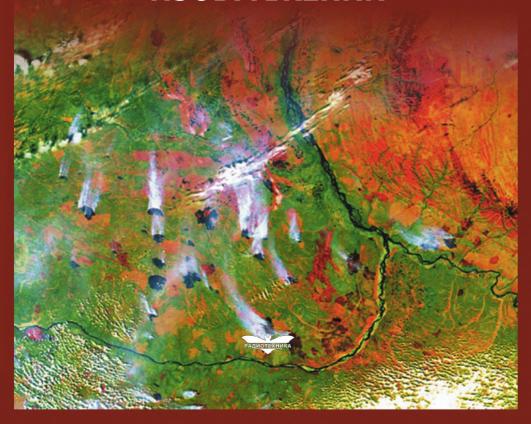
К.К. Васильев, В.Р. Крашенинников

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ



К.К. Васильев, В.Р. Крашенинников

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Москва Радиотехника 2017



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 17-11-00122, не подлежит продаже

Репензенты:

В.А. Сергее6 – д.т.н., проф.; **А.А. Спектор** – д.т.н. проф.

Васильев К.К., Крашенинников В.Р.

В19 Статистический анализ последовательностей изображений. Монография – М.: Радиотехника, 2017. – 248 с.

ISBN 978-5-93108-160-1

Рассматриваются вопросы построения математических моделей и статистического анализа последовательностей изображений, заданных на многомерных сетках. Описываются оптимальные и квазиоптимальные решения основных задач обработки изображений (фильтрация и сглаживание, обнаружение объектов, оценивание деформаций многомерной сетки). Особое внимание уделяется построению и анализу реализуемых в реальном времени алгоритмам параметрической адаптации.

Для специалистов в области извлечения полезной информации из многомерных массивов данных при дистанционном исследовании Земли, в медицине, радиолокации и других приложениях. Может быть полезна студентам стариих курсов и аспирантам.

УДК 621.281 ББК 22.18

[©] К.К. Васильев, В.Р. Крашенинников, 2017

Оглавление

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	6
введение	7
ГЛАВА 1	
ТЛАВА Т МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИЗОБРА	УСПИЙ 11
1.1. Случайные поля	12
1.2. Авторегрессионные модели	1.4
случайных последовательностей.	
1.3. Тензорные модели случайных пол	
1.4. Авторегрессионные модели случа	
1.5. Волновые модели случайных поле	
1.6. Векторные случайные поля	
1.7. Случайные поля на поверхностях	
1.8. Смешанные авторегрессионные м	
случайных полей	84
ГЛАВА 2	
МИНЭЖАРАОБИ ВИЦАРГИИФ	89
2.1. Байесовские оценки случайных по	
2.1.1. Байесовский критерий качества	ı90
2.1.2. Линейные рекуррентные оценк	
Метод инвариантного погруже	
2.1.3. Фильтрация последовательност	ги кадров100
2.2. Обобщение алгоритмов тензорног	о оценивания
последовательностей изображений	
2.2.1. Интерполяция оценок	
2.2.2. Рекуррентное оценивание	
при негауссовских наблюдения	ıx 105
2.3. Оценивание полей квадратурных	
в многочастотных системах связи	
2.4. Рекуррентное оценивание изображ	
2.5. Эффективность оптимальной фил	
изоблажений	123

ГЛАВА	A 3	
ОБНАІ	РУЖЕНИЕ АНОМАЛИЙ	
НА ФС	ОНЕ МЕШАЮЩИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ	.131
	Оптимальные алгоритмы обнаружения сигналов	
	Эффективность обнаружения аномалий	
	Обнаружение аномалий с неизвестными уровнями	
	на многозональных изображениях	.148
3.4.	Сравнительный анализ	
	эффективности обнаружителей	.151
ГЛАВА	A 4	
COBM	ЕЩЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ	.155
	Тензорная фильтрация смещений	
	Совмещение случайных полей	
	при межкадровых геометрических трансформациях	.159
4.3.	Совмещение двух кадров	
	гауссовского случайного поля	.161
4.4.	Совмещение бинарных изображений	
	Совмещение изображений	
	со значительными яркостными искажениями	.165
	4.5.1. Корреляционно-экстремальные алгоритмы	
	4.5.2. Использование морфологического анализа (формы)	. 167
4.6.	Метод неподвижной точки	
	при совмещении изображений	
	4.6.1. Метод неподвижной точки отображения	. 169
	4.6.2. Метод неподвижной точки	
	для двумерных изображений	. 172
	4.6.3. Оценка сдвига двумерных изображений	172
	при малых поворотах и изменениях масштаба4.6.4. Оценка параметров при больших углах поворота	.1/3
	и изменениях масштаба	178
	4.6.5. Нахождение центра симметрии изображения	. 1 / 0
	по проекциям	. 182
ГЛАВА		
	ТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ	
	МОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙТОТОТОТЬ ИЗОБРАЖЕНИЙ	
5.1.	Классификация адаптивных алгоритмов	
	5.1.1. Аргументные и критериальные задачи	. 186
	5.1.2. Идентификационная	107
	и безыдентификационная адаптация	. 18/

Список сокращений

АР – авторегрессия, авторегрессионный

ГТО – групповой точечный объект КФ – корреляционная функция

МКГТ - межкадровая геометрическая трансформация

ММП - метод максимума правдоподобия

НТ - неподвижная точка

ОП – отношение правдоподобия

ПГ – псевдоградиент, псевдоградиентный
 ПРВ – плотность распределения вероятностей

ПСТ - поле случайных точек

СВ - случайная величина, случайные величины

СКО - среднеквадратическое отклонение

СП - случайное поле

ФР – функция распределения (вероятностей)

Введение

В последние годы значительно повысился интерес к проблемам статистической обработки случайных полей, то есть случайных функций нескольких переменных. Это объясняется тем, что описание сигналов и помех с помощью пространственновременных случайных процессов позволяет приблизить математические модели к реальным помеховым ситуациям в самых различных информационных системах, применяемых в медицине, мониторинге Земли, навигации и т.д.

Среди них можно выделить радио- и гидролокационные комплексы с пространственными антенными решетками, аэрокосмические системы глобального мониторинга Земли, системы технического зрения и др.

В последнее время задачи обработки многомерных данных приобретают особую актуальность в связи с широким распространением методов мульти-спектральной (до 10-ти спектральных диапазонов) и гиперспектральной (до 300 диапазонов) регистрации участков земной поверхности. Это вызывает необходимость разработки новых методов качественного и количественного анализа аэрокосмических наблюдений как единой многомерной совокупности. Для ряда приложений особый интерес представляют задачи обнаружения и оценивания параметров аномалий на многозональных изображениях.

