПРВ данной величины в виде

$$w(\Delta x) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_\xi^2|\Delta t|\right)^{0,5}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma_\xi^2|\Delta t|}},$$

где $\Delta x = x(t_i) - x(t_0)$ - координата или приращение координаты броуновской частицы (т. к. данный процесс в момент времени t_0 равен нулю); $\Delta t = t_i - t_0$ - интервал времени наблюдения.

Для того чтобы процесс $x(t_i)$ обладал свойством самоподобия, т. е. являлся фракталом, достаточно значение дисперсии $\sigma_\xi^2|\Delta t|$ заменить на $\sigma_\xi^2|\Delta t|^{2H}$, где H - параметр Херста. Такая замена приводит к тому, что отсчеты стохастического

броуновского движения становятся коррелированными между собой, т. е. $M\{x(t_i)x(t_j)\} = R(t_i,t_j) \neq 0$. Следовательно, можно записать, что

$$\sigma_\xi^2 |t_2 - t_1|^{2H} = M\left\{\left(x(t_2) - x(t_1)\right)^2\right\} = M\left\{x^2(t_2)\right\} + M\left\{x^2(t_1)\right\} - 2M\left\{x(t_1)x(t_2)\right\} =$$

$$= \sigma_\xi^2 t_2^{2H} + \sigma_\xi^2 t_1^{2H} - 2R(t_1,t_2);$$

$$R(t_1,t_2) = \frac{\sigma_\xi^2}{2}\left(t_2^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H} + t_1^{2H}\right).$$

Следовательно, корреляция приращений $\Delta x_1 = x(t_2) - x(t_1)$ и $\Delta x_2 = x(t_4) - x(t_3)$ может быть определена следующим выражением

$$R(t_2 - t_1, t_4 - t_3) = M\{\Delta x_1 \Delta x_2\} = M\left\{\left(x(t_2) - x(t_1)\right)\left(x(t_4) - x(t_3)\right)\right\} =$$

$$= R(t_2,t_4) - R(t_2,t_3) - R(t_1,t_4) + R(t_1,t_3) =$$

$$= \frac{\sigma_\xi^2}{2}\left[(t_3 - t_2)^{2H} - (t_4 - t_2)^{2H} + (t_4 - t_1)^{2H} - (t_3 - t_1)^{2H}\right]$$

В дискретном случае, когда величины t_1, t_2, t_3 и t_4 заменяются на $n, n+1, n+k$ и $n+k+1$ соответственно, получаем следующую КФ для приращений фрактального броуновского движения

$$r(k) = \frac{1}{2}\left[|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}\right]. \qquad (5.15)$$

Последовательность случайных приращений с данной КФ называется **фрактальным гауссовским шумом** [25]. Причем коэффициент корреляции $r(k) \to k^{2H-2}$ при $k \to \infty$ и определяет долговременную зависимость между отсчетами СП. КФ $r(k)$ отличается от гауссовских $e^{-N^2/2}$ и экспоненциальных $e^{-N/2}$ тем, что предполагает спад в корреляции при увеличении k заметно более медленный, что согласуется с результатами наблюдений интенсивностей в реальных трафиках с пакетной коммутацией. Кроме того, она полностью описывается только двумя параметрами – дисперсией и показателем H.

Одной из характеристик самоподобия является величина выбросов процесса. Для самоподобных процессов характер выбросов сохраняется при рассмотрении процесса в различных масштабах времени. Это означает, что если вы будете записывать нагрузку на каком-либо элементе сети с дискретностью, например, 10 миллисекунд, то, рассматривая график изменения нагрузки во времени на интервалах 10 секунд, 10 минут или 10 часов, вы не заметите существенных различий в поведении кривой. В этом смысле самоподобие графиков может быть охарактеризовано соотношением

$$y(t) = a^\alpha \; y\left(\frac{t}{\alpha}\right),$$

где α - коэффициент самоподобия непрерывных процессов.

5.2.4. Моделирование самоподобных случайных процессов

Рассмотрим некоторые из наиболее распространенных распределений, используемых при моделировании пульсирующих источников.

Одним из первых неэкспоненциальных распределений, которые были применены при моделировании сетевого трафика, является логнормальное распределение. Определение логнормального распределения основывается на нормальном распределении в виде функциональной зависимости

$$Z = \log(X),$$

где Z - нормально распределенная СВ с нулевым средним; X - СВ распределенная по логнормальному закону, который имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\log(x)-m)^2}{2\sigma^2}}, \; x > 0,$$

где σ - среднеквадратическое отклонение СВ Z; m - математическое ожидание. Эти параметры можно определить на основе экспериментальных данных по следующим формулам

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(x_i); \; \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\log(x_i) - \hat{m}\right)^2}. \qquad (5.16)$$

На основе известных значений m и σ нормально распределенной СВ Z можно определить математическое ожидание и дисперсию для логнормально распределенной СВ X:

$$m_x = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}; \; \sigma_x = e^m \sqrt{e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)}. \qquad (5.17)$$

Генерировать логнормальные СВ X можно путем следующего функционального преобразования:

$$x_i = e^{u_i}, \qquad (5.18)$$

где u_i - нормально распределенная СВ с нулевым средним и единичной дисперсией.

Для моделирования размеров передаваемых файлов, типовых сообщений, Web-страниц часто используется распределение Парето, которое имеет следующий вид

$$w(x) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}; \; \alpha > 0; \; k > 0; \; x > 0, \qquad (5.19)$$

где α - параметр формы; k - параметр, определяющий нижнюю границу для СВ x.

Известно, что ЭВМ позволяет генерировать равномерно распределенные СВ y в диапазоне от 0 до 1. Для того, чтобы смоделировать СВ x с ПРВ Парето необходимо найти функциональное преобразование $x = f(y)$. Это можно сделать на основе выражения

$$w(x = f(y)) = w(y)\left|\frac{dy}{dx}\right|,$$

откуда

$$y = \int w(x)dx = \int \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha}, \text{ при } x > k, \quad \alpha > 0.$$

Таким образом, получаем следующее функциональное преобразование для моделирования СВ с ПРВ Парето:

$$x = \frac{k}{\sqrt[\alpha]{1-y}}, \tag{5.20}$$

где y - случайное число, генерируемое на ЭВМ в диапазоне от 0 до 1. Параметр α связан с показателем Херста выражением

$$\alpha = 3 - 2H.$$

Параметр α обычно вычисляется на основе метода максимального правдоподобия по известным результатам измерения интенсивности реального трафика $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$:

$$\hat{\alpha} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} \log X_i - n \log \hat{k}}, \tag{5.21}$$

где $\hat{k} = \min_i x_i$.

Пример реализации случайной последовательности с параметрами $k = 0$ и $H = 0.7$ представлен на рис. 5.7.

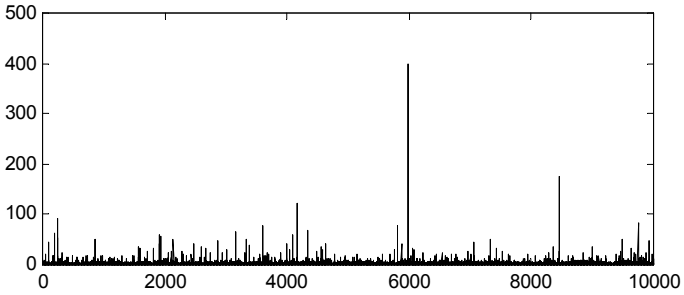


Рис. 5.7. Пример фрактальной случайной последовательности с ПРВ Парето

Другим примером ПРВ для генерирования самоподобных трафиков является распределение Вейбулла, которое имеет следующий вид:

$$w(x) = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}},$$

где α и β - некоторые параметры, влияющие на форму данной ПРВ. Для моделирования СВ x с ПРВ Вейбулла используется функциональное преобразование вида:

$$x = \sqrt[\beta]{\frac{-\ln(y)}{\alpha}}. \tag{5.22}$$

Существуют разные способы подбора распределения Вейбулла: метод наименьших квадратов, метод моментов, оценка максимального правдоподобия и др. Однако наиболее простым и надежным способом является метод максимального правдоподобия, при котором оценка параметра β определяется последовательным вычислением

$$\hat{\beta} = \left[\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{\hat{\beta}} \ln x_i \right) \Big/ \left\{ \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{\hat{\beta}} \right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln x_i \right) \right\} \right]^{-1}. \quad (5.23)$$

В свою очередь, оценка параметра α находится как

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^{\hat{\beta}} \right]^{1/\hat{\beta}}. \quad (5.24)$$

На основе вычисленных значений трафика $X = [x_1, ..., x_N]$ можно путем моделирования определить средний объем использованного буфера при передаче данных по каналу связи с заданной пропускной способностью v (в условных единицах измерения). Алгоритм моделирования заключается в следующем. Если значение передаваемого трафика $x_i > v$, то в буфере передачи запоминается объем данных равный $s_i = x_i - v$, в противном случае $s_i = 0$. В следующий момент времени $i+1$ объем передаваемых данных составит величину $x_{i+1} + s_i$. Если данное значение больше пропускной способности канала передачи v, то в буфере запоминается объем данных $s_{i+1} = x_{i+1} + s_i - v$. И так далее, до тех пор, пока все данные не будут переданы по каналу связи. Таким образом, получаем набор значений $\{s_i\}, i = 1,2,...,N$, которые будут характеризовать размер данных, находящихся в буфере в моменты времени t_i. Следовательно, средний размер использования буфера можно найти по формуле

$$S_{buff} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s_i .$$

Следует заметить, что если размер буфера резко возрастает при уменьшении v, то канал с такой пропускной способностью «не справляется» с требуемым объемом передаваемых данных, и, следовательно, значение v нужно увеличивать.

Зная средний объем использования буфера, по формуле Литтла [25] можно определить среднее время нахождения единицы данных (байт, пакет и т. п.) в буфере:

$$T = \frac{S_{buff}}{\overline{\lambda}},$$

где $\overline{\lambda}$ - средняя интенсивность входного потока, которая определяется как

$$\overline{\lambda} = \int_0^{\infty} x\, w(x)\, dx,$$

где $w(x)$ - ПРВ, используемая при моделировании входного потока.

Рассмотрим алгоритм моделирования **фрактального броуновского движения** (ФБД) на основе **RMD-метода** [25].

Шаг 1. Формируются два отсчета $x(0)$ и $x(1)$, причем $x(0) = 0$ (по условию), а $x(1) = \xi(1)$ - нормально распределенная СВ с нулевым МО и дисперсией σ_0^2 (рис. 5.8).

Шаг 2. На интервале от 0 до 1 берется центральный отсчет $x(1/2)$, который определяется как

$$x(1/2) = 1/2 \cdot (x(0) + x(1)) + d_1,$$

где d_1 - гауссовская СВ с нулевым средним и дисперсией выбранной так, чтобы дисперсия сформированного отсчета $x(1/2)$ была равна

$$\sigma_0^2 \left|\Delta t\right|^{2H} = \sigma_0^2 (1-1/2)^{2H} = \sigma_0^2 (1/2)^{2H}.$$

Дисперсия линейной аппроксимации $1/2 \cdot (x(0) + x(1))$ равна $\sigma_0^2/4$, тогда можно записать

$$\sigma_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2H} \sigma_0^2 - \frac{1}{4}\sigma_0^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2H} \left(1 - 2^{2H-2}\right)\sigma_0^2.$$

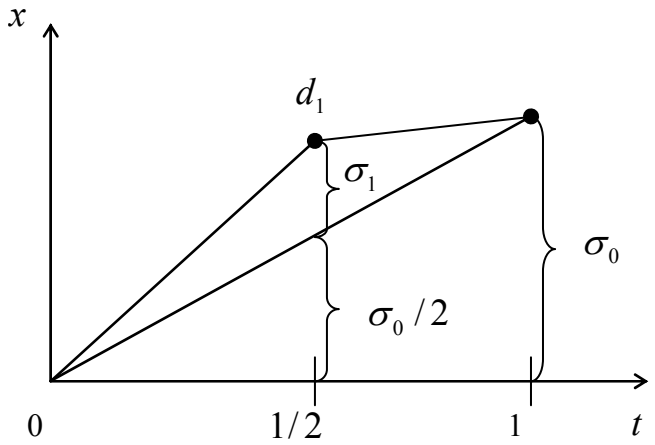


Рис. 5.8. Один шаг генерации ФБД

Шаг 3. Рассматриваются поочередно два интервала (0; 1/2) и (1/2; 1), в которых выделяются центральные отсчеты $x(1/4)$ и $x(3/4)$. Значения этих отсчетов формируются аналогично величине $x(1/2)$:

$$x(1/4) = \frac{1}{2}\left(x(0) + x(1/2)\right) + d_{21};\ x(3/4) = \frac{1}{2}\left(x(1/2) + x(1)\right) + d_{22},$$

где d_{21} и d_{22} - гауссовские СВ с нулевым средним и дисперсией выбранной так, чтобы дисперсии сформированных отсчетов $x(1/4)$ и $x(3/4)$ удовлетворяли условию

$$\sigma_0^2 \left|\Delta t\right|^{2H} = \sigma_0^2 (t_2 - t_1)^{2H}.$$

Для отсчета $x(1/4)$ дисперсия линейной аппроксимации $1/2 \cdot (x(0) + x(1/2))$ равна $\sigma_0^2 (1/2)^{2H}/4$, тогда можно записать

$$\sigma_2^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2H} \sigma_0^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2H} \frac{\sigma_0^2}{4} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{2H} \left(1 - 2^{2H-2}\right)\sigma_0^2.$$

Аналогичное значение дисперсии сохраняется и для величины d_{22}.

Шаг 4…n. На данных шагах повторяются действия, описанные на 2 и третьем шагах. Причем для значений дисперсий случайных добавок d_{ij} имеем следующую формулу

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{1}{2^i}\right)^{2H} \left(1 - 2^{2H-2}\right)\sigma_0^2,\ j = 1, 2, \ldots$$

5.3. Модели систем массового обслуживания

Допущения о пуассоновском характере потока заявок и о показательном распределении времени обслуживания позволяют применить в теории массового обслуживания аппарат марковских СП (см. главу 3). Процесс, протекающий в физической системе, называется **марковским** (или процессом без последействия), если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем $p(t_0 + \Delta t)$ зависит только от состояния системы в настоящий момент $p(t_0)$ и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

Рассмотрим СМО с конечным дискретным множеством состояний (рис. 5.9). Определим состояние x_k как состояние СМО, соответствующее наличию в данный момент k занятых каналов. При этом система может изменять свое состояние x_k дискретно в соответствующие дискретные моменты времени t_i. При поступлении на вход СМО одной заявки система изменяет свое состояние с x_k на x_{k+1}, а при уходе одной заявки из системы и соответствующем освобождении одного канала - с x_k на x_{k-1}.

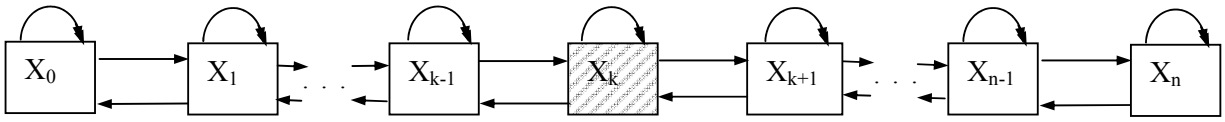


Рис. 5.9. Диаграмма состояний и переходов СМО

Типичным примером СМО является телекоммуникационная система с несколькими обслуживающими серверами. Заявка, поступающая на вход такой СМО, может быть либо обслужена, либо поставлена в очередь, либо получить отказ в обслуживании. В связи с этим СМО делятся на два основных типа: а) СМО с отказами; б) СМО с ожиданием [6, 21].

В **системах с отказами** заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

В **системах с ожиданием** заявка, заставшая все каналы занятыми, не покидает систему, а становится в очередь и ожидает, пока не освободится какой-нибудь канал.

5.3.1. Система массового обслуживания с отказами. Уравнения Эрланга

Рассмотрим n-канальную СМО с отказами как физическую систему X с конечным множеством состояний [6]:

x_0 - свободны все каналы;

x_1 - занят ровно один канал;

. . . x_k - занято ровно k каналов . . .

x_n - заняты все n каналов.

Определим вероятности состояний системы $p_k(t),\ k=0,1,\ldots,n$ для любого момента времени t при следующих допущениях:

1) поток заявок – простейший, с плотностью λ;

2) время обслуживания $T_{об}$ имеет показательный закон распределения с параметром μ: $w_{об}(t)=\mu e^{-\mu t},\ t>0$.

Рассмотрим возможные состояния x_k системы и их вероятности $p_0(t),\ p_1(t),\ldots,p_n(t)$. Очевидно, для любого момента времени $\sum_{k=0}^{n} p_k(t)=1$.

Составим ДУ для всех вероятностей $p_i(t)$, начиная с $p_0(t)$. Вначале зафиксируем момент времени t и найдем вероятность $p_0(t+\Delta t)$ того, что в момент $t+\Delta t$ система будет находиться в состоянии x_0 (все каналы свободны). Переход в состояние x_0 определяется двумя событиями (рис. 5.10):

A – в момент t система находилась в состоянии x_0, а за время Δt не перешла из нее в x_1 (не пришло ни одной заявки);

B – в момент t система находилась в состоянии x_1, а за время Δt канал освободился, и система перешла в состояние x_0.

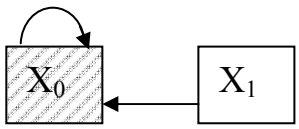


Рис. 5.10. Диаграмма возможных переходов в состояние x_0

Возможностью «перескока» системы через состояние (например, из x_2 в x_0 через x_1) за малый промежуток времени Δt можно пренебречь, как величиной высшего порядка малости по сравнению с $P(A)$ и $P(B)$. По теореме сложения вероятностей имеем: $p_0(t+\Delta t)\approx P(A)+P(B)$.

Найдем вероятность события A по теореме умножения. Вероятность того, что в момент t система была в состоянии x_0, равна $p_0(t)$. Вероятность того, что за время Δt не придет ни одной заявки, равна $P_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}$. С точностью

до величин высшего порядка малости при $\Delta t \to 0$ имеем $e^{-\lambda \Delta t} \approx 1 - \lambda \Delta t$. Следовательно, вероятность события A равна $P(A) \approx p_0(t)(1 - \lambda \Delta t)$.

Найдем вероятность события B. Вероятность того, что в момент t система была в состоянии x_1, равна $p_1(t)$. Вероятность того, что за время Δt канал освободится, равна $1 - e^{-\mu \Delta t}$; при малых $\Delta t \to 0$: $1 - e^{-\mu \Delta t} \approx \mu \Delta t$. Следовательно, искомая вероятность $P(B) \approx p_1(t) \mu \Delta t$.

Отсюда $p_0(t + \Delta t) \approx p_0(t)(1 - \lambda \Delta t) + \mu p_1(t) \Delta t$.

Перенося $p_0(t)$ в левую часть, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим ДУ для $p_0(t)$:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda\, p_0(t) + \mu\, p_1(t). \qquad (5.25)$$

Аналогичные ДУ могут быть составлены и для других вероятностей состояний.

Возьмем любое $k\ (0 < k < n)$ и найдем вероятность $p_k(t + \Delta t)$ того, что в момент $t + \Delta t$ система будет в состоянии x_k. Эта вероятность вычисляется как вероятность суммы трех событий (рис. 5.11):

A – в момент t система была в состоянии x_k (занято k каналов), а за время Δt не перешла из него ни в x_{k+1}, ни в x_{k-1} (ни одна заявка не поступила, ни один канал не освободился);

B – в момент t система была в состоянии x_{k-1} (занято $k-1$ каналов), а за время Δt перешла в x_k (пришла одна заявка);

C - в момент t система была в состоянии x_{k+1} (занято $k+1$ каналов), а за время Δt перешла в x_k (один из каналов освободился).