Получение достаточного объема информации в натурных экспериментах довольно сложно, дает неточные вероятностные характеристики изображений и требует значительных затрат. Особенно остро проблемы стоят в задачах, требующих не только правильного извлечения информации из регулярно поступающего материала, но и анализа изменений, происходящих как с наблюдаемыми объектами, так и с изображениями подстилающей поверхности, на фоне которой ведутся наблюдения. Многие подобные задачи связаны с дистанционным зондированием природной среды. Традиционно к данным дистанционного зондирования относят методы, позволяющие получать авиационные или космические изображения земной поверхности в каких-либо участках электромагнитного спектра.

Техническая реализация алгоритмов обработки последовательностей многозональных изображений, как правило, связана с необходимостью применения высокопроизводительных вычислительных средств. Это обстоятельство, а также наличие распределенных в пространстве систем дискретных датчиков извлечения информации, вызывает повышенное внимание к соответствующим математическим моделям случайных полей, заданных на многомерных сетках (в дискретном пространстве и времени).

К таким типам моделей относятся авторегрессионные и гиббсовские модели, которые широко используются для синтеза систем обработки плоских изображений, то есть полей, заданных на двумерной сетке. Методы же представления полей на сетках большей размерности, а также динамически изменяющихся пространственных массивов данных проработаны в значительно меньшей мере.

Несмотря на многочисленные публикации, касающиеся проблем статистической обработки сеточных случайных полей, многие практические важные задачи пока не нашли удовлетворительного решения. К ним относятся задачи синтеза и анализа рекуррентных процедур обнаружения, различения и фильтрации марковских случайных полей. Существующие подходы к синтезу рекуррентных алгоритмов приводят либо к процедурам с низкой эффективностью, либо к значительным техническим трудностям реализации оптимальных алгоритмов, основанных, например, на расширении вектора состояния с последующим применением калмановской фильтрации векторной случайной последовательности.

Кроме того, в литературе мало представлено описание методов различения или фильтрации случайных полей, заданных на сетках с размерностью более двух, а именно: к таким полям приводят, например, задачи обработки многозональных изображений, изменяющихся во времени.

В предлагаемой вниманию читателя книге предпринята попытка систематизировать и обобщить известные и новые методы представления и статистической обработки последовательностей изображений, заданных на многомерных сетках.

Рассмотрены вопросы описания и имитации случайных полей на многомерных пространственных сетках, для чего оказа-

лись удобными скалярные, векторные и тензорные авторегрессионные, а также волновые модели. Особый интерес представляют каузальные авторегрессионные модели с кратными корнями характеристических уравнений, порождающие квазиизотропные случайные поля. Кроме того, рассмотрены свойства изображений, заданных на разнообразных непрямоугольных сетках и поверхностях. Разработаны численные процедуры для имитации изображений и их последовательностей, что может быть использовано для апробации различных алгоритмов обработки изображений.

Во второй главе разработанные модели случайных полей использованы в алгоритмах фильтрации изображений на фоне помех. Представлены асимптотические характеристики эффективности фильтрации случайных полей на сетках произвольной размерности, естественное обобщение фильтра Калмана на тензорный случай и новые квазиоптимальные процедуры рекуррентного оценивания изображений, наблюдаемых на фоне аддитивного белого шума.

В третьей главе рассмотрены решающие правила обнаружения точечных и протяженных аномалий на изображениях и их последовательностях. Показано, что существуют четыре эквивалентные формы записи оптимальных процедур обнаружения, существенно отличающиеся вычислительной сложностью при больших пространственных размерах обнаруживаемых сигналов. Получены алгоритмы обнаружения аномалий с известными и неизвестными параметрами и проведено сравнительное исследование их эффективности.

Задачи совмещения и оценивания параметров межкадровых геометрических трансформаций изображений рассмотрены в четвертой главе. Описаны различные подходы к решению этой задачи, среди которых тензорная фильтрация смещений, компенсационные алгоритмы, морфологический анализ и новый метод неподвижной точки. Предложенные алгоритмы работоспособны в широком диапазоне совмещаемых изображений. Метод неподвижной точки имеет большую рабочую зону.

В практических ситуациях, как правило, имеется априорная неопределенность в описании свойств случайных полей, что приводит к необходимости адаптации при обработке многомерных наблюдений.

В пятой главе книги изложены адаптивные варианты процедур, входящих в алгоритмы обнаружения сигналов, фильтрации и совмещения изображений. Особое внимание при этом уделено псевдоградиентной адаптации, на основе которой синтезированы высокоэффективные алгоритмы со сравнительно небольшими вычислительными затратами, что позволяет использовать их в системах реального времени, оперирующих с большими изображениями и их последовательностями.

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для эффективного решения различных задач обработки изображений необходима их математическая постановка, которая прежде всего, включает в себя модель изображений как объекта исследования.

Желательно, чтобы математические модели позволяли решать задачи анализа и синтеза, т.е. можно было по известным параметрам модели определить, какие вероятностные свойства имеет описываемое этой моделью изображение (анализ) и, наоборот, можно было бы так выбрать параметры модели, чтобы она описывала изображение с заданными свойствами (синтез). Также полезно, чтобы эти модели позволяли имитировать последовательности изображений с заданными свойствами. Это требуется для визуальной оценки получаемых изображений и для анализа эффективности алгоритмов обработки с помощью статистического моделирования.

К настоящему времени разработан целый ряд математических моделей отдельных изображений и их последовательностей [2, 5–29, 31, 32, 34, 36–40, 43, 52, 54, 57, 59, 62–64, 66, 69, 72, 76–81, 84–91, 96–101].

1.1. Случайные поля

Наиболее распространенными в настоящее время являются информационные комплексы, включающие в себя пространственные системы датчиков и цифровую вычислительную технику. Поэтому будем рассматривать изображения с дискретными пространственными и временными переменными. Будем считать, что изображения заданы на многомерных прямоугольных сетках с единичным шагом. На рис. 1.1 изображены двумерная и трехмерная сетки. В общем случае изображение может быть задано в узлах *n*-мерной сетки:

$$\Omega = \{\overline{j} = (j_1...j_n)^T : j_k = \overline{1,M}_k, \ k = \overline{1,n}\}.$$

В зависимости от физической природы значения изображения могут быть скалярными (например, яркость монохроматического изображения), векторными (поле скоростей, цветные изображения, поле смещений) и более сложнозначными (например, матричными). Если обозначить $x_{\overline{j}}$ — значение изображения в узле (пикселе) \overline{j} , то изображение есть совокупность этих значений на сетке: $X = \{x_{\overline{j}} : \overline{j} \in \Omega\}$.

Если данные представляют собой временную последовательность изображений, то иногда удобно считать эту последовательность одним изображением, увеличив размерность сетки на единицу. Например, последовательность из плоских изображений (рис. 1.1,a) можно рассматривать как одно трехмерное изображение (рис. $1.1,\delta$).

Если требуется временную переменную выделить особо, то будем ее записывать сверху: $X=\{x_{\bar{j}}^i:\bar{j}\in\Omega,i\in I\}$. Это изображение задано на прямом произведении $\Omega\times I$ сеток Ω и I, где I — множество значений временного индекса. Сечение $x^i=\{x_{\bar{j}}^i:\bar{j}\in\Omega\}$, т.е. совокупность отсчетов изображения при фиксированном значении временного индекса i, называется i-м кадром, каждый из которых задан на сетке Ω . Например, можно считать, что на рис. 1.1, δ изображены сетки для трех двумерных кадров.