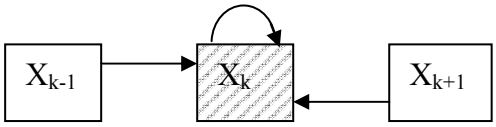


Рис. 5.11. Диаграмма возможных переходов в состояние x_k

Найдем вероятность $P(A)$. Для этого сначала вычислим вероятность того, что за время Δt не придет ни одна заявка и не освободится ни один из каналов: $e^{-\lambda \Delta t}\left(e^{-\mu \Delta t}\right)^k = e^{-(\lambda + k\mu)\Delta t}$. При $\Delta t \to 0$: $e^{-(\lambda + k\mu)\Delta t} \approx 1 - (\lambda + k\mu)\Delta t$, откуда $P(A) \approx p_k(t)\left[1 - (\lambda + k\mu)\Delta t\right]$. Аналогично получаем $P(B) \approx p_{k-1}(t)\lambda \Delta t$, $P(C) \approx p_{k+1}(t)(k+1)\mu \Delta t$, откуда имеем

$$p_k(t + \Delta t) \approx p_k(t)\left[1 - (\lambda + k\mu)\Delta t\right] + p_{k-1}(t)\lambda \Delta t + p_{k+1}(t)(k+1)\mu \Delta t.$$

Выполнив предельный переход, получаем ДУ для $p_k(t)\ (0 < k < n)$:

$$\frac{d\,p_k(t)}{d\,t} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)\,p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t). \qquad (5.26)$$

Составим уравнение для последней вероятности $p_n(t)$ (рис. 5.12). Имеем

$$p_n(t+\Delta t) \approx p_n(t)(1 - n\mu\Delta t) + p_{n-1}(t)\lambda\Delta t,$$

где $1 - n\mu\Delta t \approx e^{-n\mu\Delta t}$, при $\Delta t \to 0$ - вероятность того, что за время Δt не освободился ни один канал; $\lambda\Delta t$ - вероятность того, что за время Δt придет одна заявка.

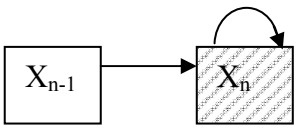


Рис. 5.12. Диаграмма возможных переходов в состояние x_n

Таким образом, ДУ для $p_n(t)$ имеет следующий вид:

$$\frac{d\,p_n(t)}{d\,t} = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t). \qquad (5.27)$$

В итоге получена система ДУ для вероятностей $p_0(t),\ p_1(t),\ p_2(t),\ldots,p_n(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{d\,t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\,p_k(t)}{d\,t} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)\,p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t),\ 0 < k < n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\,p_n(t)}{d\,t} = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t). \end{cases} \qquad (5.28)$$

Уравнения (5.28) называются **уравнениями Эрланга**. Интегрирование системы уравнений (5.28) при начальных условиях $p_0(0) = 1;\ p_1(0) = \ldots = p_n(0) = 0$ (в начальный момент все каналы свободны) дает зависимость $p_k(t)$ для любого k. Вероятности $p_k(t)$ характеризуют среднюю нагрузку в СМО и ее изменение с течением времени. В частности, $p_n(t)$ есть вероятность того, что заявка, пришедшая в момент t, застанет все каналы занятыми (получит отказ): $P_{отк} = p_n(t)$.

Зачастую в целях удобства используют величину $q(t) = 1 - p_n(t)$, называемую **относительной пропускной способностью** системы. Для данного момента t это есть отношение среднего числа обслуженных за единицу времени заявок к среднему числу поданных.

5.3.2. Установившийся режим обслуживания. Формулы Эрланга

При включении СМО в работу вначале имеет место переходный (неустановившийся) процесс, а затем система переходит в установившийся режим работы, вероятностные характеристики которого уже не зависят от времени, т.е. для любой системы с отказами существует предельный режим при $t \to \infty$ все вероятности $p_0(t),\ p_1(t),\ p_2(t),\ldots,p_n(t)$ стремятся к постоянным пределам $p_0,\ p_1,\ldots,p_n$, а все их производные стремятся к нулю. Таким образом, из системы ДУ (5.28) получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0 \ , \ 0 < k < n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda p_{n-2} - [\lambda + (n-1)\mu] p_{n-1} + n\mu p_n = 0, \\ \lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0. \end{cases} \tag{5.29}$$

К этим уравнениям необходимо добавить условие $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$

Разрешим систему (5.29) относительно неизвестных $p_0,\ p_1,\ldots,p_n$. Из первого уравнения имеем $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$. Из второго $p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0$ и вообще, для любого $k \le n$ выполняется равенство

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0. \tag{5.30}$$

Введем обозначение $\alpha = \lambda/\mu$ и назовем эту величину **приведенной плотностью заявок**. Это есть не что иное, как среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки.

Действительно, $\alpha = \lambda/\mu = \lambda m_{t_{об}}$, где $m_{t_{об}} = M[T_{об}]$ - среднее время обслуживания одной заявки. Таким образом,

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0. \tag{5.31}$$

Данная формула выражает все вероятности p_k через p_0. Чтобы выразить их непосредственно через α и n, воспользуемся условием $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$ Подставив в него (5.31), получим

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} = 1,$$

откуда $$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}.$$

(5.32)

Подставляя (5.32) в (5.31), получим

$$p_k = \frac{\alpha_k / k!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}} \quad (0 \le k \le n). \tag{5.33}$$

Формулы (5.33) называются **формулами Эрланга**. Они дают предельный закон распределения числа занятых каналов в зависимости от характеристик потока заявок и производительности СМО. Полагая в формуле (5.33) $k = n$, получим вероятность отказа (поступившая заявка находит все каналы занятыми):

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\alpha_n / n!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}. \tag{5.34}$$

В частности, для одноканальной системы $(n = 1)$

$$P_{\text{отк}} = p_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}, \tag{5.35}$$

а относительная пропускная способность

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{1}{1+\alpha}. \tag{5.36}$$

Формулы Эрланга (5.33) и их следствия (5.34)-(5.36) выведены для случая показательного распределения времени обслуживания, Однако эти формулы остаются справедливыми и при любом законе распределения времени обслуживания, лишь бы входной поток был простейшим.

Пример 5.1. Автоматическая телефонная станция имеет 4 линии связи. На станцию поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 3$ (вызова в минуту). Вызов, поступивший в момент, когда все линии заняты, получает отказ. Средняя длительность разговора 2 минуты. Найти: а) вероятность отказа; б) среднюю долю времени, в течение которой телефонная станция вообще не загружена.

Решение. Имеем $m_{t_{об}} = 2$ [мин]; $\mu = 0.5$ [разг/мин]; $\alpha = \lambda/\mu = 6$.

а) по формуле (5.34) получаем $P_{\text{отк}} = p_4 = \dfrac{\alpha^4/4!}{1 + \frac{\alpha^1}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!}} \approx 0.47$;

б) по формуле (5.32) имеем $p_0 = \dfrac{1}{1 + \frac{\alpha^1}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!}} \approx 0.0087$.

Несмотря на то, что формулы Эрланга в точности справедливы только при простейшем потоке заявок, ими можно с известным приближением пользоваться и в случае, когда поток заявок отличается от простейшего,

(например, является стационарным потоком с ограниченным последействием). Расчеты показывают, что замена произвольного стационарного потока с не очень большим последействием простейшим потоком той же плотности λ,. как правило, мало влияет на характеристики пропускной способности системы.

Наконец, можно заметить, что формулами Эрланга можно приближенно пользоваться и в случае, когда СМО допускает ожидание заявки в очереди, но когда срок ожидания мал по сравнению со средним временем обслуживания одной заявки. Плотность потока заявок может быть выбрана такой, что при регулярном следовании заявок одна за другой через определенные интервалы и при точно фиксированном времени обслуживания номинальная пропускная способность системы достаточна для того, чтобы обслужить все без исключения заявки. Снижение пропускной способности происходит из-за наличия случайных сгущений и разрежений в потоке заявок, которые нельзя предвидеть заранее.

5.3.3. Система массового обслуживания с ожиданием

Как было упомянуто выше СМО **с ожиданием** подразумевает наличие буфера с очередью из заявок, заставших все каналы занятыми и ждущих освобождения одного из каналов. Если время ожидания заявки в очереди ничем не ограничено, то система называется «**чистой системой с ожиданием**». Если оно ограничено какими-то условиями, то система называется «**системой смешанного типа**». Это промежуточный случай между чистой системой с отказами и чистой системой с ожиданием.

Для практики наибольший интерес представляют именно системы смешанного типа. Ограничения, наложенные на ожидание, могут быть различного типа. Часто бывает, что ограничение накладывается на **время ожидания заявки в очереди;** считается, что оно ограничено сверху каким-то сроком $T_{\text{ож}}$, который может быть как строго определенным, так и случайным. При этом ограничивается только срок ожидания в очереди, а начатое обслуживание доводится до конца, независимо от того, сколько времени продолжалось ожидание (например, в системах с коммутацией каналов после установления соединения между абонентами процесс разговора уже не прерывается). В других задачах естественнее наложить ограничение не на время ожидания в очереди, а на **общее время пребывания заявки в системе** (например, при передаче SMS-сообщений, если после определенного количества попыток сообщение не доходит до адресата оно аннулируется). Наконец, можно рассмотреть и такую смешанную систему (она ближе всего к типу торговых, предприятий, торгующих предметами не первой необходимости), когда заявка становится в очередь только в том случае, если длина очереди не слишком велика. Здесь ограничение накладывается на **число заявок в очереди** (или на размер буфера m, рис. 5.13).

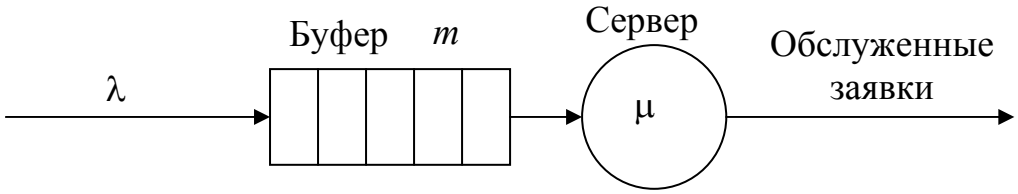


Рис. 5.13. Логическая схема односерверной СМО

В системах с ожиданием существенную роль играет так называемая «дисциплина очереди». Ожидающие заявки могут вызываться на обслуживание как в порядке очереди (раньше прибывший раньше и обслуживается), так и в случайном, неорганизованном порядке. Существуют СМО «с приоритетами», где некоторые заявки обслуживаются предпочтительно перед другими («генералы и полковники вне очереди»). Каждый тип системы с ожиданием имеет свои особенности и свою математическую теорию.

Здесь мы остановимся только на простейшем случае смешанной системы, являющемся естественным обобщением задачи Эрланга для системы с отказами. Для этого случая мы выведем ДУ, аналогичные уравнениям Эрланга, и формулы для вероятностей состояний в установившемся режиме, аналогичные формулам Эрланга.

Рассмотрим смешанную СМО X с n каналами при следующих условиях [6]. На вход системы поступает простейший поток заявок с плотностью λ. Время обслуживания одной заявки $T_{\text{об}}$ - показательное, с параметром $\mu = 1/m_{t_{об}}$. Заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания; время ожидания ограничено некоторым сроком $T_{\text{ож}}$; если до истечения этого срока заявка не будет принята к обслуживанию, то она покидает очередь и остается необслуженной. Срок ожидания $T_{\text{ож}}$ будем считать случайным и распределенным по показательному закону

$$w_{ож}(t) = ve^{-vt},\ t > 0,$$

где параметр v - величина, обратная среднему сроку ожидания: $v = 1/m_{t_{\text{ож}}}$; $m_{t_{\text{ож}}} = M[T_{\text{ож}}]$.

Параметр v полностью аналогичен параметрам λ и μ потока заявок и «потока освобождений». Его можно интерпретировать, как плотность «потока уходов» заявки, стоящей в очереди. Действительно, представим себе заявку, которая только и делает, что становится в очередь и ждет в ней, пока не кончится срок ожидания $T_{\text{ож}}$, после чего уходит и сразу же снова становится в очередь. Тогда «поток уходов» такой заявки из очереди будет иметь плотность v. Очевидно, при $v \to \infty$ система смешанного типа превращается в чистую систему с отказами; при $v \to 0$ она превращается в чистую систему с ожиданием.

Заметим, что при показательном законе распределения срока ожидания пропускная способность системы не зависит от того, обслуживаются ли заявки в порядке очереди или в случайном порядке: для каждой заявки закон

распределения оставшегося времени ожидания не зависит от того, сколько времени заявка уже стояла в очереди.

Благодаря допущению о пуассоновском характере всех потоков событий, приводящих к изменениям состояний системы, процесс, протекающий в ней, будет марковским. Запишем уравнения для вероятностей состояний системы. Для этого, прежде всего, перечислим эти состояния. Будем их нумеровать не по числу занятых каналов, а по числу связанных с системой заявок. Заявку будем называть **«связанной с системой»**, если она либо находится в состоянии обслуживания, либо ожидает очереди.

Возможные состояния системы будут (рис. 5.14):

x_0 - ни один канал не занят, очереди нет;

x_1 - занят ровно один канал, очереди нет;

……

x_k - занято ровно k каналов, очереди нет;

……

x_n - заняты все n каналов, очереди нет;

x_{n+1} - заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;

……

x_{n+s} - заняты все n каналов, s заявок стоят в очереди.

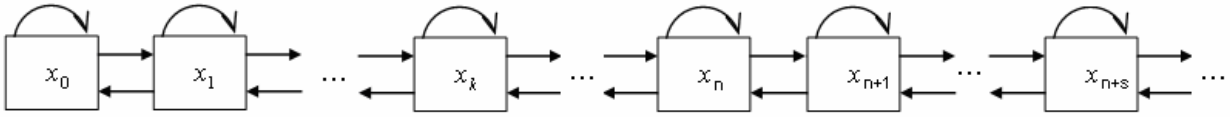


Рис. 5.14. Диаграмма возможных переходов для СМО с очередью

Число заявок s, стоящих в очереди, в наших условиях может быть сколь угодно большим. Таким образом, система X имеет бесконечное (хотя и счетное) множество состояний. Соответственно, количество ДУ, описывающих ее, тоже будет бесконечным.

Очевидно, первые n ДУ ничем не будут отличаться от соответствующих уравнений Эрланга (5.28):

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{d\,t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\,p_k(t)}{d\,t} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)\,p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\,p_{n-1}(t)}{d\,t} = \lambda p_{n-2}(t) - \left[\lambda + (n-1)\mu\right] p_{n-1}(t) + n\mu p_n(t). \end{cases} \qquad (5.37)$$

Отличие новых уравнений от уравнений Эрланга начнется при $k = n$. Действительно, в состояние x_n система с отказами может перейти только из состояния x_{n-1}; что касается системы с ожиданием, то она может перейти в состояние x_n не только из x_{n-1}, но и из x_{n+1} (все каналы заняты, одна заявка стоит в очереди).

Составим ДУ для $p_n(t)$. Зафиксируем момент t и найдем $p_n(t+\Delta t)$ - вероятность того, что система в момент $t+\Delta t$ будет в состоянии x_n. Эта вероятность вычисляется как вероятность суммы трех событий:

A - в момент t система уже была в состоянии x_n, а за время Δt не вышла из него (не пришло ни одной заявки и ни один из каналов не освободился);

B - в момент t система была в состоянии x_{n-1}, а за время Δt перешла в состояние x_n (пришла одна заявка);

C - в момент t система была в состоянии x_{n+1} (все каналы заняты, одна заявка стоит в очереди); а за время Δt перешла в x_n (либо освободился один канал и стоящая в очереди заявка заняла его, либо стоящая в очереди заявка ушла в связи с окончанием срока ожидания).

В итоге имеем:

$$p_n(t+\Delta t) \approx p_n(t)\left[1-\lambda\Delta t - n\mu\Delta t\right] + p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_{n+1}(t)(n\mu+v)\Delta t,$$

откуда ДУ для состояния x_n имеет вид

$$\frac{d\,p_n(t)}{dt} = -(\lambda+n\mu)\,p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n\mu+v)\,p_{n+1}(t). \qquad (5.38)$$

Вычислим теперь $p_{n+s}(t+\Delta t)$ при любом $s>0$ - вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ все n каналов будут заняты и, кроме этого, s заявок будут стоять в очереди. Эта вероятность вновь вычисляется как вероятность суммы трех событий:

A - в момент t система уже была в состоянии x_{n+s}, а за время Δt это состояние не изменилось (значит, ни одной заявки не принято, ни один канал не освободился и ни одна из s стоящих в очереди заявок не ушла);

B - в момент t система была в состоянии x_{n+s-1}, а за время Δt перешла в состояние x_{n+s} (пришла одна заявка);

C - в момент t система была в состоянии x_{n+s+1}, а за время Δt перешла в состояние x_{n+s} (для этого либо один из каналов должен освободиться, и тогда одна из $s+1$ стоящих в очереди заявок займет его, либо одна из стоящих в очереди заявок должна уйти в связи с окончанием срока ожидания).

Следовательно:

$$p_{n+s}(t+\Delta t) \approx p_{n+s}(t)\left[1-\lambda\Delta t - n\mu\Delta t - sv\Delta t\right] + \\ + p_{n+s-1}(t)\lambda\Delta t + p_{n+s+1}(t)\left[n\mu + (s+1)v\right]\Delta t,$$

откуда ДУ для состояния x_{n+s} имеет вид

$$\frac{d\,p_{n+s}(t)}{d\,t}=\left(-\lambda+n\mu+sv\right)p_{n+s}(t)+ \\ +\lambda p_{n+s-1}(t)+\left[n\mu+(s+1)v\right]p_{n+s+1}(t). \tag{5.39}$$

Таким образом, мы получили для вероятностей состояний систему бесконечного числа ДУ:

$$\begin{cases} \frac{d\,p_0(t)}{d\,t}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t), \\ \frac{d\,p_1(t)}{d\,t}=\lambda p_0(t)-(\lambda+\mu)p_1(t)+2\mu p_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\,p_k(t)}{d\,t}=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\mu p_{k+1}(t),\ 1\le k\le n-1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\,p_n(t)}{d\,t}=\lambda p_{n-1}(t)-\left[\lambda+n\mu\right]p_n(t)+(n\mu+v)p_{n+1}(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\,p_{n+s}(t)}{d\,t}=\lambda p_{n+s-1}(t)-\left[\lambda+n\mu+sv\right]p_{n+s}(t)+\left[n\mu+(s+1)v\right]p_{n+s+1}(t). \end{cases} \tag{5.40}$$

Уравнения (5.40) являются естественным обобщением уравнений Эрланга на случай системы смешанного типа с ограниченным временем ожидания. Параметры λ, μ, v в этих уравнениях могут быть как постоянными, так и переменными. При интегрировании системы (5.40) нужно учитывать, что хотя теоретически число возможных состояний системы бесконечно, но на практике вероятности $p_{n+s}(t)$ при возрастании становятся пренебрежимо малыми, и соответствующие уравнения могут быть отброшены.

Выведем, формулы, аналогичные формулам Эрланга, для вероятностей состояний системы в установившемся режиме обслуживания (при $t\to\infty$). Из уравнений (5.40), полагая все $p_k\left(k=0,1,\ldots,n,\ldots\right)$ постоянными, а все производные - равными нулю, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda p_0+\mu p_1=0, \\ \lambda p_0-(\lambda+\mu)p_1+2\mu p_2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)p_k+(k+1)\mu p_{k+1}=0,\ 1\le k\le n-1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda p_{n-1}-\left[\lambda+n\mu\right]p_n+(n\mu+v)p_{n+1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda p_{n+s-1}-\left[\lambda+n\mu+sv\right]p_{n+s}+\left(n\mu+(s+1)v\right)p_{n+s+1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{5.41}$$

К ним необходимо добавить условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \tag{5.42}$$

Найдем решение системы (5.41), для чего применим тот же прием, которым мы пользовались в случае системы с отказами; разрешим первое уравнение относительно p_1, подставим во второе, и т. д. Для любого $k \le n$, как и в случае системы с отказами, получим:

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0 \tag{5.43}$$

Далее перейдем к уравнениям для $k > n$ $\left(k = n + s,\ s \ge 1\right)$ и тем же способом получим:

$$p_{n+1} = \frac{\lambda^{n+1} p_0}{n!\,\mu^n \left(n\mu + v\right)}, \qquad p_{n+2} = \frac{\lambda^{n+2} p_0}{n!\,\mu^n \left(n\mu + v\right)\left(n\mu + 2v\right)}$$

и вообще при любом $s \ge 1$

$$p_{n+s} = \frac{\lambda^{n+s} p_0}{n!\,\mu^n \prod_{m=1}^{s} \left(n\mu + mv\right)}. \tag{5.44}$$

В обе формулы (5.43) и (5.44) в качестве сомножителя входит вероятность p_0. Определим ее из условия (5.42). Подставляя в него выражения (5.43) и (5.44) для $k \le n$ и $s \ge 1$, получим

$$p_0 \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s}}{n!\,\mu^n \prod_{m=1}^{s} \left(n\mu + mv\right)} \right\} = 1,$$

откуда имеем

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s}}{n!\,\mu^n \prod_{m=1}^{s} \left(n\mu + mv\right)}}. \tag{5.45}$$

Преобразуем выражения (5.43), (5.44) и (5.45), вводя в них вместо плотностей λ и v «приведенные» плотности:

$$\begin{cases} \lambda/\mu = \lambda m_{t_{об}} = \alpha, \\ v/\mu = v m_{t_{об}} = \beta. \end{cases} \tag{5.46}$$

Параметры α и β выражают соответственно среднее число заявок и среднее число уходов заявки, стоящей в очереди, приходящиеся на среднее время обслуживания одной заявки.

В новых обозначениях формулы (5.43), (5.44) и (5.45) примут вид:

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \quad \left(0 < k \le n\right), \tag{5.47}$$

$$p_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^{n+s}}{n!}p_0}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)} \quad (s \geq 1), \tag{5.48}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}. \tag{5.49}$$

Подставляя (5.49) в (5.47) и (5.48), получим окончательные выражения для вероятностей состояний системы:

$$p_k = \frac{\alpha^k/k!}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}} \quad (0 \leq k \leq n), \tag{5.50}$$

$$p_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}} \quad (s \geq 1). \tag{5.51}$$

Зная вероятности всех состояний системы, можно легко определить другие интересующие нас характеристики, в частности, вероятность P_H того, что заявка покинет систему необслуженной. Определим ее из следующих соображений: при установившемся режиме вероятность P_H того, что заявка покинет систему необслуженной, есть не что иное, как отношение среднего числа заявок, *уходящих* из очереди в единицу времени, к среднему числу заявок, *поступающих* в единицу времени. Найдем среднее число заявок, уходящих из очереди в единицу времени. Для этого сначала вычислим математическое ожидание m_s числа заявок, *находящихся* в очереди:

$$m_s = M[s] = \sum_{s=1}^{\infty} s p_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{s\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}. \tag{5.52}$$

Чтобы получить P_H, нужно m_s умножить на среднюю «плотность уходов» одной заявки v и разделить на среднюю плотность заявок λ, т. е. умножить на коэффициент

$$\frac{v}{\lambda} = \frac{v/\mu}{\lambda/\mu} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Получим:

$$P_H = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \dfrac{s\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s} (n + m\beta)}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s} (n + m\beta)}} \quad . \tag{5.53}$$

Пропускная способность системы характеризуется вероятностью того, что заявка, попавшая в систему, будет обслужена:

$$q = 1 - P_H .$$

Очевидно, что пропускная способность системы с ожиданием, при тех же λ и μ, будет всегда выше, чем пропускная способность системы с отказами: в случае наличия ожидания необслуженными уходят не все заявки, заставшие n каналов занятыми, а только некоторые. Пропускная способность увеличивается при увеличении среднего времени ожидания $m_{t_{ожс}} = 1/\nu$. Непосредственное использование формул (5.50), (5.51) и (5.53) несколько затруднено тем, что в них входят бесконечные суммы. Однако члены этих сумм быстро убывают.

Посмотрим, во что превратятся формулы (5.50) и (5.51) при $\beta \to \infty$ и $\beta \to 0$. Очевидно, что при $\beta \to \infty$ система с ожиданием должна превратиться в систему с отказами (заявка мгновенно уходит из очереди). Действительно, при $\beta \to \infty$ формулы (5.51) дадут нули, а формулы (5.50) превратятся в формулы Эрланга для системы с отказами (5.29).

Рассмотрим другой крайний случай: чистую систему с ожиданием ($\beta \to 0$). В такой системе заявки вообще не уходят из очереди, и поэтому $P_H = 0$: каждая заявка рано или поздно дождется обслуживания. Зато в чистой системе с ожиданием не всегда имеется предельный стационарный режим при $t \to \infty$. Можно доказать, что такой режим существует только при $\alpha < n$, т. е. когда среднее число заявок, приходящееся на время обслуживания одной заявки, не выходит за пределы возможностей n-канальной системы. Если же $\alpha \geq n$, число заявок, стоящих в очереди, будет с течением времени неограниченно возрастать.

Предположим, что $\alpha < n$, и найдем предельные вероятности $p_k \ (0 \leq k \leq n)$ для чистой системы с ожиданием. Для этого, положив в формулах (5.49), (5.50) и (5.51) $\beta \to 0$, получим

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \dfrac{\alpha^s}{n^s}},$$

или, суммируя прогрессию (что возможно только при $\alpha < n$), получим

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}. \qquad (5.54)$$

Отсюда, пользуясь формулами (5.47) и (5.48), найдем

$$p_k = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} \quad (0 \le k \le n), \qquad (5.55)$$

и аналогично для $k = n + s \ (s \ge 0)$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} \quad . \qquad (5.56)$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди; определяется из формулы (5.52) при $\beta \to 0$:

$$m_s = \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{n n! \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} \qquad (5.57)$$

Пример 5.2. На вход трехканальной системы с неограниченным временем ожидания поступает простейший поток заявок с плотностью $n = 4$ [заявки/час]. Среднее время обслуживания одной заявки $m_{t_{об}} = 30$ мин. Определить, существует ли установившийся режим обслуживания; если да, то найти вероятности p_0, p_1, p_2, p_3, вероятность наличия очереди и среднюю длину очереди m_s

Решение. Имеем $\mu = 1/m_{t_{об}} = 2$; $\alpha = \lambda/\mu = 2$. Так как $\alpha < n$, установившийся режим существует. По формуле (5.55) находим

$p_0 = 1/9$; $p_1 = 2/9$; $p_2 = 2/9$; $p_3 = 8/54 \approx 0.148$.

Вероятность наличия очереди $P_{оч} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = 0.297$.

Средняя длина очереди по формуле (5.57) будет равна $m_s \approx 0.89$ [заявки].

5.3.4. Система смешанного типа с ограничением по длине очереди

В п. 5.2.3 была рассмотрена СМО с ограничением по времени пребывания в очереди. Здесь мы рассмотрим n-канальную систему смешанного типа с другим видом ограничения ожидания - по числу заявок, стоящих в очереди (буфер имеет конечную длину m). Предположим, что заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь, только если в ней находится менее m заявок; если же число заявок в очереди равно m (больше m оно быть не

может), то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему необслуженной. Остальные допущения - о простейшем потоке заявок и о показательном распределении времени обслуживания - оставим прежними.

Составим ДУ для вероятностей состояний системы. Заметим, что в данном случае число состояний системы будет конечно, так как общее число заявок, связанных с системой, не может превышать $n+m$ (n обслуживаемых и m стоящих в очереди).

Возможны следующие состояния системы:

x_0 - все каналы свободны, очереди нет;

x_1 - занят один канал, очереди нет;

……..

x_k - занято k каналов, очереди нет;

……..

x_{n-1} - занято $n-1$ каналов, очереди нет;

x_n - заняты все n каналов, очереди нет;

x_{n+1} - заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;

……..

x_{n+m} - заняты все n каналов, m заявок стоят в очереди.

Очевидно, первые n уравнений для вероятностей $p_0(t), \ldots, p_{n-1}(t)$ будут совпадать с уравнениями Эрланга (5.29). Выведем остальные уравнения. Имеем

$$p_n(t+\Delta t) = p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_n(t)\left[1-\lambda\Delta t - n\mu\Delta t\right] + p_{n+1}(t)n\mu\Delta t,$$

откуда

$$\frac{d\,p_n(t)}{d\,t} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)\,p_n(t) + n\mu p_{n+1}(t).$$

Далее выведем уравнение для $p_{n+s}(t)$ $(1 \le s < m)$

$$p_{n+s}(t+\Delta t) = p_{n+s-1}(t)\lambda\Delta t + p_{n+s}(t)\left[1-\lambda\Delta t - n\mu\Delta t\right] + p_{n+s+1}(t)n\mu\Delta t,$$

откуда

$$\frac{d\,p_{n+s}(t)}{d\,t} = \lambda p_{n+s-1}(t) - (\lambda + n\mu)\,p_{n+s}(t) + n\mu p_{n+s+1}(t). \qquad (5.58)$$

Последнее уравнение будет иметь вид

$$\frac{d\,p_{n+m}(t)}{d\,t} = \lambda p_{n+m-1}(t) - n\mu p_{n+m}(t). \qquad (5.59)$$

Таким образом, получена система $(n+m+1)$ ДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{d\,t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\,p_k(t)}{d\,t} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)\,p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t),\ 1 \le k \le n-1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\,p_n(t)}{d\,t} = \lambda p_{n-1}(t) - [\lambda + n\mu]\,p_n(t) + n\mu p_{n+1}(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\,p_{n+s}(t)}{d\,t} = \lambda p_{n+s-1}(t) - [\lambda + n\mu]\,p_{n+s}(t) + n\mu p_{n+s+1}(t),\ 1 \le s < m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\,p_{n+m}(t)}{d\,t} = \lambda p_{n+m-1}(t) - n\mu p_{n+m}(t). \end{cases} \tag{5.60}$$

Рассмотрим предельный случай при $t \to \infty$. Приравнивая все производные нулю, а все вероятности считая постоянными, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)\,p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0,\ 1 \le k \le n-1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda p_{n-1} - [\lambda + n\mu]\,p_n + n\mu p_{n+1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda p_{n+s-1} - [\lambda + n\mu]\,p_{n+s} + n\mu p_{n+s+1} = 0,\ \ 1 \le s < m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda p_{n+m-1} - n\mu p_{n+m} = 0 \end{cases} \tag{5.61}$$

и добавочное условие:

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1. \tag{5.62}$$

Уравнения (5.61) могут быть решены аналогично (5.41). Не останавливаясь на этом решении, приведем только окончательные формулы:

$$p_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s} \quad (0 \le k \le n), \tag{5.63}$$

$$p_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s} \quad (1 \le s \le m). \tag{5.64}$$

Вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной, равна вероятности p_{n+m} того, что в очереди уже стоят m заявок. Нетрудно заметить, что формулы (5.63) и (5.64) получаются из формул (5.50), (5.51), если положить в них $\beta = 0$ и ограничить суммирование по s верхней границей m.

Пример 5.3. На телефонную станцию поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 0.5$ (вызовов в минуту). Имеется один обслуживающий сервер. В буфере могут одновременно находиться, ожидая очереди, не более трех заявок. Среднее время разговора составляет $m_{t_{об}} = 1/\mu = 2$ [минуты]. Определить: а) пропускную способность системы; б) среднее время простоя станции; в) определить, насколько изменятся эти характеристики, если добавить второй обслуживающий сервер.

Решение. Имеем: $\lambda = 0.5$; $\mu = 0.5$; $\alpha = 1$; $m = 3$.

а) по формуле (5.64), полагая $n = 1$, находим вероятность того, что пришедшая заявка покинет систему необслуженной:

$$P_H = p_{1+3} = \frac{1}{1+1+3} = 0.2.$$

Относительная пропускная способность системы $q = 1 - P_H = 0.8$. Абсолютная пропускная способность: $Q = \lambda q = 0.4$ [заявок в минуту].

б) среднюю долю времени, которое система будет простаивать, найдем по формуле (5.63): $p_0 = 1/5 = 0.2$.

в) полагая $n = 2$, найдем: $P_H = p_{2+3} = \dfrac{1/16}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}} = \frac{1}{47} \approx 0.021$.

При этом $q = 1 - P_H \approx 0.979$ (т. е. будет удовлетворяться около 98% всех заявок) и $Q = \lambda q \approx 0.49$ [заявок в минуту]. Относительное время простоя: $p_0 = 16/47 \approx 0.34$, т. е. оборудование будет простаивать полностью около 34% всего времени.

6. МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ

6.1. Основные понятия и определения

Совокупность сведений, подлежащих передаче, называется **информацией**. Сведения могут быть представлены в различной форме, зависящей от используемых знаков (символов), являющихся условными обозначениями некоторых элементарных знаний. Совокупность символов, содержащих некоторую информацию, называют **сообщением**, т. е. сообщение является формой, в которой информация передается от одного объекта (источника) к другому объекту (получателю). Вид сообщения зависит от используемого набора знаков, который может произвольно меняться и не имеет существенного значения для передачи информации. Важно только, чтобы источник и получатель одинаково понимали значения знаков, используемых для представления сообщений. Действительно, одно и то же сообщение может быть выражено, например, набором букв русского или английского алфавитов, а также с помощью иероглифов или других наборов условных обозначений.

Передача сообщений, а, следовательно, и информации осуществляется при помощи сигналов. **Сигналом** называют физический процесс, параметры которого зависят от передаваемых сообщений.

Под **системой связи** понимают совокупность технических средств, предназначенных для передачи информации, включая источник сообщений и получателя сообщений. Если для передачи сообщений используется радиотехнические сигналы (радиоволны), то система передачи информации называется радиотехнической. Специфика радиотехнических систем передачи информации (РТСПИ) связана с особенностями распространения радиоволн, которые учитываются при выборе модели канала связи. В остальном же процессы, протекающие в РТСПИ, не отличаются от процессов в других системах, например, системах проводной связи, акустических и гидроакустических системах. Поэтому рассматриваемые закономерности одинаково присущи всем системам передачи информации.

Передающее устройство предназначено для преобразования сообщения $x(t)$ в сигнал $s(t)$, который может распространяться по линии связи. В общем случае оно выполняет операции кодирования и модуляции. При передаче непрерывных сообщений цифровыми методами передающее устройство осуществляет также операции дискретизации по времени и квантования по уровню.

Современные РТСПИ характеризуются большим разнообразием видов передаваемых сообщений, способов модуляции, принципов построения, режимов работы и т. п. Соответственно они могут быть классифицированы по многим признакам. По числу каналов различают одноканальные и многоканальные системы. По наличию обратного канала различают системы без обратной связи и с обратной связью. По режиму использования канала различают системы односторонней связи (симплексные), системы

двусторонней связи (дуплексные) и полудуплексные системы. В первых передача осуществляется в одном направлении, во вторых осуществляется одновременная передача в обоих направлениях. В последних возможна двусторонняя связь, но передача и прием ведутся поочередно.

По виду передаваемых сообщений различают системы передачи дискретных и непрерывных сообщений.

По назначению передаваемых сообщений различают следующие типы систем: **телефонные,** предназначенные для передачи речи; **телеграфные,** предназначенные для передачи текста; **фототелеграфные,** предназначенные для передачи неподвижных изображений; **телевизионные***,* предназначенные для передачи изображений; **телеметрические***,* предназначенные для передачи измерительной информации; **системы телеуправления***,* предназначенные для передачи команд управления; **системы передачи данных***,* предназначенные для обслуживания автоматизированных систем управления.

В зависимости от механизма распространения радиоволн, используемых для передачи сообщений, различают ионосферные, тропосферные, метеорные и космические системы.

Классификация систем по другим признакам, таким, как вид модуляции, способ уплотнения-разделения каналов, способ обеспечения свободного доступа, будет приведена далее.

Любая система характеризуется рядом показателей, которые можно разделить на **информационно-технические** (достоверность, помехоустойчивость, скорость передачи информации, задержка, диапазон частот) и **конструктивно-эксплуатационные** (объем и масса аппаратуры, энергетический КПД, мобильность, гибкость, эксплуатационная надежность, стоимость). Далее будут рассмотрены лишь характеристики, наиболее существенные с точки зрения передачи информации.

Достоверность передачи информации характеризует степень соответствия принятых сообщений переданным. Она зависит от параметров самой системы, степени ее технического совершенства и условий работы. Последние определяются типом и состоянием линии связи, видом и интенсивностью помех, а также организационными мероприятиями по соблюдению правил радиообмена и эксплуатации аппаратуры.

Под **помехоустойчивостью** РТСПИ понимается способность системы противостоять вредному действию помех на передачу сообщений. Она зависит от способов кодирования, модуляции, метода приема и т. п. Количественно помехоустойчивость систем передачи дискретных сообщений можно характеризовать вероятностью ошибки $p_{\text{ош}}$ при заданном отношении средних мощностей сигнала и помехи в полосе частот, занимаемой сигналом, или требуемым отношением средних мощностей сигнала и помехи на входе приемника системы, при котором обеспечивается заданная вероятность ошибки $p_{\text{ош}}$.

Одной из важных характеристик системы передачи информации является **задержка***,* под которой понимается промежуток времени между подачей

сообщения от источника на вход передающего устройства и выдачей восстановленного сообщения получателю приемным устройством. Она зависит от протяженности линии связи и времени обработки сигнала в передающем и приемном устройствах.

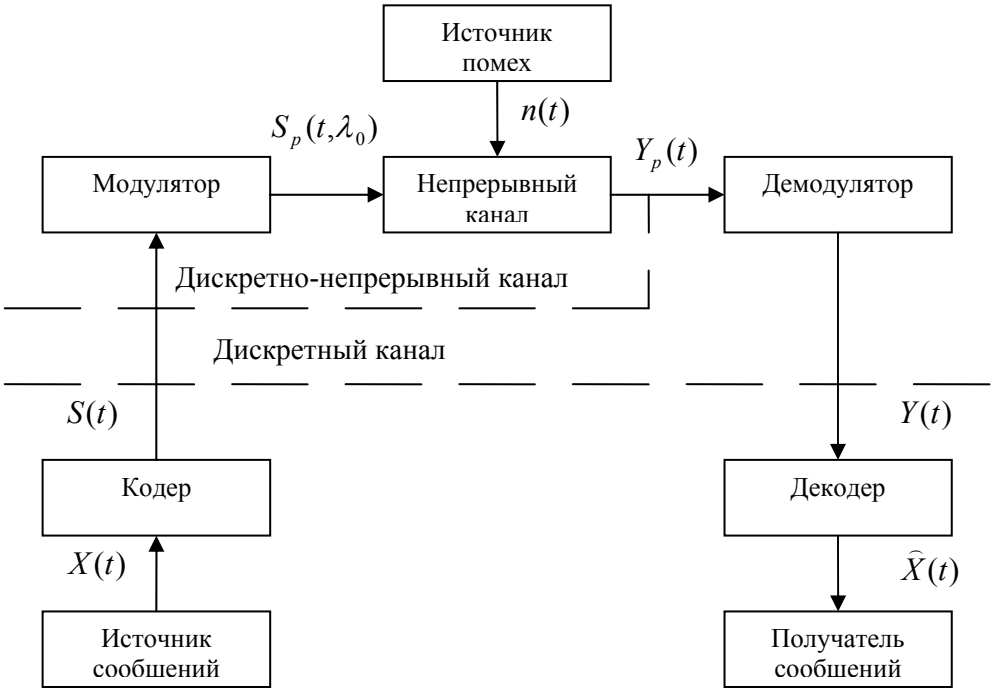


Рис. 6.1. Обобщенная схема системы передачи информации

Другие важные характеристики системы, такие как скорость передачи информации и эффективность, рассмотрены в работах [9, 36].