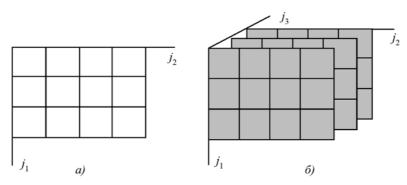


Рисунок 1.1 Сетки, на которых задано изображение: a — двумерная; δ — трехмерная

Изображение можно рассматривать как некоторую функцию, определенную на многомерной сетке. Значения элементов изображения невозможно точно предсказать заранее (иначе система наблюдения была бы не нужна), поэтому одним из возможных подходов является их представление с помощью случайных величин (СВ).

Итак, приходим к основной модели рассматриваемых изображений в виде реализаций системы СВ, заданных на многомерной сетке. Такие системы называются дискретными (по пространству и времени) случайными полями (СП) или случайными функциями нескольких переменных.

Для описания СП, как и любой другой системы СВ, можно задать совместную функцию распределения вероятностей (ΦP) его элементов

$$F(u_{\overline{j}}:\overline{j}\in\Omega)=P(x_{\overline{j}}< u_{\overline{j}}:\overline{j}\in\Omega)$$

или их совместную nлотность pаспределения вероятностей (ΠPB)

$$w(u_{\overline{j}}:\overline{j}\in\Omega)$$
.

Изображение обычно состоит из очень большого количества элементов (тысячи и миллионы), поэтому ФР и ПРВ при таком количестве переменных становятся слишком сложными и требуются другие, менее громоздкие, методы описания СП.

1.2. АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Простейшим случаем является скалярное СП $X = \{x_j : j \in \Omega\}$, заданное на одномерной сетке $\Omega = \{j : j = \overline{1,M}\}$ с единичным шагом. Его можно рассматривать также и как случайный процесс дискретным временем, и как случайную функцию $x(i,\xi)$, и как последовательность СВ $x^i = x^i(\xi)$. Здесь номер отсчета $i=0,1,2,\ldots$ часто может интерпретироваться как дискретное время. Параметр ξ (скалярный или векторный) в соответствии с некоторым вероятностным законом принимает в каждом проводимом опыте конкретное значение ξ_0 , от которого зависит вид функции $x(i,\xi_0)$, называемой *реализацией процесса в данном опыте*.

Пусть, например, $x(i,\xi)=x(i,(A,\omega))=A\sin(\omega i)$, где $\xi=(A,\omega)$ – система двух CB.

Тогда реализациями процесса будут синусоиды со случайной амплитудой и частотой. На практике часто приходится иметь дело с процессами, реализации которых имеют более сложный вид, поэтому и функция $x(i,\xi)$ должна иметь достаточно сложную структуру и, в то же время, допускать эффективное решение задач анализа, синтеза и имитации. Удачными в этом отношении являются авторегрессионные (AP) модели, в которых используются рекурсивные функции.

Рассмотрим простейшую AP модель случайного процесса $X = \{x^0, x^1, x^2, ...\}$. Пусть последовательность CB, составляющих данный процесс, удовлетворяет стохастическому уравнению

$$x^{i} = \varphi(x^{i-1}, \xi^{i}), i = 1, 2, \dots,$$
(1.1)

с начальным условием $x^0 = \varphi^0(\xi^0)$, где φ и φ^0 — некоторые функции; $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, ...)$ — заданная последовательность независимых СВ, называемая порождающей последовательностью.

Характерной особенностью модели (1.1) является ее κay -зальность, т.е. возможность вычисления значения x^i как функции предыдущего значения x^{i-1} и случайного числа ξ^i .

Свойство каузальности позволяет не только эффективно решать задачи имитации, но и дает возможность построения мощных рекуррентных алгоритмов оценивания типа фильтра Калмана.

Существуют и *некаузальные модели*, например гиббсовские СП. В этих моделях определяется стохастическое взаимодействие между соседними элементами [55]. В этой книге будут использоваться, в основном, каузальные модели.

Заметим, что условная ПРВ величин x^{i+1} , x^{i+2} , x^{i+3} ,..., описываемых уравнением (1.1), при известном значении x^i не зависит от x^0 , x^1 ,..., x^{i-1} .

Таким образом, данная последовательность является марковской: ее «будущее» $\Gamma^+ = \{x^k : k > i\}$ в указанном смысле условно независимо от «прошлого» $\Gamma^- = \{x^k : k < i\}$ при известном «настоящем» $\Gamma = \{x^i\}$. Если сменить направление дискретного времени на обратное, то полученная последовательность ..., x^2 , x^1 , x^0 также будет марковской. Поэтому марковское свойство может быть сформулировано в симметричной форме: последовательность является марковской, если ПРВ величин, составляющих Γ^- и Γ^+ , условно независимы при известном Γ .

В качестве порождающей последовательности чаще всего используется последовательность стандартных независимых гауссовских СВ. В случае линейности функции φ процесс X также будет гауссовским, а при нелинейных функциях и негауссовских ξ^i можно получить широкий класс негауссовских процессов. В целях дальнейшего расширения класса представимых случайных процессов с помощью АР моделей можно в (1.1) взять уравнение $x^i = \varphi^i(x^{i-1}, \xi^i)$, что дает возможность получать неоднородные марковские процессы.

Стохастическое уравнение

$$x^{i} = \varphi^{i}(x^{i-m}, x^{i-m+1}, ..., x^{i-2}, x^{i-1}, \xi^{i})$$

при соответствующих начальных условиях определяет марковский процесс m-го порядка, у которого прошлое $\Gamma^- = \{x^k : k \le i - m\}$ и будущее $\Gamma^+ = \{x^k : k > i\}$ условно независи-

мы при известном настоящем $\Gamma = \{x^{i-m+1},...,x^i\}$, состоящем из m последовательных значений процесса.

Задача анализа AP модели состоит в нахождении закона распределения CB x^i . Она не вызывает принципиальных затруднений, так как все x^i являются известными функциями CB ξ^i . Более сложна задача синтеза, заключающаяся в нахождении функций ϕ^i AP модели, порождающей процесс с заданными ПРВ.

Рассмотрим в качестве примера простейшую линейную АР модель

$$x^{0} = \sigma \xi^{0}, x^{i} = \rho x^{i-1} + \sigma \sqrt{1 - \rho^{2}} \xi^{i}, \quad i = 1, 2, \dots,$$
(1.2)

где ξ^i – одинаково распределенные независимые стандартные CB.

Эта модель представляет стационарную марковскую последовательность x^i с нулевым средним, дисперсией σ^2 и ковариационной функцией (КФ)

$$V_x(k) = M[x^i x^{i+k}] = \sigma^2 \rho^{|k|}.$$

Параметр ρ равен коэффициенту корреляции между соседними элементами последовательности, а σ – среднеквадратическому отклонению (СКО).

На рис. 1.2 представлены типичные графики реализаций такого процесса при различных значениях параметра ρ , входящего в модель (1.2). Для наглядности точки графика соединены прямыми отрезками. Во всех случаях параметр σ , влияющий только на масштаб по оси ординат, выбран равным единице. Из этих рисунков видно, что при значениях ρ , близких к единице, процесс становится более гладким; при малых значениях ρ , напротив, значения процесса слабо зависимы между собой; при отрицательных ρ корреляция между соседними значениями процесса отрицательна, поэтому он часто меняет знак.

При гауссовских СВ ξ^i последовательность X, в силу линейности модели, будет гауссовской. В случае негауссовских возмущений X не будет гауссовским, но при $|\rho|$, близких к единице, процесс нормализуется. Это следует из центральной предельной теоремы и представления модели (1.2) в виде взвешенных сумм возмущений:

$$x^{i} = \sigma \left(\sqrt{1 - \rho^{2}} \left(\xi^{i} + \rho \xi^{i-1} + \rho^{2} \xi^{i-2} + \dots + \rho^{i-1} \xi^{1} \right) + \rho^{i} \xi^{0} \right). \tag{1.3}$$

Более сложные АР модели

$$x^{i} = \sum_{i=1}^{m} \rho_{i} x^{i-j} + \beta \xi^{i}, \quad i = m, m+1, \dots$$
 (1.4)

с соответствующими начальными условиями на ПРВ значений первых m членов $x^0, x^1, ..., x^{m-1}$ процесса определяют марковские последовательности m-го порядка.

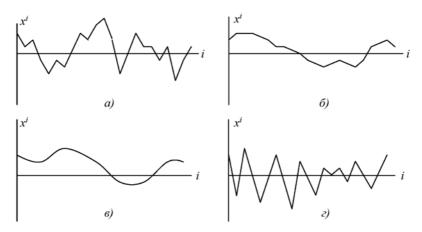


Рисунок 1.2 Реализации авторегрессионной последовательности: $a - \rho = 0.5$; $\delta - \rho = 0.9$; $\epsilon - \rho = 0.99$; $\epsilon - \rho = 0.99$

Найдем КФ $V_x(i,j) = M[x^i x^j]$ последовательности X. Умножая (1.3) на x^0 и находя математическое ожидание правой и левой части, получим рекуррентное соотношение для КФ:

$$V_x(0,i) = \sum_{j=1}^{m} \rho_i V_x(0,i-j), \quad i = m, m+1, ...,$$
(1.5)

которое вместе со значениями $V_x(0,i),\ i < m,$ определяемыми из начальных условий, дает возможность последовательно вычислять значения этой функции. Общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$V_{x}(0,k) = \sum_{u=1}^{n} \sum_{j=0}^{q_{u}-1} b_{u,j} k^{j} z_{u}^{k},$$
(1.6)

где:

 $b_{u,j}$ – константы;

 z_u — корни характеристического уравнения

$$z^{m} - \sum_{j=1}^{m} \rho_{j} z^{s-j} = 0; (1.7)$$

 q_u – кратность корня z_u .

Каждому простому действительному корню $z_u = a_u$ характеристического уравнения (1.7) в (1.6) соответствует компонента α_u^k ; простой паре комплексных корней $z_u = \alpha_u \pm i\beta_u$ — две компоненты $\alpha_u^k \cos(\beta_u k)$ и $\alpha_u^k \sin(\beta_u k)$; если же z_u имеет кратность $q_u > 1$, то добавляются произведения указанных компонент на k, k^2, \dots, k^{q_u-1} . Полагая в (1.6) $k = 0,1,2,\dots, m-1$ и используя начальные условия, получим m линейных уравнений для определения m констант $b_{u,j}$.

Аналогичным образом определяется КФ $V_{\scriptscriptstyle X}(i,i+k)$ при i>0 , также имеющая вид (1.6) с константами, вообще говоря, зависящими от i.

Если все корни уравнения (1.7) по модулю меньше единицы, то $V_x(i,i+k) \to 0$ при $k \to \infty$, следовательно, x^i и x^{i+k} становятся все менее и менее зависимыми, когда время k между ними стремится к бесконечности. Последовательность в этом случае приближается к стационарной: $V_x(i,i+k) \to V_x(k)$ при $i \to \infty$. Для нахождения этих предельных значений КФ умножим (1.4) на x^{i+k} и перейдем к пределу математических ожиданий при $i \to \infty$:

$$V_x(k) = \sum_{j=1}^{s} \rho_j V_x(|k-j|) + \beta^2 \delta(k), \qquad (1.8)$$

где $\delta(k)$ – символ Кронекера.

Полагая в (1.8) k = 0, 1, 2, ..., m, получим m + 1 линейных уравнений, из которых находятся m + 1 начальных значений

 $V_x(0)$, $V_x(1)$, ..., $V_x(m)$, которые можно использовать для нахождения $V_x(k)$ в виде (1.6), где в правой части вместо k нужно взять |k|.

Для того чтобы последовательность x^i была стационарной с самого начала, необходимо и достаточно задать распределения начальных членов x^0 , x^1 , ..., x^{m-1} так, чтобы их КФ удовлетворяла уравнению (1.8).

Подставляя в (1.5) значения k = 1, 2, ..., m, получаем известную систему уравнений Юла–Уокера [4]:

Решение этой системы позволяет найти коэффициенты $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ уравнения (1.4) по заданным или оцененным на основе экспериментальных данных значениям $V_x(1), V_x(2), ..., V_x(m)$ корреляционной функции СП.

Одной из достаточно сложных задач является выбор порядка m AP уравнения (1.4). В некоторых случаях можно задать возможные минимальное и максимальное возможные значения m_{\min} , m_{\max} . Тогда, записывая систему уравнений Юла–Уокера для порядка m_{\max} , можно определить m_{\max} коэффициентов $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_{m_{\max}}$ AP уравнения. После этого для определения действительного значения m порядка уравнения (1.4) необходимо решить, какие найденные коэффициенты $\rho_{m_{\min}}$, ..., $\rho_{m_{\max}}$ отличны от нуля.

При таком подходе порядком авторегрессии следует считать наибольший номер $m_{\min} \le m \le m_{\max}$ отличного от нуля коэффициента ρ_m . Рассмотренной схеме идентификации АР модели обычно предшествует тщательное изучение имеющихся физических предпосылок и экспериментальных данных. Необходимо проанализировать характер реализаций и вид оцененных КФ, позволяющих сделать те или иные заключения о виде АР уравнения [4].