Рассмотрим обобщенную схему РТСПИ с одним источником и одним получателем (рис. 6.1).

Источник сообщений – это устройство, осуществляющее выбор сообщений из ансамбля сообщений. Им может быть датчик, ЭВМ и т. п. Учитывая, что первичные сигналы часто отождествляют с передаваемыми сообщениями, в дальнейшем под источником сообщений будем понимать источник первичных сообщений разной природы и преобразователь неэлектрической величины в электрическую.

Для систем передачи информации представляют интерес источники, которые изменяют свое состояние с течением времени. Поэтому источники сообщений можно рассматривать как генераторы СП с реализациями $X(t)$. По типу генерируемых процессов источники делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретные источники имеют конечное число внутренних состояний, которым соответствует конечное число символов. Совокупность символов называется **алфавитом** источника (сообщения). Число разных символов есть **объем алфавита** L. Сообщение образуется путём последовательного выбора символов из алфавита источника и является реализацией дискретного СП. Примером дискретного сообщения может служить текст или

последовательность единиц и нулей на выходе цифрового устройства. В первом случае символами источника являются буквы, во втором – цифры 0 и 1. Каждый символ X_i характеризуется вероятностью появления $p(X_i)$. Совокупность символов и вероятностей их появления называется **ансамблем источника**.

Непрерывные источники имеют бесконечное число внутренних состояний и порождают СП, реализации которых описываются или непрерывными функциями времени, или функциями дискретного времени. Примерами непрерывных сообщений являются речь, музыка, значения напряжений (токов), снимаемые с телеметрических датчиков и т. д.

С любой заранее заданной точностью непрерывное сообщение может быть заменено дискретным путем квантования по времени и уровню. Дискретизация по времени основана на теореме Котельникова (теореме отсчетов) [4, 9]. В соответствии с ней сообщение, описываемое функцией времени со спектром, ограниченным верхней частотой F_B, полностью определяется значениями своих отсчетов, взятых через интервал времени $\Delta t = F_B/2$ (рис. 6.2).

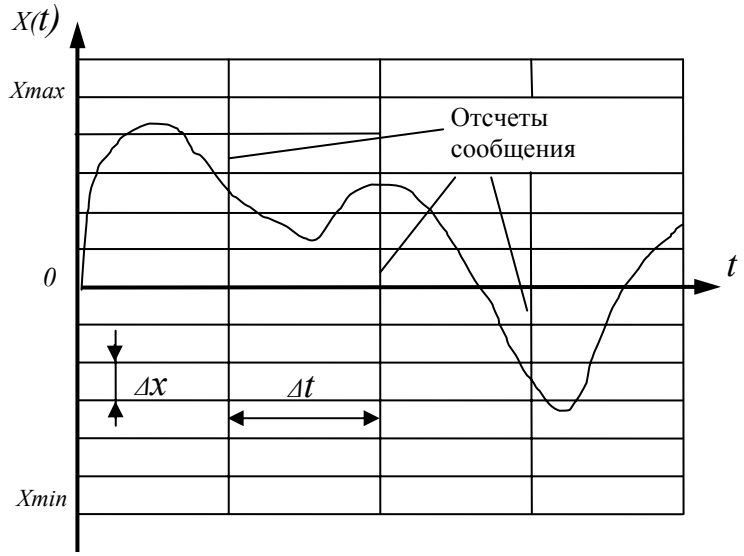


Рис. 6.2. Квантование непрерывного сообщения

Диапазон изменения непрерывных сообщений $(X_{\min}, X_{\max})$ можно разбить на дискретные уровни с материалом ΔX и непрерывные отсчеты заменить их ближайшими дискретными значениями. Такую замену называют **квантованием** непрерывных отсчетов, а величину ΔX – шагом квантования. Дискретные значения отсчетов можно обозначить символами по аналогии с обозначением внутренних состояний дискретного источника. Совокупность таких символов образует алфавит квантованного сообщения.

Очевидно, объем алфавита совпадает с числом уровней квантования:

$$L = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{\Delta X} + 1 .$$

Максимальная ошибка при такой замене непрерывных значений отсчетов дискретными равна

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\Delta X}{2} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2(L-1)}.$$

Выбором шага квантования ΔX можно всегда обеспечить допустимое значение ошибки.

Таким образом, квантование непрерывных сообщений по времени и по уровню позволяет приближенно заменить их дискретными и рассматривать как последовательности символов. Очевидно, за время T количество символов в последовательности $K \cong 2 \cdot F_B \cdot T$, а число сообщений $M_x = L^k$.

Кодер (кодирующее устройство) служит для преобразования сообщения $X(t)$ в первичный электрический сигнал $S(t)$, который подается на модулятор. Кодирование заключается в сопоставлении последовательности символов источника определенным образом сформированной последовательности символов кодера [9, 36].

В узком смысле кодирование представляет собой преобразование дискретного сообщения в последовательность кодовых символов, осуществляемое по определенному правилу (в широком смысле под кодированием понимают любое преобразование сообщения в сигнал путем установления взаимного соответствия). Множество всех кодовых последовательностей (кодовых комбинаций), возможных при данном правиле кодирования, образует **код**. Совокупность символов, из которых составляются кодовые последовательности, называют **кодовым алфавитом**, а их число (объем кодового алфавита) – **основанием кода**. Число символов в кодовой комбинации может быть одинаковым или разным. Соответственно различают равномерные и неравномерные коды. Число символов в кодовой комбинации равномерного кода называется **длиной кода**. Из-за простоты реализации наибольшее распространение получил код с основанием 2 (двоичный код), имеющий в алфавите два символа: 0 и 1. Последовательности кодовых символов на выходе кодера называются **кодовыми комбинациями** или кодовыми словами [9, 36].

При установлении взаимно-однозначного соответствия между сообщениями и кодовыми комбинациями (при выборе правила кодирования) могут решаться разные задачи. Это сопоставление может быть выполнено таким образом, чтобы на передачу сообщения затрачивать в среднем минимальное число сигналов, т. е. экономно. В этом случае говорят о **статистическом или эффективном кодировании**. Наилучшим с этой точки зрения является код, при котором, во-первых, имеется возможность восстановления первоначального сообщения по кодовой комбинации, и, во-вторых, для представления одного сообщения в среднем требуется минимальное число символов. Первому требованию удовлетворяют обратимые коды, у которых все кодовые комбинации различимы и однозначно связаны с соответствующими сообщениями. Код, удовлетворяющий второму требованию, называется **экономным**.

С другой стороны кодирование может повысить достоверность передачи информации. Для этого используются так называемые **помехоустойчивые**

коды, в которых используется лишь некоторая часть из общего числа возможных кодовых комбинаций. Благодаря этому появляется возможность обнаруживать и исправлять ошибки в принятых комбинациях, что и способствует повышению достоверности передачи информации [9, 36].

Введение дополнительных символов при помехоустойчивом кодировании и устранение избыточности при статистическом кодировании являются противоположно направленными операциями. Необходимость их проведения объясняется тем, что естественную избыточность источника трудно учесть при технической реализации, декодеров, она не согласована с характером искажений и помех, действующих на сигнал в процессе его передачи. Искусственная избыточность вводится с учетом как характера искажений и помех, так и возможности построения устройств, способных обнаруживать и исправлять возникающие при передаче ошибки.

Таким образом, при кодировании дискретных сообщений кодер преобразует сообщение из одного алфавита в другой, производит статистическое (экономное) и помехоустойчивое кодирование. Выходным сигналом кодера является случайная последовательность, составленная из дискретных сигналов, чаще всего двоичных. При передаче непрерывных сообщений кодер может отсутствовать, если преобразование непрерывных сообщений в дискретные сигналы не производится. Если же для передачи непрерывных сообщений используются дискретные сигналы, то в кодере перечисленным выше операциям предшествует преобразование аналоговых (непрерывных) сообщений в последовательности дискретных сигналов.

Модулятор преобразует первичный сигнал $S(t)$ в радиосигнал $S_p(t, \lambda_0)$. Преобразование заключается в изменении одного или нескольких параметров λ_0 сигнала несущей частоты в соответствии с изменением модулирующего сигнала.

Совокупность операций превращения сообщения $X(t)$ в радиосигнал $S_p(t, \lambda_0)$ составляет **способ передачи информации**. Основным при описании способа передачи является указание типа используемых кодов и вида модуляции при передаче дискретных сообщений, а также описание аналого-цифрового преобразования при передаче непрерывных сообщений дискретными сигналами.

В общем случае под **каналом передачи информации** понимают всю совокупность технических средств, обеспечивающих передачу электрических сигналов от источника сообщений к потребителю. При рассмотрении каналов линию связи чаще всего полагают заданной (считается, что все необходимые характеристики линии связи известны) и все задачи анализа и синтеза каналов передачи информации сводятся к анализу и синтезу операторов преобразования сигналов в передатчике, приемнике и других устройствах [3, 23].

Каналы передачи информации классифицируют по различным признакам: по назначению, по характеру линий связи, по диапазону частот, по характеру сигналов на входе и выходе каналов и т. п. В теории передачи сигналов каналы

классифицируют по характеру сигналов на входе и выходе. Различают непрерывные, дискретные и дискретно-непрерывные каналы. В непрерывных каналах сигналы на входе и выходе непрерывны по уровням; в дискретных каналах – они соответственно дискретны; а в дискретно-непрерывных – сигналы на входе дискретны, а на выходе непрерывны, и наоборот.

Возможна также классификация каналов по назначению РТСПИ (телеграфные, телефонные, телевизионные, телеметрические и др.), по виду физической среды распространения (проводные, кабельные, волноводные и др.) и по диапазону используемых ими частот. К радиодиапазону относят частоты в пределах 30. . .$30 \cdot 10^{12}$ Гц, что соответствует длинам волн от 10^8 м до 0,1 мм. Кроме радиодиапазона, в настоящее время широкое распространение нашел и оптический диапазон волн. В силу дискретного характера электромагнитного излучения в оптическом диапазоне волн такие каналы принято называть **квантовыми**.

По способу распространения радиоволн различают каналы с открытым и с закрытым распространением. В каналах с закрытым распространением электромагнитная энергия распространяется по направляющим линиям (кабельные, проводные, волноводные СВЧ тракты и др.): для них характерны малый уровень помех и постоянство параметров сигнала, что позволяет передавать информацию с высокой скоростью и достоверностью.

Рассмотрим кратко особенности использования радиоволн различных диапазонов в каналах с открытым распространением. В диапазонах инфранизких (ИНЧ), очень низких (ОНЧ) и низких (НЧ) частот на небольших расстояниях поле в месте приема создается за счет дифракционного огибания волнами выпуклой поверхности Земли. На больших расстояниях радиоволны распространяются в своеобразном сферическом волноводе, внутренняя стенка которого образуется поверхностью Земли, а внешняя – ионосферой. Такой механизм распространения позволяет принимать сигналы в любой точке Земли, причем параметры принятых сигналов отличаются достаточно высокой стабильностью. Особенностью этих диапазонов является также способность волн проникать в толщу Земли и воды на глубину в десятки метров. Принципиальным недостатком таких каналов являются: ограниченная полоса частот (единицы герц) и очень большие линейные размеры антенных устройств, соизмеримых с длиной волны, составляющей километры. Сверхдлинные волны применяются для навигации и передачи информации на подводные объекты.

В распространении волн диапазона высоких частот (ВЧ) принимает участие ионосфера: если волны длиннее 1 км отражаются от нижнего ее слоя практически зеркально, то декаметровые волны достаточно глубоко проникают в ионосферу, что приводит к эффекту **многолучевости**, когда в точку приема приходят одновременно несколько сигналов с различным временем запаздывания. Декаметровые волны широко применяются для глобальной связи и радиовещания. С их помощью можно передавать информацию сравнительно большого объема в пределах всего земного шара при ограниченной мощности передатчика и небольших по размеру антеннах. Полоса частот передаваемых

сигналов в декаметровом канале не превышает десяти килогерц. До появления спутниковых систем связи этот диапазон был единственным пригодным для организации связи между двумя любыми пунктами на Земле без промежуточной ретрансляции.

Гектометровые волны днем распространяются как земные, а ночью – как ионосферные. Дальность распространения земной волны над сушей не превышает 500 км, а над морем – 1000 км. Диапазон средних частот широко используется в радиовещании, связи и радионавигации.

Волны диапазона частот от 30 МГц и выше слабо дифрагируют и поэтому распространяются в пределах прямой видимости. Некоторого увеличения дальности можно достичь, применив поднятые антенны, а для организации связи на расстояния, превышающие прямую видимость, ретрансляцию сигналов. Системы с ретрансляцией сигналов называются **радиорелейными линиями**. Одним из основных достоинств высокочастотных диапазонов является большой частотный ресурс, что позволяет создавать радиосистемы передачи информации с высокой скоростью передачи и радиосети с большим числом одновременно работающих радиостанций.

Стремление увеличить ширину полосы частот канала, а также повысить пространственную селекцию сигналов за счет использования остронаправленных антенн при их ограниченных размерах привело к освоению диапазона миллиметровых волн. Главной его особенностью является сильное поглощение радиоволн в дожде и тумане, что ограничивает их применение в наземных системах большой дальности. Однако в космических и спутниковых системах они весьма перспективны.

Новый этап в освоении высокочастотной области радиодиапазона для средств связи открыл запуск искусственных спутников Земли (ИСЗ). Обычно ИСЗ находятся на высоте от 500 до 40 000 км от поверхности Земли и поэтому обеспечивают радиосвязь между земными станциями, удаленными на расстояния до 10. . .17 тыс. км. Линия спутниковой связи состоит из двух оконечных земных станций и одного или нескольких спутников-ретрансляторов, обращающихся вокруг Земли по заданным орбитам [9].

Выбор рабочих частот для линии радиосвязи через ИСЗ определяется условиями распространения и поглощения радиоволн, уровнем внешних помех, принимаемых антенной, возможными техническими средствами, взаимными помехами между системами связи через ИСЗ и другими службами, работающими в смежных или совмещенных диапазонах частот. Ограничение диапазона частот снизу определяется экранирующим действием ионосферы, а сверху – поглощением в тропосфере. Эти два фактора предопределили диапазон рабочих частот 40 МГц. . .40 ГГц. В настоящее время наибольшее использование находит диапазон 1. . .12 ГГц.

В зависимости от того, распространяются ли сигналы в свободном пространстве или по направляющим линиям, различают каналы радиосвязи и каналы проводной связи: воздушные, кабельные, волноводные, световодные и др. По воздушным проводным линиям связи передают сигналы в диапазоне 0. . .160 кГц. На более высоких частотах возрастает влияние помех, резко

увеличивается затухание сигналов, сказывается влияние радиовещательных станций длинноволнового диапазона. Существенный недостаток воздушных проводных линий связи - большая зависимость их характеристик от атмосферных условий. Значительно лучшими характеристиками и большей устойчивостью в работе обладают кабельные линии связи. Они являются основой сетей дальней магистральной связи, по ним передают сигналы в диапазоне частот от 600 кГц до 60 МГц. С дальнейшим увеличением частоты затухание сигналов резко возрастает.

Наряду с проводными линиями связи широко используют радиолинии различных диапазонов. Эти линии во многих случаях более экономичны, позволяют быстро организовать сверхдальнюю (глобальную) связь без промежуточных станций. Кроме того, эти линии являются единственным средством связи с подвижными объектами (воздушными судами, космическими кораблями, морскими судами, автомобилями).

Наибольшее распространение для передачи многоканальных сообщений получили наземные радиорелейные линии, работающие в метровом, дециметровом и сантиметровом диапазонах волн на частотах от 60 МГц до 15 ГГц. На этих частотах обеспечивается широкая полоса тракта передачи, необходимая для многоканальной телефонной и телевизионной связи, мал уровень атмосферных и промышленных помех. Все это обеспечивает высокую помехоустойчивость передачи информации.

Разновидностью радиорелейных линий являются **тропосферные линии**, в которых принимаются сигналы, отраженные от неоднородностей тропосферы. Использование дальнего тропосферного распространения радиоволн позволяет создать линии дальней радиосвязи с расстояниями между ретрансляционными станциями в несколько сотен километров. Эти линии работают чаще всего в диапазоне частот от 0,5 до 6 ГГц.

Широко применяются и очень перспективны **спутниковые линии связи** [9]. По принципу работы они представляют разновидность радиорелейных линий, ретрансляторы которых находятся на искусственных спутниках Земли. Существенным преимуществом спутниковых линий является большая дальность связи, которая при одном спутнике (ретрансляторе) составляет около 10000 км. При использовании системы спутников можно организовать глобальную связь – между любыми пунктами Земли. Спутниковые линии связи работают в диапазоне частот 4. . .6 ГГц. В настоящее время отведено шесть новых частотных диапазонов от 11 до 250 ГГц, освоение которых позволит существенно повысить качественные показатели спутниковой связи [9, 43]. Спутниковые системы связи, особенно с цифровыми методами передачи сигналов, перспективны и в гражданской авиации, особенно с выходом на воздушные трассы сверхзвуковых пассажирских судов.

В настоящее время для **оптической связи** используется диапазон длин волн 0,5. . .10,6 мкм, включающий видимый (0,5. . .0,76 мкм) и инфракрасный (0,76. . .10,6 мкм) участки спектра электромагнитных колебаний. Имеющаяся широкая полоса частот оптических каналов связи позволяет создавать каналы и сети связи с огромной пропускной способностью. В космических и

атмосферных лазерных линиях связи громадный коэффициент усиления передающих оптических антенн и соответствующая малая расходимость лазерного луча также позволяют получить большое отношение сигнал/шум в приемнике в широкой полосе частот при маломощных передатчиках.

По условиям распространения оптические линии и каналы связи можно разделить на три категории:

- волоконно-оптические линии связи;
- лазерные космические линии связи;
- наземные атмосферные оптические линии связи.

Оптическая (лазерная) линия связи – это не просто линия связи с очень высокой (световой) несущей. По сравнению с системами радиодиапазона сигналы и шумы в лазерных линиях связи имеют принципиально иной характер. При детектировании оптического сигнала, при котором происходит его преобразование и электрический, необходимо учитывать корпускулярную (квантовую) природу оптического сигнала. В видимом диапазоне длин волн тепловые шумы отсутствуют. Поэтому оптические элементы приемника, такие как антенна, оптические фильтры и другие, не создают шумов, несмотря на активные потери в этих элементах. Ширина диаграммы направленности приемной оптической антенны определяется не только апертурой антенны, но и размером фотодетектора, который можно рассматривать как совокупность большого числа облучателей многолучевой антенны. Эти облучатели запараллелены и в сумме создают относительно широкую диаграмму направленности приемной антенны [43].

Совокупность технических средств, включенных между модулятором и демодулятором (рис. 6.1), т. е. выходные каскады передатчика, передающая антенна, среда распространения, приемная антенна и линейная часть приемника, образуют непрерывный канал, так как входные и выходные радиосигналы $S_p(t,\lambda_0)$ и $Y_p(t)$ непрерывны по своей природе. Рассматривая часть системы между выходом кодера и входом декодера, получим дискретный канал. Наконец, часть системы между выходом кодера и входом демодулятора образует дискретно-непрерывный канал. Таким образом, дискретный канал содержит дискретно-непрерывный, который в свою очередь включает в себя непрерывный канал.

Рассмотрим особенности передачи сигналов по непрерывному каналу. Радиосигнал $S_p(t,\lambda_0)$ претерпевает изменения при распространении по каналу. Эти изменения обусловлены поглощением и рассеянием энергии, отражением от неоднородностей среды распространения, замираниями сигнала, искажениями сигнала за счет несовершенства аппаратуры передатчика и приемника. Вследствие этих изменений принятый полезный сигнал $S_p(t,\lambda)$ отличается от переданного $S_p(t,\lambda_0)$. Вектор параметров λ принятого сигнала кроме параметров λ_0 получает дополнительные составляющие, например, время запаздывания, доплеровский сдвиг частоты, изменение амплитуды и др. Некоторые из дополнительных параметров на приемной стороне могут

считаться известными и их можно учесть при приеме сигнала. Например, ослабление сигнала легко компенсируется соответствующим усилением в приемнике.

Для передачи сообщений наиболее опасны искажения полезного сигнала, связанные с изменением его информационных параметров. Так как физические процессы, происходящие с излученным сигналом в канале, сложны и не поддаются простому математическому описанию, то предложены многочисленные модели каналов, с разной степенью подробностей отражающие реальные процессы. Простейшие модели каналов рассматриваются в следующих подразделах.

Кроме излученного сигнала на антенну приемника поступают сигналы от посторонних источников и создают помехи приему полезного сигнала. Природа помех многообразна. Внешними мешающими помехами могут быть естественные электромагнитные процессы, происходящие в атмосфере, ионосфере, космосе, а также сигналы других радиотехнических систем. К внутренним помехам относятся флуктуационные шумы приемника, нестабильности питающих напряжений и параметров элементов приемника. На рис. 6.1 наличие помех в канале отображено в виде источника помех, вырабатывающего случайный процесс $n(t)$. В большинстве случаев помехи складываются на входе приемника с полезным сигналом и поэтому называются **аддитивными**. Наиболее распространено предположение о СП $n(t)$ как о нормальном белом шуме с нулевым средним значением и спектральной плотностью N_0.

Таким образом, выходной сигнал канала часто можно представить в виде аддитивной модели

$$Y_p(t) = S_p(t,\lambda) + n(t),$$

где $S_p(t,\lambda)$ – принятый с искажениями полезный сигнал с параметрами λ. Данная модель не описывает многие практические случаи, когда прием полезного сигнала может происходить в условиях узкополосных и импульсных помех, а также замираний сигнала (мультипликативных помех).

Демодулятор и декодер выполняют операции по превращению принимаемого сигнала $Y_p(t)$ в сообщение. Демодулятор выделяет сигнал $Y(t)$, который модулирует несущую принятого колебания. Декодер по этому сигналу вырабатывает сообщение $\widetilde{X}(t)$. Превращение сообщения в сигнал, выполненное на передающей стороне, и преобразование сигнала в сообщение на приемной стороне являются взаимозависимыми операциями. Поэтому кодер и декодер, модулятор и демодулятор принято объединять и рассматривать как единые устройства. Устройство, выполняющее функции модулятора и демодулятора, называется **модемом**, а устройство, осуществляющее кодирование сообщений и декодирование сигналов – **кодеком**.

Из-за искажений принятого сигнала и помех сообщение $\tilde{X}(t)$, направляемое получателю, может отличаться от сообщения $X(t)$, выработанного источником. Степень соответствия $\tilde{X}(t)$ и $X(t)$ зависит от операций, составляющих способ передачи, от уровня сигнала и помех, от свойств канала связи и от вида преобразования сигнала в сообщение на приемной стороне. Основной операцией при приеме непрерывных сообщений является **демодуляция**, т. е. выделение сообщения $\tilde{X}(t)$, модулирующего несущую принятого сигнала $Y_p(t)$.

Совокупность операций по превращению сигнала $Y_p(t)$ в сообщение $\tilde{X}(t)$ называется **способом приема**. При передаче дискретных сообщений различают прием в целом и поэлементный (посимвольный) прием [36].

Сущность **приема в целом** состоит в том, что на приемной стороне определяется расстояние между принятым сигналом и всеми образцами ожидаемых сигналов. За переданный сигнал принимают образец, наименее удаленный от принятого сигнала. Этот выбор осуществляет специальная решающая схема. Число образцов должно быть равно числу возможных сообщений источника. Прием в целом является оптимальным, однако его реализация требует значительного объема оборудования.

При **посимвольном приеме** преобразование сигнала в сообщение происходит в два этапа с помощью двух решающих схем. На первом этапе непрерывное колебание $Y_p(t)$ преобразуется демодулятором в последовательность дискретных сигналов (символов кодового алфавита) $Y(t)$. Во второй решающей схеме производится коррекция ошибок в последовательности сигналов с выхода первой решающей схемы. На выходе второй решающей схемы формируются символы сообщения.

Техническая реализация посимвольного приема обычно значительно проще, чем приема в целом. Поэтому, несмотря на проигрыш в помехоустойчивости, посимвольный прием нашел наибольшее распространение в системах передачи дискретных сообщений.

6.2. Модели непрерывных каналов

Непрерывными называются каналы, входные и выходные сигналы которых принимают произвольные значения из некоторого интервала. Непрерывные каналы можно классифицировать по виду помех и характеру преобразования входного сигнала $S_p(t,\lambda_0)$ в полезный принятый $S_p(t,\lambda)$. Если ограничиться предположением, что в канале действует аддитивный нормальный белый шум $n(t)$, то непрерывные каналы подразделяются по виду преобразования $S_p(t,\lambda_0)$ в $S_p(t,\lambda)$, т.е. по виду искажений сигнала. В большинстве радиотехнических систем излученные сигналы являются узкополосными:

$$S_p(t,\lambda_0) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – функции, отображающие законы амплитудной и угловой модуляции; ω_0 – несущая частота сигнала.

Искажения излученного сигнала $S_p(t,\lambda_0)$ принято рассматривать отдельно для однолучевых и многолучевых каналов. В однолучевых каналах электромагнитные колебания распространяются по одному пути. Однолучевыми каналами являются линии связи на расстояниях прямой видимости: линии ближней радиосвязи на коротких и ультракоротких волнах, линии связи Земля-воздух, воздух-Земля, воздух-воздух и т. п.

Принятый полезный сигнал по отношению к излученному характеризуется дополнительными параметрами: случайным ослаблением $\alpha(t)$, средним временем запаздывания τ_3, доплеровским смещением частоты Ω и случайной начальной фазой θ и может быть записан в виде

$$S_p(t,\lambda) = \alpha(t)A(t-\tau_3)\cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi(t-\tau_3) - \theta].$$

Таким образом, совокупность параметров принятого сигнала $\lambda = \{A(t), \varphi(t), \omega_0, \alpha(t), \tau_3, \Omega, \theta\}$. В зависимости от знания на приемной стороне значений дополнительных параметров $\alpha(t), \tau_3, \Omega, \theta$ можно выделить несколько моделей непрерывных каналов [16, 36].

Гауссовским каналом называется канал, в котором действует аддитивный нормальный белый шум, а искажения полезного сигнала несущественны и могут быть скомпенсированы. Компенсация искажений возможна, если на приемной стороне дополнительные параметры полностью известны или могут быть измерены достаточно точно. Поэтому можно считать, что $S_p(t,\lambda_0) = S_p(t,\lambda)$. Выходной сигнал гауссовского канала

$$Y_p(t) = S_p(t,\lambda_0) + n(t).$$

Представление выходного сигнала в виде суммы полезного сигнала и нормального белого шума $n(t)$ позволяет указать правило принятия решения о переданном сигнале.

Гауссовский канал с неизвестной фазой сигнала определяется параметрами $\tau_3, \Omega, \alpha(t) = \alpha$, которые постоянны и известны. Фаза θ считается равномерно распределенной величиной в интервале $[0, 2\pi]$. Такая модель хорошо описывает процессы в линиях радиосвязи на расстояниях прямой видимости.

Канал с амплитудными замираниями является дальнейшим усложнением канала с неизвестной фазой в предположении, что $\alpha(t)$ – случайная функция времени. Выходной полезный сигнал канала с замираниями

$$S_p(t,\lambda) = \alpha(t)A(t)\cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi(t) - \theta].$$

Случайная функция $\alpha(t)$ перемножается с сигналом и поэтому называется **мультипликативной помехой**, которую можно рассматривать как функцию, модулирующую по амплитуде излученный сигнал. Модуляция приводит к расширению спектра принятого сигнала относительно спектра излученного сигнала. Поэтому такой канал называют **каналом с рассеянием энергии по частоте**.

По времени корреляции мультипликативные помехи разделяются на медленные и быстрые [9, 17]. О медленных замираниях говорят в случае, если время корреляции $\alpha(t)$ значительно превышает интервал наблюдения сигнала. Причинами медленных замираний является изменения свойств среды распространения радиоволн в зависимости от метеорологических условий, времени суток, года, от солнечной активности и т. п. Быстрая мультипликативная помеха имеет время корреляции меньше, чем интервал наблюдения сигнала. Основной причиной быстрых замираний является наличие многих путей, по которым распространяются электромагнитные волны [9, 17]. Многолучевое распространение возникает при передаче информации на дальние расстояния при отражении радиоволн от протяженных поверхностей суши и моря, при отражении от ионосферы и тропосферы. Из-за разных путей распространения времена запаздывания отдельных принимаемых сигналов различны. Поэтому многолучевые каналы называют также **каналами с рассеянием энергии во времени**.

Результирующий сигнал на выходе многолучевого канала

$$S(t,\lambda) = \sum_{i=1}^{l} S_{pi}(t,\lambda_{0i}),$$

где $S_{pi}(t,\lambda_{0i}) = \alpha_i(t)A(t)\cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi(t) - \theta_i]$.

При большом числе путей можно считать, что $S_p(t,\lambda)$ является реализацией нормального СП. Обычно среднее значение процесса равно нулю, тогда модели многолучевых каналов различаются по виду КФ [43].

Таким образом, непрерывный канал считается заданным, если указаны мощность сигналов, полоса частот, дано описание моделей помех и искажений сигналов.

6.3. Модели дискретных каналов

Дискретными называются каналы, входные и выходные сигналы которых принимают конечное число мгновенных значений. Понятие дискретного канала естественно возникает при передаче дискретных сообщений и определяется как совокупность технических средств, включенных между кодером и декодером (рис. 6.1).

Переход от дискретных сигналов к непрерывным осуществляется на передающей стороне при манипуляции параметрами непрерывной несущей. На приемной стороне дискретные сигналы появляются на выходе первой решающей схемы (демодулятора).

Свойства дискретного канала определяются непрерывным каналом и структурой модема. Дискретный канал задается множеством входных $\{s_i\}$, $i=\overline{1,L_s}$ и выходных $\{y_j\}$, $j=\overline{1,L_y}$ символов (сигналов), длительностью символов τ и условными вероятностями $P(y_j/s_i)$ преобразования входных символов в выходные. Обычно длительности всех входных и выходных символов одинаковы. Объемы алфавитов входных L_s и выходных L_y сигналов в общем случае могут быть разными, причем $L_y \geq L_s$. Однако в большинстве случаев $L_y = L_s$. Для дискретных каналов широко используется представление принятой последовательности символов $Y=(y_1, y_2,..., y_n)$ в виде суммы переданной последовательности $S=(s_1, s_2,...s_n)$ и комбинации помехи (вектора ошибки) $E=(e_1, e_2,..., e_n)$

$$Y = S \oplus E,$$

где $\oplus$ понимается как поразрядное сложение S и E по модулю L_s. В случае двоичных последовательностей ($L_s=2$) нулевой символ вектора ошибки $e_i=0$ означает, что i-й символ принят правильно $(y_i=s_i)$, а $e_i=1$ ошибку в приеме $(y_i \neq s_i)$.

Классификацию дискретных каналов удобно вести по вектору ошибки E. Разные модели каналов отличаются распределением вероятностей вектора E. Наиболее распространены следующие модели [36].

Канал без памяти – это канал, в котором символы e_i являются независимыми СВ. Прием каждого сигнального символа в таком канале не зависит от результата приема предыдущих символов. При наличии такой зависимости имеет место **канал с памятью**. Дискретный канал называется стационарным, если вероятность ошибочного приема символов не изменяется с течением времени.

В силу простоты технической реализации наибольшее применение находят каналы, сигналы в которых представляются двоичным кодом. Такие каналы называются **двоичными (бинарными)** и задаются с помощью графа (рис. 6.3). Вероятности $P(0/0)$ к $P(1/1)$ характеризуют правильный прием символов 0 и 1 соответственно, а $P(1/0)$ и $P(0/1)$ - вероятности ошибок при приеме символов 0 и 1.

Симметричным двоичным называется канал, в котором вероятности ошибок при приеме 0 и 1 одинаковы, $P(1/0)=P(0/1)$, а следовательно, равны и вероятности правильного приема символов $P(0/0)=P(1/1)=1-p$. Для симметричного стационарного канала без памяти вероятность искажения i-го символа $P(e_i=1)=p$, а вероятность правильного приема $P(e_i=0)=1-p$.

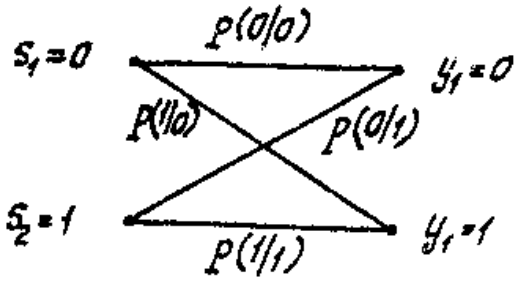


Рис. 6.3. Граф двоичного канала

Двоичный канал без памяти **со стиранием** отличается от рассмотренного тем, что выходной алфавит помимо 0 и 1 содержит третий символ «?» – символ стирания. Он появляется в тех случаях, когда демодулятор не может надежно опознать переданный символ. Такой канал часто используется в системах передачи информации с обратной связью, когда при приеме символа «?» производится повторение передачи. Это позволяет значительно снизить вероятность ошибочного приема за счет уменьшения скорости передачи.

Марковский канал является простейшей моделью дискретного канала с памятью. Он характеризуется вектором ошибки, символы которого образуют простую цепь Маркова [44]. Вероятность искажения символа в этом канале зависит от результата приема только предыдущего символа.

Из других моделей симметричных двоичных каналов следует отметить канал с пакетами ошибок, который характеризуется тем, что искажающие символы (единицы) вектора ошибки группируются в пакеты. Такое группирование происходит, если в непрерывном канале, входящем в дискретный, действуют сильные замирания сигналов на время длительности нескольких символов или присутствуют импульсные помехи большой длительности. Подобные каналы задаются вероятностями искажений серий из q символов подряд.

6.4. Статистика случайных сигналов и помех в реальных каналах связи

В системах связи на передающей стороне используют сигналы вида

$$S_p(t,\lambda_0) = A(t)\cos\left[\omega_0 t + \theta(t)\right], \qquad (6.1)$$

где ω_0 – средняя частота; $A(t)$ и $\theta(t)$ – соответственно амплитуда (огибающая) и фаза, изменяющиеся по сравнению с колебанием частоты ω_0, как правило, настолько медленно, что сигнал $S_p(t,\lambda_0)$ можно считать узкополосным [9, 36]. Таковы, в частности, сигналы обычной амплитудной, частотной или фазовой модуляции и их разновидностей. В этом случае при многолучевом распространении сигналов, характерном, как уже отмечалось, для многих реальных каналов (в частности, радиоканалов) каждая из скалярных компонент

выходного сигнала $\mathbf{S}_p(t,\lambda,r)$, как это описано в [16, 43], даже при заданном на входе скалярном сигнале ($m=1$) имеет вид

$$S_p(t,\lambda,\mathbf{r}) = \sum_{\nu=1}^{N} A(t-\tau_\nu) = \left\{ \tilde{h}_{x\nu i}(t,\mathbf{r}) \cos\left[\omega_0 t + \theta(t-\tau_\nu) - \omega_0\tau_\nu\right] + \right.$$

$$\left. + \tilde{h}_{y\nu i}(t,\mathbf{r}) \sin\left[\omega_0 t + \theta(t-\tau_\nu) - \omega_0\tau_\nu\right] \right\} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \gamma_{\nu i}(t,\mathbf{r})\, A(t-\tau_\nu) \cos\left[\omega_0 t + \varphi_{\nu i}(t,\mathbf{r}) + \theta(t-\tau_\nu)\right], \quad i = 1, 2, \ldots, p, \qquad (6.2)$$

где $\mathbf{r}$ характеризует координаты точки наблюдаемой области пространства; τ_ν – среднее время задержки ν-го луча, которое в большинстве реальных каналов меняется значительно медленнее, чем сами сигналы, допускает простое измерение и потому может считаться известным в месте приема [16, 36]; $\tilde{h}_{x\nu i}(t,\mathbf{r})$, $\tilde{h}_{y\nu i}(t,\mathbf{r})$ – квадратурные компоненты передаточной функции канала по i-й скалярной компоненте выходного сигнала в ν-м луче (медленно меняющиеся по сравнению с колебанием частоты ω_0); $\gamma_{\nu i}(t,\mathbf{r})$ – модуль той же передаточной функции (относительно которого делается аналогичное допущение); $\varphi_{\nu i}(t,\mathbf{r})$ – суммарный фазовый сдвиг в i-й компоненте ν-го луча; N – число лучей в канале, обусловленное его физическими свойствами.

При использовании представления (6.2) следует учитывать, что сигнал на передаче $S_p(t,\lambda_0)$ имеет конечную длительность T, соответствующую длительности передаваемого им сообщения или его элемента (например, отдельного символа), поэтому $A(t)=0$ при $t<0, t>T$.

Как правило, каждый из лучей сигнала в (6.2), в свою очередь, является результатом наложения многих компонент (подлучей), разность задержек которых в канале $\tau_{\text{пл}} << 1/F$, где F – полоса частот передаваемых сигналов. В условиях флуктуации это условие порождает так называемые неизбирательные (неселективные) по частоте замирания сигнала. Разность же задержек лучей в (6.2) может оказаться соизмеримой с $1/F$, что при флуктуациях среды распространения порождает так называемые избирательные (селективные) по частоте замирания сигналов. Для подавляющего числа каналов проводной и некоторых каналов радиосвязи в (6.2) можно ограничиться одним слагаемым (однолучевая модель канала). Для большинства же каналов декаметрового и метрового диапазонов чаще всего можно принять значения N=2…4. Тем не менее, существует немало каналов радиосвязи, в которых приходится учитывать десятки и даже сотни весомых компонент лучей. Более того, для некоторых каналов с памятью, в том числе проводной связи, приходится считаться с непрерывной многолучевостью ($N \to \infty$), и в этом случае отображение вход – выход в канале удобнее характеризовать введенными выше непрерывными системными характеристиками. Для стохастических каналов радиосвязи число существенных компонент N в (6.2) является случайным.

В некоторых каналах как проводной, так и радиосвязи с медленными изменениями параметров квадратурные компоненты можно считать детерминированными в области анализа поля $[0, T_a]\times\Omega$ (где Ω – пространственная область анализа), имея в виду, что их оценивание производится при больших энергетических отношениях сигнал/шум или на больших интервалах усреднения.