Рассмотрим более подробно АР процесс второго порядка:

$$x^{i} = \rho_{1}x^{i-1} + \rho_{2}x^{i-2} + \xi^{i}, \quad i = 2, 3, ..., n.$$

Значения КФ стационарной случайной последовательности связаны между собой рекуррентным соотношением

$$V_x(k) = \rho_1 V_x(k-1) + \rho_2 V_x(k-2), k > 0$$

с начальными условиями $V_x(0) = \sigma_x^2$ и $V_x(1) = \sigma_x^2 \rho_1 / (1 - \rho_2)$. Из этого следует, что нормированная КФ определяется как сумма двух показательных функций:

$$R_{x}(k) = V_{x}(k) / \sigma_{x}^{2} = b_{1}z_{1}^{|k|} + b_{2}z_{2}^{|k|},$$

где z_1 и z_2 – корни $(z_1 \neq z_2)$ характеристического уравнения $z^2 - \rho_1 z - \rho_2 = 0$; $b_1 = z_1 (1 - z_2^2) / (z_1 - z_2) (1 + z_1 z_2)$; $b_2 = 1 - b_1$.

Дисперсия СП находится по формуле: $\sigma_x^2 = \sigma_\xi^2 / (1 - \rho_1 R_x(1) - \rho_2 R_x(2))$. Система двух уравнений Юла–Уокера $\rho_1 + \rho_2 R_x(1) = R_x(1)$, $\rho_1 R_x(1) + \rho_2 = R_x(2)$ позволяет определить коэффициенты

$$\rho_1 = R_x(1)(1 - R_x(2)) / (1 - R_x^2(1)),$$

$$\rho_2 = (R_x(2) - R_x^2(1)) / (1 - R_x^2(1))$$

AP уравнения по заданным или измеренным значениям $R_x(1)$ и $R_x(2)$.

Вид КФ определяется значениями коэффициентов ρ_1 и ρ_2 . Если $\rho_1^2+4\rho_2\geq 0$, то корни характеристического уравнения действительны и КФ представляет сумму двух затухающих экспонент. При $\rho_1>0, \rho_2>0$ корни имеют разные знаки: $z_1>0$, $z_2<0$. Отрицательному корню соответствует осциллирующее слагаемое $A_2z_2^{|k|}=A_2(-1)^{|k|}\,|z_2|^{|k|}$. При выполнении условия $\rho_1^2+4\rho_2=0$ характеристическое уравнение имеет кратный корень $z_1=z_2=\rho_1/2$. В случае $\rho_1^2+4\rho_2<0$ корни характеристического уравнения комплексные и КФ определяется по формуле

$$R_x(k) = A_0 d^{|k|} \sin(\omega_0 |k| + \phi),$$

где:

$$d = \sqrt{-\rho_2}$$
; $\omega_0 = \arccos(\rho_1 / 2d)$;
 $A_0 = 1/\sin\phi$; $\operatorname{tg}\varphi = ((1+d^2)/(1-d^2))\operatorname{tg}\omega_0$.

При этом графики КФ имеют вид синусоид с экспоненциальным уменьшением амплитуды.

Запишем АР уравнение второго порядка с кратным корнем $z_{1,2} = \rho$ характеристического уравнения следующим образом: $(1 - \rho z^{-1})^2 x^i = \xi^i$, или в явном виде:

$$x^{i} = 2\rho x^{i-1} - \rho^{2} x^{i-2} + \xi^{i}, \qquad (1.9)$$

где $z^{-1}x^i = x^{i-1}$.

Корреляционная функция этой последовательности

$$R_x(k) = (1 + A | k |) \rho^{|k|},$$

где
$$A = (1 - \rho^2)/(1 + \rho^2)$$
.

Заметим, что при заданной дисперсии СП $\sigma_x^2 = M\{(x^i)^2\}$ дисперсия σ_ξ^2 СП ξ^i должна определяться по формуле

$$\sigma_{\xi}^2 = \sigma_x^3 (1 - \rho^2)^3 / (1 + \rho^2).$$

Эту формулу легко получить с помощью возведения в квадрат правой и левой частей (1.9) и нахождения математического ожидания. Для получения реализаций стационарного СП (1.9) необходимо обеспечить сохранение дисперсий и корреляционных связей между всеми членами СП. С этой целью следует осуществить имитацию x^1 как СВ с дисперсией σ_x^2 , а x^2 получить на основе авторегрессии первого порядка:

$$x^{2} = R_{x}(1)x^{1} + \sigma_{x}\sqrt{1 - R_{x}^{2}(1)}\xi^{2},$$

где ξ^2 — стандартная гауссовская CB с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Наконец, x^3 и последующие величины формируются с помощью уравнения (1.9), которое удобно переписать в форме

$$x^{i} = 2\rho x^{i-1} - \rho^{2} x^{i-2} + \sigma_{x} \sqrt{(1-\rho^{2})^{3}/(1+\rho^{2})} \xi^{i}, \quad i = 3, 4, ...,$$

содержащей стандартные гауссовские СВ ξ^i . На рис. 1.3 представлены корреляционные функции СП первого порядка $R_x(k) = \rho^{|k|}$ и второго порядка $R_x(k) = (1 + A \mid k \mid) \rho^{|k|}$ при равных дисперсиях $\sigma_x^2 = 1$ и одном и том же интервале корреляции.

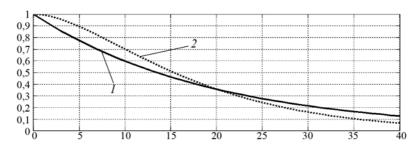


Рисунок 1.3

Корреляционные функции АР процессов первого порядка (1) при $\rho=0,95$ и второго порядка с кратными корнями (2) при $\rho=0,9$

Анализ показывает, что AP процессы с кратными корнями характеристических уравнений обладают двумя важными особенностями.

- 1. КФ таких процессов отличаются заметным уплощением вершины, что свидетельствует о возможности формировать реализации СП с более плавным изменением во времени, чем у других последовательностей. Во многих случаях такие СП могут оказаться ближе к реальным процессам в системах обработки информации.
- 2. Среди всех процессов второго порядка AP процессы с кратными корнями характеристических уравнений имеют наиболее простое описание с помощью всего двух параметров. Кратный корень характеристического уравнения определяет корреляционные свойства СП, а дисперсия порождающей последовательности ξ^i масштаб процесса.

Дальнейшее продвижение на пути улучшения корреляционных свойств СП с сохранением простоты описания можно достичь на основе AP уравнений с корнями характеристических уравнений еще большей кратности $m \geq 3$:

$$(1-\rho z^{-1})^m x^i = \xi^i$$
.

Анализ основных вероятностных характеристик таких СП приведен в работах [12, 24, 28, 97, 98].

1.3. ТЕНЗОРНЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим случайное поле $X=\{x_{\overline{j}}^i:i\in I,\overline{j}\in\Omega\}$, заданное на (n+1)-мерной сетке $\Omega\times I$, где $\Omega=\{j=(j_1,j_2,j_3,...,j_n)\}$ – n-мерная $M_1\times M_2\times....\times M_n$ -сетка; $I=\{i:i=1,2,3...\}$. Индекс i может интерпретироваться как время, поэтому сечение $x^i=\{x_{\overline{j}}^i:\overline{j}\in\Omega\}$ поля X будем называть i-м кадром. Покажем, что если поле X рассматривается как последовательность кадров x^1 , x^2 , ..., каждый из которых задан на n-мерной сетке Ω , то можно обобщить методы описания случайных последовательностей на случайные поля [17-24].