Чаще всего, однако (прежде всего в каналах радиосвязи), канал приходится считать стохастическим с той или иной вероятностной моделью для полей $\tilde{h}_{x\nu i}(t,\mathbf{r})$, $\tilde{h}_{y\nu i}(t,\mathbf{r})$ (т. е. для системной характеристики канала). Учитывая, что эти компоненты во многих каналах образуются суммированием большого числа слагаемых (подлучей) в условиях, когда выполняются требования центральной предельной теоремы теории вероятностей [6], их, при заданном ν, можно считать независимыми, в общем случае неоднородными гауссовскими полями с математическими ожиданиями и КФ для каждой i-й скалярной компоненты поля $m_{x\nu i}(t,\mathbf{r})$, $m_{y\nu i}(t,\mathbf{r})$, $K_{x\nu i}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, $K_{y\nu i}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Независимость (некоррелированность) обеспечивается соответствующим поворотом системы координат. Это так называемая **общая гауссовская модель канала** [9, 16, 43].

Исходя из физических соображений и экспериментальных данных, чаще всего можно считать, что коэффициенты корреляции у квадратурных компонент одинаковы: $R_{x\nu i}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=R_{y\nu i}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=R_{\nu i}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, причем для однородных полей они удовлетворительно аппроксимируются экспоненциальной функцией по переменным $t_2 - t_1$ и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Таким образом, общая гауссовская модель по каждой из скалярных компонент ν-го луча описывается параметрами $m_{x\nu i}(t,\mathbf{r})$, $m_{y\nu i}(t,\mathbf{r})$, $\sigma^2_{x\nu i}(t,\mathbf{r})$, $\sigma^2_{y\nu i}(t,\mathbf{r})$ (дисперсии квадратурных компонент) и $R_{\nu i}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ (коэффициент корреляции по времени и пространству). Взаимная корреляция скалярных компонент сигнала (с различными индексами i) и сигналов разных лучей (с различными ν) должна оговариваться особо. Для многих реальных каналов связи ее можно не учитывать. Далее индексы i и ν, указывающие на принадлежность компонент передаточной функции определенной скалярной компоненте выходного сигнала и определенному лучу, для упрощения записи опущены и обозначено: $\tilde{h}_{x\nu i}(t,\mathbf{r})=x$, $\tilde{h}_{y\nu i}(t,\mathbf{r})=y$.

В рамках описания одномерными распределениями вероятностей рассмотренная модель характеризуется совместно гауссовской четырехпараметрической ПРВ

$$w_2(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x(t,\mathbf{r})\sigma_y(t,\mathbf{r})}\exp\left\{-\frac{\left[x-m_x(t,\mathbf{r})\right]^2}{2\sigma_x^2(t,\mathbf{r})}-\frac{\left[y-m_y(t,\mathbf{r})\right]^2}{2\sigma_y^2(t,\mathbf{r})}\right\}. \qquad (6.3)$$

Четырехпараметрическое распределение модуля каждого из элементов передаточной матрицы (и амплитуд сигналов) $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$ фаз $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ определяется при этом более сложными формулами:

$$w_1(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} \sigma^{2R} \frac{\partial^{2R}}{\partial m_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}} \partial m_{\mathrm{II}}^{\mathrm{R}}} \left[\frac{\gamma}{\sigma^2} \left(-\frac{\gamma^2 + m_{\mathrm{I}}^2 + m_{\mathrm{II}}^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{\gamma}{\sigma^2} \sqrt{m_{\mathrm{I}}^2 + m_{\mathrm{II}}^2} \right) \right],$$

$$w_1(\varphi) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi \left(\sigma_x^2 \cos^2 \varphi + \sigma_y^2 \sin^2 \varphi \right)} \exp\left(-\frac{m_x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{m_y^2}{2\sigma_y^2} \right) \times$$

$$\times \left\{ 1 + K\sqrt{\pi} \exp K^2 \left[1 + \Phi\left(\sqrt{2} K \right) \right] \right\}, \qquad (6.4)$$

где $m_{\mathrm{I}} = \dfrac{m_x + m_y}{\sqrt{2}}$; $m_{\mathrm{II}} = \dfrac{m_x - m_y}{\sqrt{2}}$; $\sigma^2 = \dfrac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sqrt{2}}$;

$$R = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}; \quad K = \frac{m_x \sigma_y^2 \cos\varphi + m_y \sigma_x^2 \sin\varphi}{\sigma_x \sigma_y \sqrt{\sigma_x^2 \sin^2 \varphi + \sigma_y^2 \cos^2 \varphi}}. \qquad (6.5)$$

Экспериментальные данные по замираниям в радиоканалах различных диапазонов подтверждают возможность удовлетворительной аппроксимации распределений амплитуд и фаз как общим четырехпараметрическим законом, так и его частными случаями. Основные из них следующие:

1) трехпараметрические замирания ($m_x = 0$);

2) райсовские (обобщенно-рэлеевские) замирания ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, $m_x^2 + m_y^2 \neq 0$);

3) подрэлеевские замирания ($m_x = m_y = 0$); наиболее глубокие замирания в рамках этой и более общих моделей соответствуют случаю одностороннего нормального распределения ($m_x = m_y = 0$, $\sigma_x^2 = 0$);

4) рэлеевские замирания ($m_x = m_y = 0$, $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$);

5) канал без замираний ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 0$).

Следует подчеркнуть, что в рамках четырехпараметрической (общей гауссовской) модели замирания амплитуд и фаз сигнала оказываются коррелированными, что подтверждается экспериментальными данными для различных радиотрасс [16]. Исключением является чисто рэлеевский канал, для которого $w_2(\gamma, \varphi) = \left(\gamma / 2\pi\sigma^2 \right) \exp\left(-\gamma^2 / 2\sigma^2 \right)$. Что же касается параметров $m_x, m_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ указанной модели, то в большинстве реальных каналов связи их можно считать не зависящими от t и $\mathbf{r}$.

Скорость замираний квадратурных компонент $x(t, \mathbf{r})$ и $y(t, \mathbf{r})$ по времени и пространственным координатам в общей гауссовской модели определяется характером коэффициентов корреляции $R(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Большую часть каналов связи, удовлетворительно описываемых этой моделью, можно отнести

к категории каналов с медленными (неселективными) замираниями во времени и неселективными замираниями в пространстве, когда коэффициент корреляции $R(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ в области анализа $[0, T_a]\times\Omega$ близок к единице. Противоположная ситуация, когда компоненты сигнала $x(t,\mathbf{r})$ и $y(t,\mathbf{r})$ дельта-коррелированы во времени и пространстве, для систем связи не характерна. Это означает, что модель (6.2) в области анализа характеризуется $2N$ случайными гауссовскими величинами $\mathbf{H}_{x\nu}(t,\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_{y\nu}(t,\mathbf{r})$, ($\nu = 1, 2, \ldots, N$).

В работе [16] для замирающих амплитуд отдельных лучей и сигнала в целом принято и обосновано так называемое **m-распределение (**распределение Накагами)

$$w_1(\gamma) = \frac{2m^m\gamma^{2m-1}}{\Gamma(m)a^{2m}}\exp\left(-\frac{m}{a^2}\gamma^2\right),\ \gamma \geq 0, \qquad (6.6)$$

где a и $m \geq 1/2$ – параметры распределения; $\Gamma(m)$ – гамма-функция. Параметр $a = \sqrt{\overline{\gamma^2}}$ выражает среднеквадратическое значение амплитуды γ, а $m = a^4 \Big/ \left(\overline{\gamma^2 - a^2}\right)^2$ – отношение квадрата средней мощности замирающего сигнала к дисперсии его мгновенной мощности, т. е. характеризует глубину замираний. Такой вид $w_1(\gamma)$ был получен теоретически для распределения неотрицательной функции многих случайных аргументов и экспериментально подтвержден при испытаниях на различных радиотрассах [16, 36]. Распределение Накагами удовлетворительно аппроксимирует некоторые области четырехпараметрического распределения, но, разумеется, не может передать все тонкости последнего. Эти распределения тождественны лишь в трех частных случаях:

1) односторонне нормальные замирания амплитуд ($m_x = m_y = 0$, $\sigma_x^2 = 0$, $m = 1/2$);

2) рэлеевские замирания($m_x = m_y = 0$, $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, $m = 1$);

3) канал без замираний ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 0$, $m \to \infty$).

В многолучевой модели (6.2) фазы $\varphi_{\nu i}$ даже в тех случаях, когда учитываются не только свойства канала, но и случайные флуктуации фаз опорных генераторов в тракте передачи, с хорошим приближением к практике нередко можно считать независимыми от амплитуд и равномерно распределенными:

$$w(\varphi) = 1/2\pi,\ -\pi \leq \varphi < \pi. \qquad (6.7)$$

Распределение квадратурных компонент $x = \gamma\cos\varphi$, $y = \gamma\sin\varphi$ (а, следовательно, и сигнала $s_i(t,\mathbf{r})$ в целом) определяется при этом распределением амплитуд, аппроксимируя которое четырехпараметрическим законом или распределением Накагами, получают широкий набор

негауссовских моделей (гауссовская модель получается только при рэлеевском распределении амплитуд) для поля $s(t,\mathbf{r})$.

Так, если γ имеет плотность вероятности (6.6), а фаза распределена равномерно, то совместная ПРВ

$$w_2(x,\,y)=\frac{w_1^{(m)}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{m^m\left(x^2+y^2\right)^{m-1}}{\pi\Gamma(m)\left(\overline{\gamma^2}\right)^m}\exp\left(-\frac{m}{\gamma^2}\left(x^2+y^2\right)\right), \quad (6.8)$$

а каждая из квадратурных компонент имеет распределение

$$w(z)=\frac{m^{(m/2-1/4)}\exp\left(mz^2/2\overline{\gamma^2}\right)z^{m-1,5}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)\left(\overline{\gamma^2}\right)^{m/2-1/4}}W_{\frac{m-0,5}{2};\,\frac{m-0,5}{2}}\left(\frac{mz^2}{\overline{\gamma^2}}\right), \quad (6.9)$$

где $W_{\lambda,\,p}$ – функция Уиттекера [16].

В каналах радиосвязи наблюдаются медленные замирания, имеющие неинтерференционную природу, и, следовательно, их статистика не может быть объяснена центральной предельной теоремой теории вероятностей (таковы, например, абсорбционные замирания радиосигнала). Многочисленные эксперименты подтверждают, что при медленных мультипликативных флуктуациях возможны более глубокие замирания амплитуд относительно долговременных среднеквадратических (медианных) значений, чем те, которые следуют из четырехпараметрической модели при интерференционных замираниях [16]. Другими словами, наблюдаются замирания более глубокие, чем при одностороннем нормальном распределении амплитуд.

По многочисленным экспериментальным данным распределение амплитуд при медленных (часовых и более продолжительных) замираниях удовлетворительно описывается **логарифмически-нормальным распределением**

$$w_1(\gamma)=\frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi\sigma_M^2}}\exp\left[-\frac{\left(\ln\gamma-m_M\right)^2}{2\sigma_M^2}\right],\ \gamma>0, \quad (6.10)$$

где m_M, σ_M – соответственно математическое ожидание и дисперсия величины $\ln\gamma$ (параметры распределения).

Для моделирования каналов связи помимо закона распределения замираний важно знать возможные значения их интервала корреляции $\tau_{кор}$. Замирания в радиоканалах декаметрового диапазона, описываемые четырехпараметрическим или m-распределениями (при $m=0.5$ – самые глубокие), имеют $\tau_{кор}$ в пределах 1…10 с. В каналах с тропосферным рассеянием наблюдаются примерно такие же замирания с $\tau_{кор}$ около нескольких секунд, но возможно и $\tau_{кор}$=0.1 с. Для медленных (абсорбционных) замираний, описываемых логнормальным распределением (6.10) характерны значения $\tau_{кор}$=10 мин.

Разновидности **аддитивных помех**, чаще всего встречающиеся в реальных каналах связи, обычно подразделяют на три группы:

1) помехи, распределенные по частоте, времени и пространству (гладкие шумы), обусловленные внутренними шумами аппаратуры и множеством помех внешнего происхождения;

2) помехи, сосредоточенные на отдельных участках спектра временных или пространственных частот и в радиоканалах, обусловленные чаще всего работой посторонних передатчиков;

3) помехи, сосредоточенные во времени или пространстве (импульсные помехи).

Для помех первой группы, которые чаще всего называют **флуктуационными,** обычно приемлема модель в виде «белого» или «окрашенного» (т. е. с неравномерным спектром) гауссовского шума. Лишь в редких случаях возникает необходимость рассматривать более общие законы распределения, например [16]

$$w(x)=\frac{\nu}{2\sqrt{2}\,\Gamma(1/\nu)\,\sigma}\exp\left(-\frac{|x|^{\nu}}{2^{\nu/2}\sigma^{\nu}}\right), \tag{6.11}$$

где ν – параметр, выбираемый в пределах 0,5…2. При ν=2 это распределение переходит в гауссовское.

Для **сосредоточенных по спектру** помех в большинстве каналов из-за их физической природы характерны замирания, которые могут описываться четырехпараметрическим и другими рассмотренными выше распределениями. Если амплитуда замирающей помехи распределена по закону Накагами, а фаза – равномерно, то ПРВ мгновенных значений помехи подчиняется **бимодальному закону**, который часто аппроксимируют выражением

$$w(x)=C\exp\left(px^2-qx^4\right) \tag{6.12}$$

с параметрами p и q, связанными с параметром m-распределения Накагами соотношениями

$$\delta=\frac{p}{\sqrt{2q}}\approx 3\ln\frac{5m}{3(m+1)},\quad \frac{1}{\sqrt{2q}}=\frac{4a^2(m+1)^2}{5m^2},\quad \frac{1}{2}\le m\le 3.$$

Для узкополосных негауссовских помех на выходе высокочастотного тракта приемника иногда используется **модель Холла** [16]:

$$w(x)=\frac{\Gamma(\theta/2)\gamma^{\theta-1}}{\Gamma\left[(\theta-1)/2\right]\sqrt{\pi}\left(x^2+\gamma^2\right)^{\theta/2}}, \tag{6.13}$$

где $\theta\in[2, 5]$.

Сосредоточенные во времени помехи представляют собой быстро затухающие колебания или импульсы той или иной формы, длительность существования которых меньше интервала анализа, а моменты появления и амплитуды обычно случайны. Появление такой помехи в любой момент заданного интервала времени, как правило, равновероятно, а число появляющихся в нем помех подчиняется закону Пуассона. Распределения

амплитуд могут быть весьма разнообразными. Для описания импульсных помех часто используют распределение вида (6.11), логнормальное распределение (6.10), **гиперболический закон**

$$w(x) = C(\beta + x)^{-\alpha}, \quad x \geq 0, \tag{6.14}$$

где $\beta < 0$, $1 \leq \alpha \leq 5$, и **гамма-распределение**

$$w(x) = \frac{x^{\alpha} ex\rho(-x/\beta)}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}, \quad x \geq 0, \tag{6.15}$$

где $\beta > 0$, $\alpha > -1$, а также взвешенные суммы четырехпараметрических, экспоненциальных и других распределений. Для помех в форме радиоимпульсов начальная фаза обычно принимается равномерно распределенной.

7. ПРОГРАММНАЯ СРЕДА MATLAB И ПАКЕТ ВИЗУАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ SIMULINK

Как известно, сложные электрические цепи постоянного тока легко описываются системами линейных уравнений, составленными на основе законов Кирхгофа, - например, методами узловых потенциалов и контурных токов. Для цепей переменного тока необходимо составлять такие уравнения с комплексными элементами. А для моделирования динамических систем и устройств необходимо составлять и решать системы ДУ, чаще всего нелинейных. Матричная система MATLAB – идеальное средство для реализации такого моделирования [14, 34].

Среда MATLAB, являясь мощной матричной системой, открывает обширные возможности в выполнении численного моделирования как линейных, так и нелинейных систем и устройств, описываемых большими системами уравнений. Такое моделирование предполагает решение системы уравнений состояния достаточно апробированными и хорошо известными численными методами – в том числе на основе рекуррентных и итерационных алгоритмов. Уравнения состояния реальных систем и устройств часто содержат множество нулевых коэффициентов, что порождает разреженные матрицы и массивы. Их аппарат прекрасно представлен в базовой системе MATLAB.

В настоящее время известно множество программных средств моделирования частного характера. Например, для моделирования электронных схем применяются программы схемотехнического моделирования MicroCAP, MicroLOGIC, Pspice, Design Center, Electronics WorkBench и др. Они обычно содержат обширные библиотеки полупроводниковых и схемных компонентов и представляют результаты в привычном для пользователя виде – например в виде осциллограмм их виртуальных осциллографов или показаний виртуальных вольтметров или амперметров. Однако применение таких систем носит частный и потому довольно ограниченный характер, хотя в своей области многие такие программы являются подлинным шедевром изобретательности их создателей.

Разработчики системы MATLAB+Simulink отказались от конкуренции с разработчиками подобных программ узкого назначения. Они сосредоточили свое внимание на решении куда более важной и сложной задачи – моделирования блочных динамических систем и устройств произвольного назначения. Для этого пришлось с одной стороны существенно расширить библиотеки компонентов таких систем и устройств, а с другой стороны, применить укрупненные модели ряда компонентов, благодаря чему стало возможным моделирование сложных систем и устройств.

В настоящей главе под **моделью** будем подразумевать блочную (функциональную) диаграмму системы или устройства, содержащую ее компоненты в виде отдельных блоков и подсистем с соответствующим описанием их свойств. Это описание, как правило, носит внутренний характер и количественно может корректироваться изменением параметров в списке

параметров каждого компонента. С помощью подсистем исследователь может составлять свои собственные сложные компоненты. Набор виртуальных регистрирующих устройств позволяет контролировать поведение созданной модели.

7.1. Интерфейс среды MATLAB

Среда MATLAB является интерактивной системой для выполнения инженерных и научных расчетов, ориентированной на работу с массивами данных. Система использует математический сопроцессор и допускает возможность обращения к программам, написанным на языках Fortran, C и C++.

Среда MATLAB имеет собственный язык программирования, напоминающий BASIC, а также располагает большими возможностями для работы с сигналами, для расчета и проектирования систем связи, цифровых и аналоговых фильтров, различных вычислительных систем. Имеются в наличии и средства для спектрального анализа и синтеза, быстрого преобразования Фурье (БПФ), обработки изображений, Wavelet-анализа [34]. Кроме этого, пользователь может ввести в систему любую новую встроенную команду, оператор или функцию.

При помощи командного окна (рис. 7.1) можно осуществлять все вычисления в режиме калькулятора. При этом можно осуществлять присвоения различным переменным значений и далее пользоваться ими в командном окне. Рабочее пространство среды является удобным средством для просмотра числовых массивов в процессе формирования и отладки вычислительных процедур (программ).

Программирование в среде MATLAB осуществляется путем создания М-файлов с расширением .m (рис. 7.2). Недостатком является отсутствие оператора безусловного перехода GO TO, однако это можно полностью возместить путем структурного программирования с обращением к различным функциям и процедурам. Кроме этого, с помощью встроенных инструментальных средств имеется возможность формировать графический пользовательский интерфейс, значительно облегчающий работу с программами, созданными в среде MATLAB, а также их отладку.

Пакет визуального моделирования Simulink (рис. 7.1) является пакетом расширения среды MATLAB и позволяет осуществлять моделирование поведения динамических линейных и нелинейных систем. Пользователь осуществляет графическую сборку любой системы из отдельных блоков, хранящихся в библиотеках Simulink (рис. 7.3). В результате такой сборки образуется модель исследуемой системы (S-модель), которая хранится в файле с расширением .mdl.

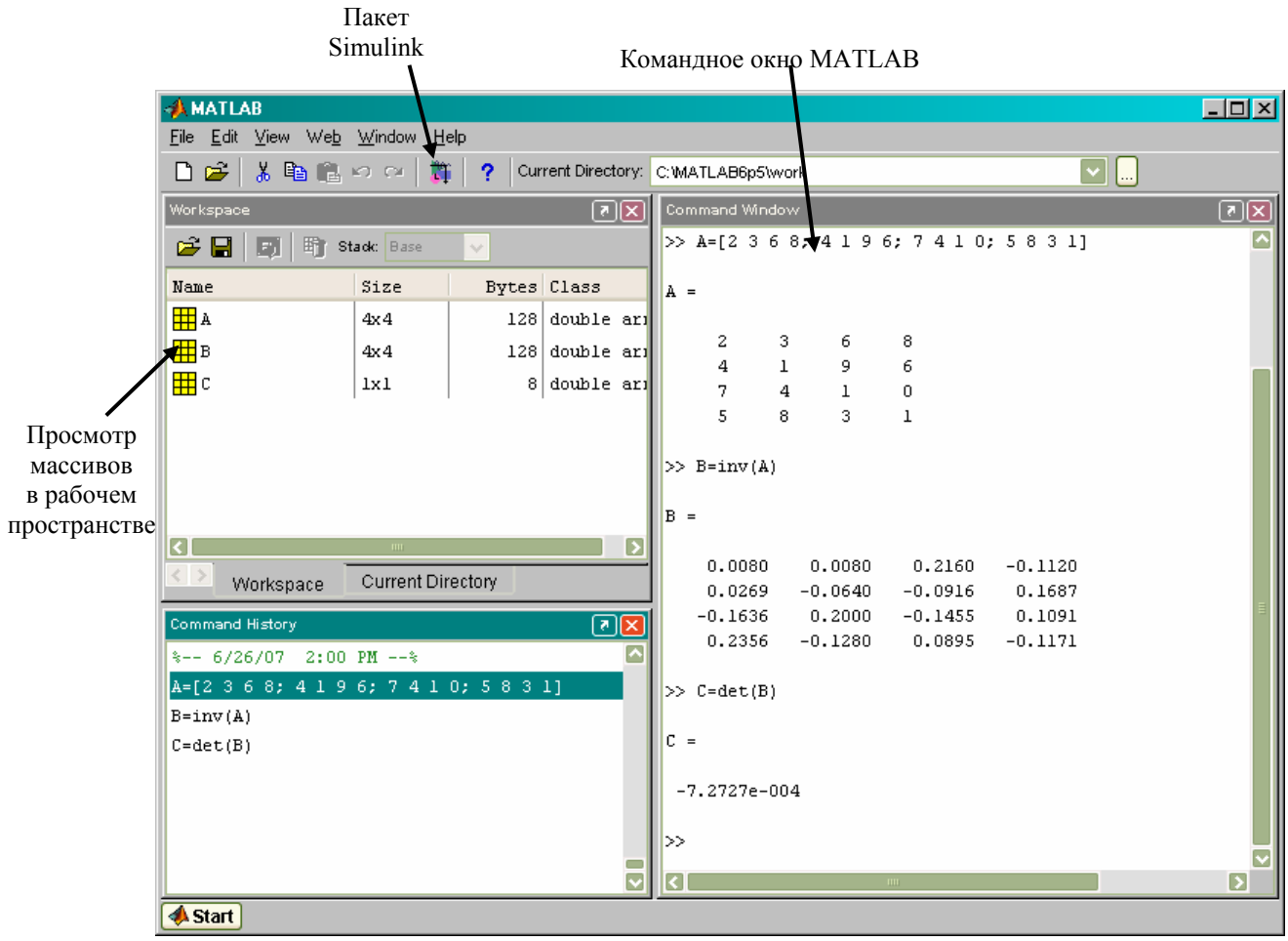


Рис. 7.1. Интерфейс среды MATLAB 6.5

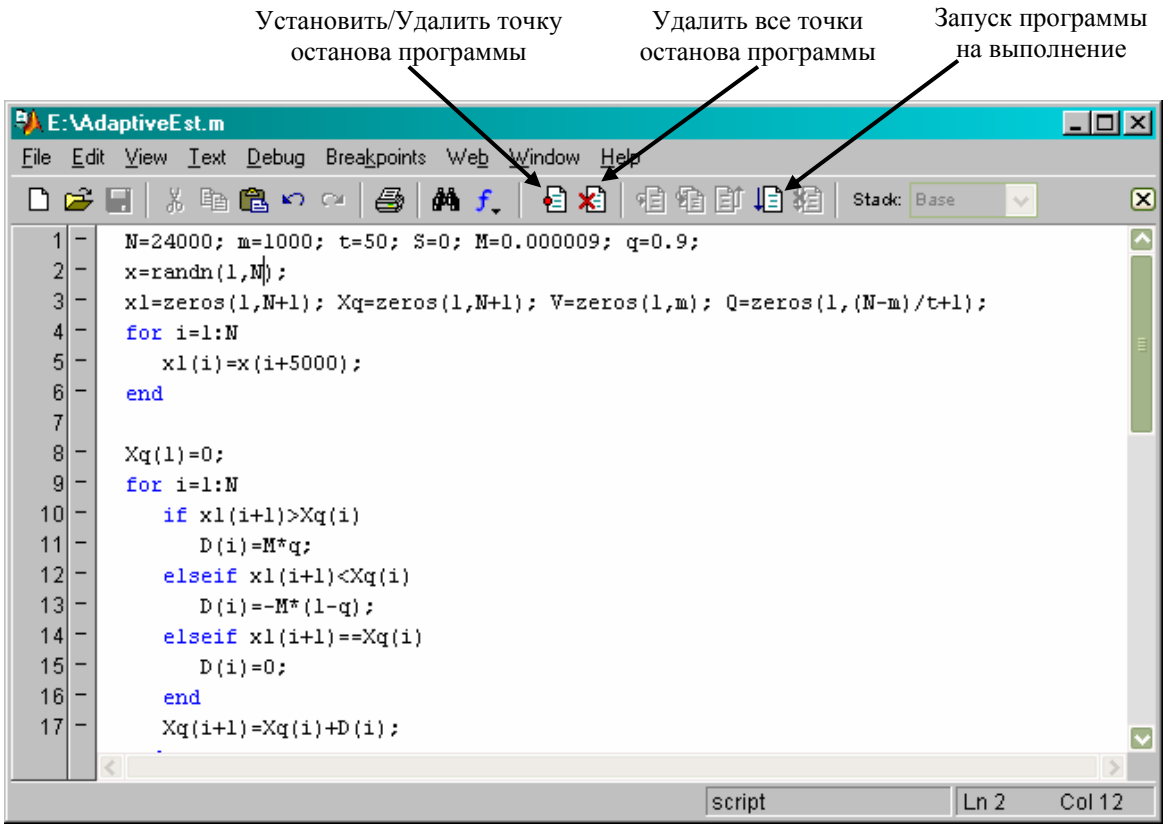


Рис. 7.2. Окно M-файла

7.2. Пакет визуального моделирования Simulink

Одной из самых сложных проблем в реализации математического моделирования в среде MATLAB является подготовка модели моделируемой системы или устройства. Модель обычно представляется в форме графического, табличного или таблично-топологического описания. При этом необходимо предусмотреть организацию связей между компонентами и установку их параметров. После этого нужно запустить модель на исполнение, т. е. задать решение автоматически составленной системы уравнений состояния и вывод результатов решения, что зачастую представляет собой достаточно сложную задачу.

Все вышеупомянутые проблемы эффективно решаются при помощи расширения Simulink – важной составной части системы MATLAB. Это расширение реализует визуально-ориентированное программирование задач автоматического составления графической модели системы или устройства, составления и решения уравнений состояния и наглядного представления результатов моделирования. Пакет Simulink позволяет выполнять симуляцию работы моделируемых систем и устройств, т. е. осуществлять имитационное моделирование [10].

Новые версии Simulink интенсивно развиваются в направлении развития техники моделирования систем и устройств, структура которых может изменяться под воздействием ситуаций, которые характерны для работы устройств в те или иные моменты времени. Другими словами, развивается направление ситуационного моделирования. Специальное расширение StateFlow BlockSet обеспечивает расширенные возможности ситуационного моделирования – в частности позволяет в динамике отслеживать связи между блоками моделей и строить наглядные SF-диаграммы [10, 14].

Пакет Simulink является ядром интерактивного программного комплекса, предназначенного для математического моделирования линейных и нелинейных динамических систем и устройств, представленных своей функциональной блок-схемой, именуемой S-моделью или просто моделью. При этом возможны различные варианты моделирования: во временной области, в частотной области, с событийным управлением, на основе спектральных преобразований, с использованием метода Монте-Карло (реакция на воздействия случайного характера) и т. п.

Для построения функциональной блок-схемы моделируемых устройств Simulink имеет обширную библиотеку блочных компонентов (рис. 7.1) и удобный редактор блок-схем. Он основан на графическом интерфейсе пользователя и по существу является типичным средством визуально-ориентированного программирования. Используя палитры компонентов (наборы), пользователь с помощью мыши переносит нужные блоки с палитр на рабочий стол пакета Simulink и соединяет линиями входы и выходы блоков. Таким образом, создается блок-схема системы или устройства, то есть модель.

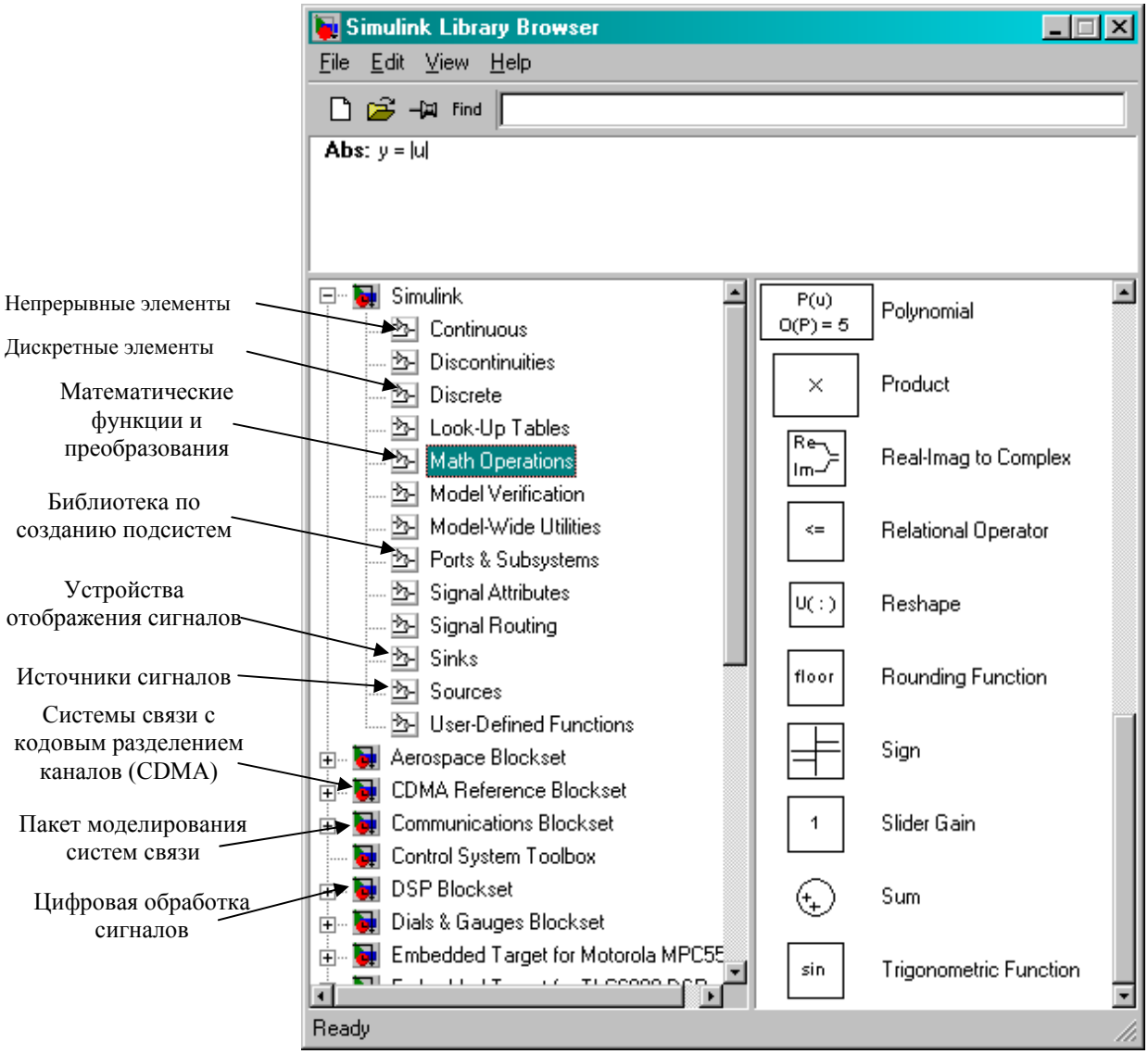


Рис. 7.3. Основные библиотеки пакета SimuLink

Simulink автоматизирует следующий, наиболее трудоёмкий этап моделирования: он составляет и решает сложные системы алгебраических и дифференциальных уравнений, описывающих заданную функциональную схему (модель), обеспечивая удобный и наглядный визуальный контроль за поведением созданного пользователем виртуального устройства – достаточно уточнить (если нужно) вид анализа и запустить Simulink в режиме симуляции созданной модели системы или устройства.

Ценность пакета Simulink заключается и в обширной, открытой для изучения и модификации библиотеке компонентов (блоков). Она включает источники сигналов с практически любыми временными зависимостями, масштабирующие, линейные и нелинейные преобразователи с разнообразными формами передаточных характеристик, квантующее устройство, интегрирующие и дифференцирующие блоки и т. д. Кроме этого пакет Simulink включает в себя отдельные специализированные библиотеки, наиболее полезными из которых являются пакет для моделирования систем передачи

дискретных сообщений (Communications Blockset) и пакет для моделирования систем цифровой обработки сигналов (DSP Blockset).

Программные средства моделирования динамических систем известны давно, к ним относятся, например, программы Tutsim и LabVIEW for Industrial Automation. Однако для эффективного применения таких средств необходимы высокоскоростные решающие устройства. Интеграция системы MATLAB с пакетом Simulink открывает новые возможности использования самых современных математических методов для решения задач динамического и ситуационного моделирования сложных систем и устройств.

Средства графической анимации Simulink позволяют строить виртуальные физические лаборатории с наглядным представлением результатов моделирования. Возможности Simulink охватывают задачи математического моделирования сложных динамических систем в физике, электро- и радиотехнике, биологии и других областях науки и техники. Этим объясняется популярность данного пакета как в вузах, так и в научных лабораториях.

Важным достоинством пакета Simulink является возможность задания в блоках произвольных математических выражений, что позволяет решать типовые задачи, пользуясь примерами пакета Simulink или же просто задавая новые выражения, описывающие работу моделируемых пользователем систем и устройств. Важным свойством пакета является возможность задания системных функций (S-функций) с включением их в состав библиотек Simulink. Необходимо также отметить возможность моделирования устройств и систем в реальном масштабе времени.

Как программное средство Simulink – типичный представитель визуально-ориентированных языков программирования. На всех этапах работы, особенно при подготовке моделей систем, пользователь практически не имеет дела с обычным программированием. Программа в кодах автоматически генерируется в процессе ввода выбранных блоков компонентов, их соединений и задания параметров компонентов.

Важное преимущество Simulink – это интеграция не только с системой MATLAB, но и с рядом других пакетов расширения, что обеспечивает, по существу, неограниченные возможности применения Simulink для решения практически любых задач имитационного и событийного моделирования.

7.3. Создание и маскирование подсистем

При моделировании сложных систем с помощью пакета Simulink целесообразным является формирование отдельных блоков в виде подсистем, для которых можно задавать собственные параметры. Подсистема формируется из группы отдельных блоков следующим образом: выделяется группа блоков, в меню Edit выбирается опция Create Subsystem и после этого группа блоков преобразуется в один блок с соответствующим числом входов и выходов, показанный на рис. 7.4.

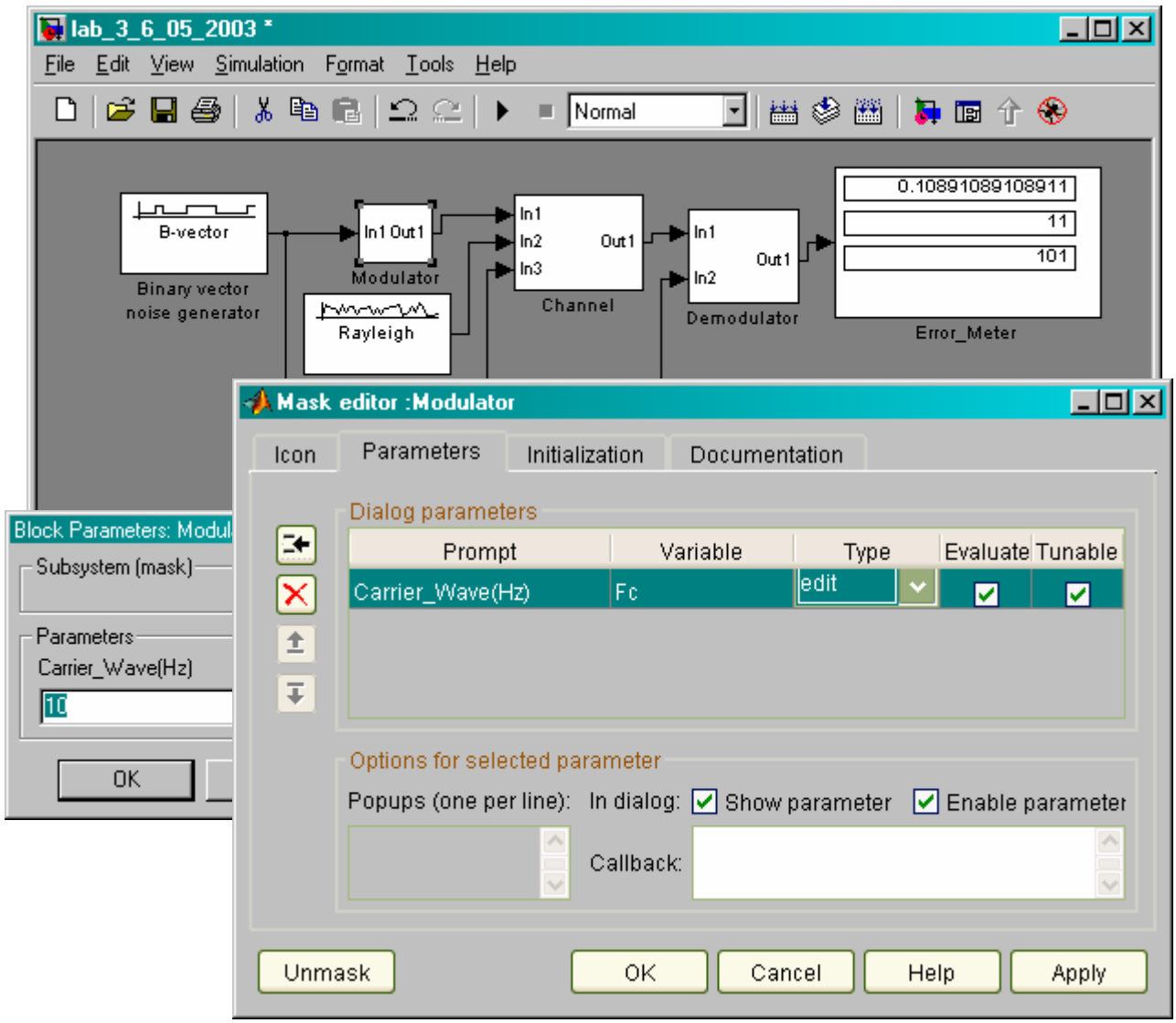


Рис. 7.4. Редактор маскирования подсистемы

На рис. 7.4 также показан пример маскирования подсистемы: маскируемая подсистема выделяется нажатием левой клавиши мыши, в меню Edit выбирается опция Mask Subsystem и после этого появляется окно, показанное на рис. 7.4 справа внизу, где можно задавать параметры маскируемой подсистемы. Далее выбирается панель Initialization, где в окне Prompt вводится наименование параметра подсистемы, которое будет в дальнейшем отображаться в виде, показанном на рис. 7.4 слева внизу (Carrier_Wave(Hz)) (можно задавать до 12 параметров), а в окне Variable задается, описывающая этот же параметр, переменная, которая в дальнейшем вводится в окна параметров различных блоков. Таким образом, маскирование подсистемы позволяет задавать **глобальные переменные**, относящиеся ко всей подсистеме.