Пусть последовательность кадров описывается стохастическим разностным уравнением

$$x^{i} = \phi^{i}(x^{i-1}) + \mathcal{G}^{i}(x^{i-1})\xi^{i}, i = 0, 1, 2, ...,$$
(1.10)

где:

 $\{\xi_{j}^{i}:i\in I,\overline{j}\in\Omega\}$ — стандартное гауссовское СП;

 $\xi^i = \{\xi^i_j : \overline{j} \in \Omega\} - i$ -й кадр этого поля;

 $\phi^i(x^{i-1}) = \{\phi^i_j(x^{i-1}): \overline{j} \in \Omega\} - M_1 \times M_2 \times ... \times M_n - \text{матричная}$ функция;

 $\mathcal{G}^{i}(x^{i-1}) = \{\mathcal{G}^{i}_{jt}(x^{i-1}): \overline{j}, \overline{t} \in \Omega\}$ — тензоры ранга 2n с двумя групповыми индексами, формирующие возмущающую компоненту i-го кадра из ξ^{i} по правилу умножения тензоров [60, 71]:

$$\mathcal{G}^{i}\boldsymbol{\xi}^{i} = \left\{\mathcal{G}^{i}_{j\bar{t}}\right\}\left\{\boldsymbol{\xi}^{i}_{\bar{t}}\right\} = \left\{\sum\mathcal{G}^{i}_{j\bar{t}}\boldsymbol{\xi}^{i}_{\bar{t}}\right\}\,.$$

Транспонирование этого кадра заключается в перестановке его групповых индексов: $\mathcal{G}^{iT}_{ji} = \mathcal{G}^i_{tj}$. Отметим, что верхний индекс i означает номер кадра, т.е. в нашей интерпретации — время, поэтому i не считается немым индексом и суммирование по нему не производится.

Замечание. В данной книге принято упрощенное понятие тензора. Здесь нет необходимости смены базиса и двух видов компонент — ковариантных и контравариантных. Поэтому использованы только нижние индексы, а правило суммирования по немому индексу имеет несколько отличный от принятого в тензорном исчислении, в котором один и тот же индекс должен быть верхним и нижним. По существу, применяемые здесь тензоры являются многомерными пространственными матрицами.

Модель (1.10) позволяет описывать весьма широкий класс марковских последовательностей случайных кадров. В частности, линейная модель

$$x^{i} = \wp^{i} x^{i-1} + \mathcal{G}^{i} \xi^{i} , \qquad (1.11)$$

где тензоры \wp^i и \mathcal{G}^i не зависят от x^{i-1} , описывает гауссовскую последовательность.

Рассмотрим задачу анализа этой модели СП. Для этого поля КФ является многомерной ковариационной матрицей:

$$V_x(i,j) = M[(x^i - m^i) \times (x^j - m^j)], V_x(i) = V_x(i,i),$$
 (1.12)

где:

$$m^i = M[x^i] = \left\{ M \left[x_{\overline{j}}^i \right] : \overline{j} \in \Omega \right\};$$

× – внешнее произведение матриц.

Таким образом, $V_x(i)$ и $V_\xi^i = M[\xi^i \times \xi^i]$ являются симметричными $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \times M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ -матрицами. Для полного определения СП с помощью уравнения состояния (1.11) необходимо задать закон распределения начального кадра x^0 . Часто это распределение является гауссовским со средним m^0 и ковариационной матрицей V_x^0 . Совместную ПРВ первых кадров представим следующим образом:

$$w(x^{0}, x^{1}, ..., x^{k}) = w(x^{0}) \prod_{i=1}^{k} w(x^{i} \mid x^{i-1}, x^{i-2}, ..., x^{1}).$$
 (1.13)

Из (1.11) следует, что в гауссовском случае

$$w(x^{i} \mid x^{i-1}, x^{i-2}, ..., x^{1}) = w(x^{i} \mid x^{i-1}) =$$

$$= \left[(2\pi)^{M} \det V_{x}^{i} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left\| x^{i} - \phi(x^{i-1}) \right\|_{(V_{x}^{i})^{-1}}^{2} \right),$$

где
$$V_x^i = \mathcal{G}^i(x^{i-1})V_{\mathcal{E}}^i\mathcal{G}^{iT}(x^{i-1})$$
; $\left\|a\right\|_V^2 = aVa$; $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$.

Подставляя эти условные ПРВ в (1.13), получаем выражение для совместной ПРВ:

$$w(x^{0},...,x^{k}) = \left[\prod_{i=0}^{k} (2\pi)^{M} \det V_{x}^{i} \right]^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} \left\| x^{i} - \phi^{i}(x^{i-1}) \right\|_{(V_{i})^{-1}}^{2} \right),$$

$$(1.14)$$

где $\phi^{1}(x^{0}) = m^{0}$.

Из совместных ПРВ (1.14), вообще говоря, можно найти среднее значение m^i и КФ:

$$V_{x}(i,j) = M[(x^{i} - m^{i}) \times (x^{j} - m^{j})],$$

но выполнить практически необходимые для этого вычисления сложно. Удобнее воспользоваться известными приближенными рекуррентными соотношениями для векторных марковских последовательностей, обобщив их на рассматриваемые тензорные модели. Для этого используем разложение функции $\phi^i(x^{i-1})$ в тензорный ряд Тейлора, предполагая достаточную гладкость и ограничиваясь линейными членами:

$$\phi^{i}(x^{i-1}) \approx \phi^{i}(m^{i-1}) + \frac{\partial \phi^{i}(m^{i-1})}{\partial m^{i-1}}(x^{i-1} - m^{i-1}).$$
 (1.15)

Подставляя (1.15) в (1.10) и усредняя, находим приближенное рекуррентное соотношение

$$m^i \approx \phi^i(m^{i-1}) \tag{1.16}$$

для средних значений. Подставляя (1.15) и (1.16) в (1.12) и учитывая независимость x^i и ξ^i , получаем

$$V_{x}(i) = \frac{\partial \phi^{i}(m^{i-1})}{\partial m^{i-1}} V_{x}(i-1) \frac{\partial \phi^{iT}(m^{i-1})}{\partial m^{i-1}} + M[\mathcal{G}^{i}(x^{i-1})V_{\mathcal{E}}^{i}\mathcal{G}^{iT}(x^{i-1})].$$
(1.17)