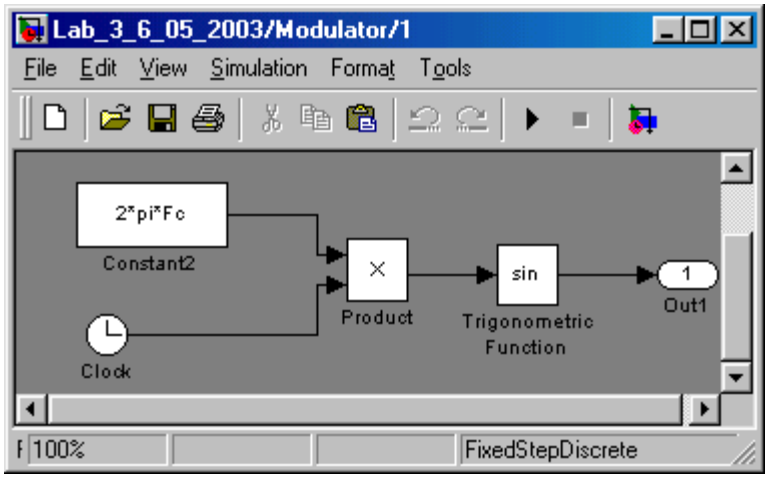


Рис. 7.5. Имитационная модель ФМн модулятора «1»

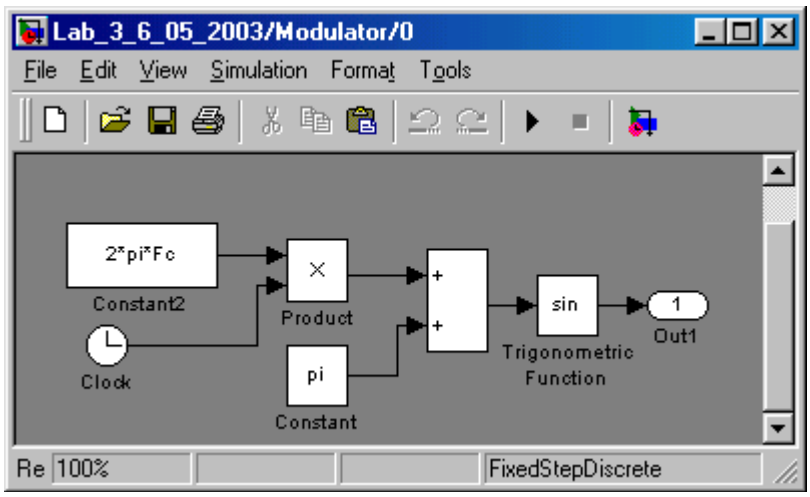


Рис. 7.6. Имитационная модель ФМн модулятора «0»

На рис. 7.4 показана имитационная модель дискретной системы связи. При этом модулятор в этой системе представляет собой формирователь фазоманипулированных сигналов генерируемых блоками с именами «1» и «0», которые также в свою очередь являются подсистемами (рис. 7.5, 7.6). В зависимости от того, какой уровень (1 или 0) поступает на вход модулятора, на его выходе формируется либо синус с нулевой начальной фазой, либо синус с фазой сдвинутой на 180°.

7.4. Общие замечания по моделированию систем

Испытание готовых и отлаженных демонстрационных примеров может создать у малоопытного пользователя иллюзию простоты моделирования. На самом деле в большинстве случаев это возможно только при работе достаточно опытного пользователя, реально проработавшего с тем или иным пакетом расширения не один десяток часов и способного анализировать правоту (или неправоту) своих действий [14].

Малоопытный пользователь, скорее всего, при переходе к моделированию своих систем или устройств, столкнется с множеством неожиданных ошибок. Наиболее характерными из них являются:

– неверное задание параметров моделей;

– нестыковка входных, выходных и управляющих параметров блоков;

– несоответствие блоков по типу;

– ошибочные записи математических выражений;

– неверный выбор метода моделирования и т. д.

Никакая, даже самая обширная фирменная документация не способна отразить все нюансы ошибочного применения системы MATLAB с её пакетами расширения. Поэтому ограничимся лишь некоторыми общими рекомендациями.

Довольно часто причиной ошибок является несоответствие типов блоков и их входных и выходных параметров. В таких случаях надо предусматривать переходные элементы. Наглядный пример – переход от тока к напряжению включением резистора 1 Ом в цепь тока.

Особенно часто нестыковка блоков наблюдается при совместном использовании блоков из разных пакетов расширения, например, из пакетов Power System и Simulink. Размерные величины, используемые в пакете Power System Blockset, зачастую недопустимы для блоков Simulink, использующих безразмерные величины (например, при задании функций).

По-видимому, стоит разумно ограничить применение компонентов из различных пакетов расширения. Как показывает практика, каждый из пакетов расширения имеет довольно широкую сферу применения и позволяет решать множество практически полезных задач. Совместное применение нескольких пакетов расширения системы MATLAB+Simulink требует длительной практики работы в этой системе. Наименьший риск натолкнуться на трудности моделирования имеет место при использовании пакетов расширения группы Blockset, отнесенной к сфере прямого применения с расширением Simulink.

Важным обстоятельством для пользователей MATLAB является тот факт, что система тщательно диагностирует подготовленную модель и допускает её исполнение только после устранения всех обнаруженных ошибок. Сообщения об ошибках появляются в специальных окнах системы. Они достаточно подробны и позволяют наметить меры по устранению ошибок.

Поэтому стоит отметить, что примеры имитационных моделей, приведенные в литературе [10, 14] и в справочной базе данных MATLAB, нуждаются не просто в просмотре, а во внимательном их изучении, а также анализе получаемых выходных результатов моделирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии изложены основы математического моделирования и его применения при описании сигналов и помех в телекоммуникационных системах. Изложение базируется на теории случайных процессов и полей. Наибольшее внимание уделено тем моделям, которые адекватно описывают процессы в системах связи и широко используются при имитации дестабилизирующих воздействий. Рассмотрены общие подходы и конкретные алгоритмы моделирования случайных процессов и полей, адекватно описывающих процессы в реальных системах: случайные потоки в СМО, различные виды помех в системах радиосвязи, замирания в системах мобильной связи. Для удобства моделирующие алгоритмы сведены в таблицы. Представлены характеристики сигналов и систем, обобщенные модели дискретных и непрерывных каналов связи. Приведены методы построения моделей на основе экспериментальных данных и соответствующие методы проверки их адекватности. Кратко описана программная среда MATLAB и пакет визуального моделирования Simulink.

За рамками изложения остались: анализ погрешностей моделирования [41], методы построения многопараметрических моделей по экспериментальным данным [26], различные методы аппроксимации аналитических (эмпирических) выражений [26, 35], методы регрессионного анализа и теории планирования эксперимента [26, 42], а также основные методы установления адекватности моделей при помощи статистических критериев согласия [10, 26].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бакалов, В. П. Цифровое моделирование случайных процессов / В. П. Бакалов. – М. : Сайнс-пресс, 2002. – 88 с. – (Серия «Конспекты лекций по радиотехническим дисциплинам»; вып. 4).

2. Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. В 2 вып. Вып. 1 / Дж. Бокс, Г. Дженкинс; пер. с англ. А. Л. Левшина, под ред. В. Ф. Писаренко. – М. : Мир, 1974. – 406 с.

3. Борисов, Ю. П. Математическое моделирование радиосистем : учебное пособие / Ю. П. Борисов. – М. : Советское радио, 1976. – 296 с.

4. Быков, В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В. В. Быков. – М. : Советское радио, 1971. – 328 с.

5. Васильев, К. К. Методы обработки сигналов: учебное пособие / К. К. Васильев. – Ульяновск : УлГТУ, 2001. – 78 с.

6. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей : учебник для втузов / Е. С. Вентцель. 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 1999. – 576 с.

7. Вероятностные методы в инженерных задачах : справочник / А. Н. Лебедев, М. С. Куприянов, Д. Д. Недосекин, Е. А. Чернявский. – СПб. : Энергоатомиздат, 2000. – 333 с.

8. Виттих, В. А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований / В. А. Виттих, В. В. Сергеев, В. А. Сойфер. – М. : Наука, 1982. – 312 с.

9. Волков, Л. Н. Системы цифровой радиосвязи: базовые методы и характеристики : учебное пособие / Л. Н. Волков, М. С. Немировский, Ю. С. Шинаков. – М. : Эко-Трендз, 2005. – 392 с.

10. ГУЛЬТЯЕВ, А. В. ВИЗУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ MATLAB : УЧЕБНЫЙ КУРС / А. В. ГУЛЬТЯЕВ. – СПБ. : ПИТЕР, 2000. – 432 С.

11. Дерин, Х. Случайные процессы марковского типа с дискретными аргументами / Х. Дерин, П. Келли // ТИИЭР. – 1989. – Т. 77, № 10. – С. 42–71.

12. Джайн, А. К. Успехи в области математических моделей для обработки изображений / А. К. Джайн // ТИИЭР. – 1981. – Т. 69, № 5. – С. 9–39.

13. Ермаков, С. М. Статистическое моделирование : учебное пособие / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. – М. : Наука, 1982. – 296 с.

14. ДЬЯКОНОВ, В. П. MATLAB 6.5 SP1/7.0 + SIMULINK 5/6. ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ / В. П. ДЬЯКОНОВ. - М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2005. - 800 С.

15. Кашьяп, Р. Л. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным / Р. Л. Кашьяп, А. Р. Рао; пер. с англ., под ред. В. С. Пугачёва. – М. : Наука, 1983. – 384 с.

16. Кловский, Д. Д. Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических дифференциальных уравнений / Д. Д, Кловский, В. Я. Конторович, С. М. Широков. – М. : Радио и связь, 1984. – 248 с.

17. КОМАШИНСКИЙ, В. И. СИСТЕМЫ ПОДВИЖНОЙ РАДИОСВЯЗИ С ПАКЕТНОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ ИНФОРМАЦИИ. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ / В. И. КОМАШИНСКИЙ, А. В. МАКСИМОВ. – М.: ГОРЯЧАЯ ЛИНИЯ – ТЕЛЕКОМ, 2007. – 176 С.

18. Коршунов, Ю. М. Математические основы кибернетики / Ю. М. Коршунов. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 494 с.

19. Крамущенко, В. И. Многоканальные системы передачи информации : конспект лекций / В. И. Крамущенко, Л. Я. Новосельцев, В. Н. Смирнов. – Л. : ЛЭТИ, 1983. – 48 с.

20. Крашенинников, В. Р. Основы теории обработки изображений : учебное пособие / В. Р. Крашенинников. – Ульяновск : УлГТУ, 2003. – 152 с.

21. Кузин, Л. Т. Основы кибернетики. В 2 т. Т. 2 : Основы кибернетических моделей : учебное пособие для вузов / Л. Т. Кузин. – М. : Энергия, 1979. – 584 с.

22. Кумунжиев, К. В. Теория систем и системный анализ : учебное пособие / К. В. Кумунжиев. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 240 с.

23. Левин, Б. Р. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления / Б. Р. Левин, В. Шварц. – М. : Радио и связь, 1985. – 312 с.

24. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт; пер. с англ. А. Р. Логунова, под ред. А. Д. Морозова. – М. : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

25. Моделирование информационных систем : учебное пособие / под ред. О. И. Шелухина. – М. : Радиотехника, 2005. – 368 с.

26. Основы научных исследований : учебник для вузов / под ред. В. И. Крутова и В. В. Попова. – М. : Высшая школа, 1989. – 400 с.

27. Пешель, М. Моделирование сигналов и систем / М. Пешель; пер. с нем. под ред. Я. И. Хургина. – М. : Мир, 1981. – 300 с.

28. Полляк, Ю. Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах / Ю. Г. Полляк. – М. : Советское радио, 1971. – 400 с.

29. Полляк, Ю. Г. Статистическое машинное моделирование средств связи / Ю. Г. Полляк, В. А. Филимонов. – М. : Радио и связь, 1988. – 176 с. (Серия СТС – вып.30)

30. Пригарин, С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей / С. М. Пригарин. – Новосибирск : Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005. – 259 с.

31. Прикладная теория случайных процессов и полей / Васильев К. К., Драган Я. П., Казаков В. А. и др.; под ред. Васильева К. К. и Омельченко В. А. – Ульяновск : УлГТУ, 1995. – 256 с.

32. Пугачев, В. С. Стохастические дифференциальные системы: анализ и фильтрация / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын. – М. : Наука, 1990. – 630 с.

33. Самарский, А. А. Теория разностных схем : учебное пособие / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1989. – 614 с.

34. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие для вузов / А. Б. Сергиенко. – СПб. : Питер, 2002. – 608 с.

35. Сизиков, В. С. Устойчивые методы обработки результатов измерений : учебное пособие / В. С. Сизиков. – СПб. : СпецЛит, 1999. – 240 с.

36. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ : УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ / А. Г. ЗЮКО, Д. Д. КЛОВСКИЙ, В. И. КОРЖИК, В. Д. НАЗАРОВ; ПОД РЕД. Д.Д.КЛОВСКОГО. – М. : РАДИО И СВЯЗЬ, 1999. – 432 С.

37. Тихонов, А. Н. Вводные лекции по прикладной математике : учебное пособие / А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. – М. : Наука, 1984. – 190 с.

38. Тихонов, В. И. Статистический синтез и анализ радиотехнических систем и устройств / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. – М. : Радио и связь, 1991. – 608 с.

39. Хан, Г. Статистические модели в инженерных задачах / Г. Хан, С. Шапиро; пер. с англ. Е. Г. Коваленко, под ред. В. В. Налимова. – М. : Мир, 1969. – 396 с.

40. Хорафас, Д. Н. Системы и моделирование / Д. Н. Хорафас; пер. с англ. под ред. И. Н. Коваленко. – М. : Мир, 1967. – 418 с.

41. Шалыгин, А. С. Прикладные методы статистического моделирования / А. С. Шалыгин, Ю. И. Палагин. – Л. : Машиностроение, 1986. – 320 с.

42. Шеннон, Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука / Р. Шеннон; пер. с англ. под ред. Е. К. Масловского. – М. : Мир, 1978. – 418 с.

43. Голяницкий, И. А. Математические модели и методы в радиосвязи / И. А. Голяницкий; под ред. Ю. А. Громакова. – М. : Эко-Трендз, 2005. – 440 с.

44. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. – М. : Советское радио, 1977. – 488 с.

45. Попов, О. В. Разработка и исследование алгоритмов моделирования и оценивания многомерных марковских случайных полей : автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук по спец. 05.13.16 / О. В. Попов. – Ульяновск : УлГТУ, 2000. – 20 с.

Сведения об авторах

Васильев Константин Константинович

Заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации, доктор технических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Татарстан, заведующий кафедрой «Телекоммуникации» Ульяновского государственного технического университета.

Окончил Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) в 1972 г. Автор 350 научных работ в области статистического анализа случайных процессов и полей.

Служивый Максим Николаевич
Кандидат технических наук,
доцент кафедры «Телекоммуникации»
Ульяновского государственного
технического университета (УлГТУ).
Окончил УлГТУ в 1999 г.
Автор 22 научных работ в области
статистической теории связи

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ 5
1.1. Современное состояние проблемы моделирования систем 5
1.1.1. Понятия модели и моделирования 5
1.1.2. Основные понятия математического моделирования 6
1.1.3. Аналитическое моделирование 8
1.1.4. Имитационное моделирование 9
1.2. Принципы системного подхода в моделировании 11
1.3. Принципы построения математических моделей 13
1.4. Классификационные признаки и классификация моделей 15
1.5. Основные этапы математического моделирования 20
1.5.1. Понятие о вычислительном эксперименте 21
1.5.2. Оценка адекватности 23
1.5.3. Оценка устойчивости 24
1.5.4. Оценка чувствительности 25
1.6. Заключительные замечания 26

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН 27
2.1. Общая характеристика методов моделирования случайных величин 27
2.2. Моделирование случайных величин с негауссовским распределением ... 27
2.2.1. Метод нелинейного преобразования, обратного функции распределения 27
2.2.2. Метод суперпозиции 31
2.2.3. Моделирование случайных величин с помощью гамма-распределения 32
2.3. Некоторые специальные методы моделирования случайных величин ... 34
2.3.1. Метод Неймана 35
2.3.2. Метод кусочной аппроксимации 36
2.4. Моделирование векторных случайных величин 38
2.5. Заключительные замечания 40

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ 42
3.1. Моделирование марковских случайных процессов 42
3.2. Разностные и дифференциальные стохастические уравнения 44
3.3. Нелинейные модели марковских случайных процессов 46
3.3.1. Моделирование случайных последовательностей с ПРВ семейства распределений Пирсона 48
3.3.2. Моделирование случайных последовательностей с распределением Накагами 50
3.4. Модели случайных процессов в виде временных рядов 52
3.4.1. Авторегрессионные модели случайных последовательностей 52
3.4.2. Модели авторегрессии-скользящего среднего 57
3.5. Методы моделирования случайных процессов 58
3.5.1. Метод формирующего фильтра 60
3.5.2. Метод скользящего суммирования 63

3.5.3. Дискретные модели линейных стационарных систем и стационарных случайных процессов 64
3.5.4. Моделирование стационарных процессов с типовыми корреляционными функциями 71
3.6. Идентификация и анализ адекватности авторегрессионных моделей случайных процессов 75
3.7. Заключительные замечания 76

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ 77
4.1. Моделирование многомерных дискретных случайных полей 78
4.1.1. Алгоритмы формирования дискретных случайных полей 80
4.1.2. Авторегрессионные модели случайных полей 83
4.2. Алгоритмы моделирования непрерывных случайных полей 89
4.3. Заключительные замечания 93

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ И СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ 94
5.1. Модели случайных потоков 94
5.1.1. Виды потоков и способы их задания 94
5.1.2. Простейший поток 96
5.1.3. Потоки с ограниченным последействием 98
5.1.4. Нормальный поток событий 100
5.2. Самоподобные (фрактальные) модели случайных потоков 101
5.2.1. Введение во фракталы 102
5.2.2. Самоподобные (фрактальные) случайные процессы 103
5.2.3. Виды самоподобных случайных последовательностей 105
5.2.4. Моделирование самоподобных случайных процессов 108
5.3. Модели систем массового обслуживания 112
5.3.1. Система массового обслуживания с отказами. Уравнения Эрланга 113
5.3.2. Установившийся режим обслуживания. Формулы Эрланга 116
5.3.3. Система массового обслуживания с ожиданием 118
5.3.4. Система смешанного типа с ограничением по длине очереди 126

6. МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ 130
6.1. Основные понятия и определения 130
6.2. Модели непрерывных каналов 141
6.3. Модели дискретных каналов 143
6.4. Статистика случайных сигналов и помех в реальных каналах связи 145

7. ПРОГРАММНАЯ СРЕДА MATLAB И ПАКЕТ ВИЗУАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ SIMULINK 153
7.1. Интерфейс среды MATLAB 154
7.2. Пакет визуального моделирования Simulink 156
7.3. Создание и маскирование подсистем 158
7.4. Общие замечания по моделированию систем 160
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 162
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 163
Сведения об авторах 169