Разложим $\mathcal{G}^i V^i_{\xi} \mathcal{G}^{iT}$ в тензорный ряд Тейлора с точностью до линейных членов:

$$\begin{split} \mathcal{S}^{i}(x^{i-1})V_{\xi}^{i}\mathcal{S}^{iT}(x^{i-1}) &= \\ &= \mathcal{S}^{i}(m^{i-1})V_{\xi}^{i}\mathcal{S}^{iT}(m^{i-1}) + 2\mathcal{S}^{i}(m^{i-1})V_{\xi}^{i}\frac{\partial\mathcal{S}^{iT}(m^{i-1})}{\partial(m^{i-1})}(x^{i-1} - m^{i-1}). \end{split}$$

Подставляя это разложение в (1.17), получим приближенное рекуррентное соотношение для К Φ :

$$\begin{split} V_{x}(i) &= \frac{\partial \phi^{T}(m^{i-1})}{\partial (m^{i-1})} V_{x}(i-1) \frac{\partial \phi^{iT}(m^{i-1})}{\partial (m^{i-1})} + \\ &+ \mathcal{G}^{i}(x^{i-1}) V_{\xi}^{i} \mathcal{G}^{iT}(x^{i-1}). \end{split} \tag{1.18}$$

В случае линейной модели (1.11) рекуррентные соотношения (1.16) и (1.18) будут точными:

$$m^{i} = 0$$
, $V_{x}(i) = \wp^{i}V_{x}(i-1)\wp^{iT} + \mathcal{G}^{i}V_{z}^{i}\mathcal{G}^{iT}$. (1.19)

Особый интерес представляет модель (1.11) с постоянными тензорами $\wp^i = \wp$ и $\mathcal{G}^i = \mathcal{G}$, для которой

$$V_{x}(i,i+k) = \wp^{(k)}V_{x}(i,i) = \wp^{(k)}V_{x}(i), \qquad (1.20)$$

где (k) означает возведение в k-ю степень.

Если корни характеристического уравнения $\det(\lambda E - \wp) = 0$ по модулю меньше единицы, то $\wp^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$, и из (1.20) находим, что $V_x(i,i+k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Применяя аппарат z-преобразований, запишем (1.11) в виде

$$x^i = z \omega x^i + 9\xi^i$$

или

$$(E-z\wp)x^i=\vartheta\xi^i$$
.

Умножая последнее равенство слева на $(E-z_{\mathcal{O}})^{-1}$, получаем выражение x^{i} через возмущающее поле:

$$x^i = (E - z\wp)^{-1} \mathcal{G} \xi^i.$$

Отсюда следует:

$$x^{i}(x^{i})^{T} = (E - z_{\emptyset})^{-1} \mathcal{S}\xi^{i}(\xi^{i})^{T} \mathcal{S}^{T}(E - z^{-1}_{\emptyset})^{-1},$$

что после усреднения дает выражение тензорного спектра стационарного поля

$$V_{x}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_{x}(0,k)z^{k} = (E - z\wp)^{-1} \mathcal{G}V_{\xi} \mathcal{G}^{T} (E - z^{-1}\wp^{T})^{-1},$$

представляющего собой ряд Лорана по степеням z с тензорными коэффициентами. Эти коэффициенты можно найти по формуле

$$V_x(0,k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (E - z\wp)^{-1} \mathcal{G} V_{\xi} \mathcal{G}^T (E - z^{-1}\wp^T)^{-1} z^{k-1} dz , \qquad (1.21)$$

где $C = \{z : |z| = 1\}$ — единичная окружность комплексной плоскости.

Из (1.21) достаточно найти $V_x = V_x(0,0)$, остальные значения получаются из уравнения (1.19), которое в стационарном случае принимает форму $V_x(i,i+k) = \wp^{(k)}V_x$. Для нахождения V_x можно вместо интегральной формулы (1.21) использовать предел (1.38) при $i \to \infty$:

$$V_x = \wp \, V \wp^T + \mathcal{9} V_\xi \mathcal{9}^T \, .$$

Это уравнение представляет собой неособенную систему линейных уравнений относительно компонент тензора V_{x} .

Рассмотрим теперь решение задачи синтеза модели (1.11), т.е. задачу нахождения тензоров \wp^i и \mathcal{G}^i при заданных тензорах внутрикадровых $V_x(i,i)$ и межкадровых $V_x(i-1,i)$ ковариаций. Из (1.20) следует

$$V_x(i-1,i) = \wp^i V_x(i-1,i-1)$$
,

что является системой линейных уравнений относительно элементов тензора \wp^i , при этом очевидно

$$\wp^{i} = V_{x}(i-1,i)V_{x}^{-1}(i-1,i-1)$$
.

Выберем возмущающее поле с ковариациями $V_{\xi}^{i}=E$. Тогда (1.19) принимает вид

$$\mathcal{G}^{i}\mathcal{G}^{iT} = V_{x}(i,i) - \wp^{i}V_{x}(i-1,i-1)\wp^{iT}$$
.

Это уравнение относительно элементов тензора \mathcal{G}^i может быть решено, например, на основе ортогонализации Грама—Шмидта.

Рассмотрим подробнее некоторые частные, но важные для приложений случаи СП, порождаемых уравнением (1.11). Пусть СП стационарно и имеет К Φ вида

$$V_{x}(0,i) = \rho^{|i|}V,$$

где ρ — коэффициент корреляции между соответствующими элементами $x_{\bar{j}}^{i-1}$ и $x_{\bar{j}}^i$ двух соседних кадров и V есть внутрикадровая К Φ .

В этом случае $\wp^i = \rho E$ и уравнение (1.11) перепишется в виде

$$x^i = \rho x^{i-1} + \vartheta \xi^i,$$

т.е. очередной кадр x^i равен предыдущему кадру x^{i-1} , умноженному на числовой коэффициент ρ , плюс возмущение $\eta^i = \vartheta \xi^i$. При этом КФ этих возмущений равна $(1-\rho^2)V$, т.е. с точностью до множителя $(1-\rho^2)$ совпадает с внутрикадровыми корреляциями. Таким образом, для решения задачи синтеза модели (1.11) достаточно найти коэффициенты ϑ линейной комбинации $\eta^i = \vartheta \xi^i$, обеспечивающие равенство КФ случайных полей η^i внутрикадровой КФ V поля X.

Обобщением рассмотренной тензорной модели (1.11) служит нелинейное стохастическое разностное уравнение

$$x_{\overline{j}}^{t} = \phi_{\overline{j}}^{t}(x_{\overline{l}}^{t-1}, \overline{l} \in J_{t-1}) + \mathcal{G}_{\overline{j}\overline{l}}^{t}(x_{s}^{t-1}, \overline{s} \in J_{t-1})\xi_{\overline{l}}^{t},$$

$$t \in T, \ \overline{j}, \ \overline{l}, \ \overline{s} \in J_{t},$$

$$(1.22)$$

позволяющее описать весьма широкий класс марковских негауссовских СП на n-мерных сетках J_t . Здесь $\{\xi_{\overline{l}}^t, \ \overline{l} \in J_t, \ t \in T\}$, поле независимых, вообще говоря, негауссовских случайных величин с известными ПРВ $W(\xi_{\overline{l}}^t)$; $\phi_{\overline{j}}^t(x_{\overline{l}}^{t-1})$ и $\mathcal{G}_{\overline{j}l}^t(x_{\overline{s}}^{t-1})$ — тензоры рангов n и 2n соответственно, в общем случае нелинейно зависящие от значений $\left\{x_{\overline{j}}^{t-1}, \overline{j} \in J\right\}$ (t-1)-го кадра многомерного СП $\{x_{\overline{j}}^{t-1}, t \in T, \overline{j} \in J\}$.

При известном распределении $W\Big(\Big\{x_{\overline{j}}^t,\,\overline{j}\in J_1\Big\}\Big)$ первого кадра СП может быть записано совместное распределение

$$\begin{split} &W(\{x_{\overline{j}}^t,\overline{j}\in J_t,t\in T\})=\\ &=W(\{x_{\overline{j}}^t,\overline{j}\in J_1\})\prod_{t=2}^kW(\{x_{\overline{j}}^t,\overline{j}\in J_1\mid x_{\overline{j}}^{t-1},\overline{j}\in J_{t-1}\}), \end{split}$$

где условные ПРВ $W(\{x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_1 \mid x_{\bar{j}}^{t-1}, \bar{j} \in J_{t-1}\}), t=2,3,...,k,...$ находятся с учетом (1.22) и обычных правил функционального преобразования $x_{\bar{j}}^1 = \Phi(\xi_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_t)$ системы случайных величин $\xi_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_t$ с известным распределением.

К сожалению, попытки найти решение задачи синтеза модели (1.22), т.е. построения нелинейных функций $\phi_{\bar{j}}^t$ и $v_{\bar{j}\bar{l}}^t$ по заданным распределениям вероятностей $W(\{x^t\})$, приводят к положительным результатам лишь в отдельных частных случаях.

Рассмотренные тензорные модели порождают марковские последовательности кадров первого порядка. Очевидно, не вызовет принципиальных затруднений и приведение моделей (1.4) к тензорному виду для описания марковских последовательностей более высоких порядков.

1.4. АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

При тензорном представлении СП предполагалось, что для каждого момента I дискретного времени СП $\{x_{\bar{j}}^i, \bar{j} \in J\}$ формируется рекуррентно на основе предыдущего значения $\{x_{\bar{j}}^{i-1}, \bar{j} \in J\}$ и обновляющего СП $\{\xi_{\bar{j}}^i, \bar{j} \in J\}$ независимых СВ. Несмотря на то, что вычисления во времени осуществляются рекуррентно, при формировании каждого очередного кадра $\{x_{\bar{j}}^i, \bar{j} \in J\}$ необходимо выполнять линейное (1.11) или нелинейное (1.10) преобразование всех элементов $\{x_{\bar{j}}^{i-1}, \bar{j} \in J\}$, $\{\xi_{\bar{j}}^i, \bar{j} \in J\}$, определенных на n-мерной пространственной сетке J. Такое преобразование при большом числе m элементов области J даже для простейшей линейной модели (1.11) может потребовать значительного числа m(m+1) операций умножения.

Например, для имитации последовательности (1.10) плоских изображений размером 100×100 элементов необходимо около 10^8 операций умножения при формировании каждого очередного кадра изображения, т.е. 10^4 умножений на один элемент очередного сформированного изображения. Заметим, что решение задач обработки СП, например тензорной фильтрации, потребует еще большего объема вычислений.

Тензорные модели дают возможность описать широкий класс негауссовских и неоднородных СП, но приводят к значительным вычислительным затратам при решении задач имитации и обработки СП. В связи с этим возникают вопросы о существовании рекуррентного не только по времени, но и по пространству представления СП и возможности построения оптимальных рекуррентных алгоритмов статистического анализа таких СП.

По своему строению СП значительно сложнее случайных процессов. Во-первых, реализации СП являются функциями нескольких переменных, теория которых принципиально сложнее теории функций одной переменной. Во-вторых, значительно ус-

ложняется понятие марковости. Случайный процесс можно представить развивающимся во времени, математическим выражением такого развития и является модель (1.1). Для марковских последовательностей временной интервал может быть разбит любой точкой i на условно независимые прошлое $\Gamma^- = \{x^k : k < i\}$ и будущее $\Gamma^+ = \{x^k : k > i\}$. Однако СП определено на n-мерной области Ω , для геометрического разбиения которой на две части Γ^- и Γ^+ требуется, по меньшей мере, (n-1)-мерная область Γ . Свойство марковости СП состоит в том, что для любого множества Γ (из некоторого класса множеств) СВ, входящие в Γ^- , условно независимы от СВ, входящих в Γ^+ , при известных значениях Γ .

Назвать Γ^- , Γ и Γ^+ прошлым, настоящим и будущим можно весьма условно. Тем не менее, марковское свойство позволяет представить СП также формирующимся во времени от Γ^- через Γ к Γ^+ , при этом Γ с течением времени перемещается по Ω . Например, если в качестве множеств Γ брать строки двумерной сетки Ω , то поле можно представить формирующимся построчно.

Дальнейшее развитие этой идеи позволяет обобщить АР модели случайных последовательностей на СП.

Если порядок формирования скалярной последовательности x^0, x^1, x^2, \ldots обычно соответствует наблюдаемым во времени значениям, то порядок формирования СП $X = \{x_{\overline{j}} : \overline{j} \in \Omega\}$ требует особого определения. Для этого нужно линейно упорядочить узлы сетки Ω , тогда про любые два элемента поля можно сказать, что один из них предшествует другому. Если $x_{\overline{i}}$ предшествует $x_{\overline{j}}$, то будем отмечать это как $(\overline{i}) < (\overline{j})$.

Существует множество вариантов такого упорядочения. В двумерном случае часто применяются пилообразная (все строки проходятся в одном направлении как показано на рис. 1.4,a) и треугольная (направление при переходе к очередной строке меняется на противоположное, см. рис. 1.4,6).

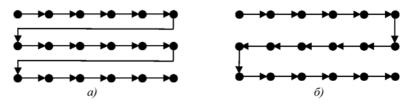


Рисунок 1.4 Развертки двумерного изображения: *а* – пилообразная; *б* – треугольная

В результате развертки поле преобразуется в случайную последовательность. Предположим, что она является марковской порядка s, т.е. условная ПРВ любого $x_{\overline{i}}$ относительно всех предшествующих ему элементов зависит только от некоторого конечного отрезка $\Gamma_{\overline{i}} = \{x_{\overline{j}} : (\overline{i}) - s \leq (\overline{j}) < (\overline{i})\}$. Множество $\Gamma_{\overline{i}}$ называется глобальным состоянием. В двумерном случае оно при пилообразной (и треугольной) развертке включает в себя несколько последних строк и показано на рис. 1.5. Следовательно, можно представить $x_{\overline{i}}$ в каузальном виде как функцию элементов глобального состояния и возмущения $\xi_{\overline{i}}$:

$$x_{\bar{i}} = \phi_{\bar{i}}(x_{\bar{i}} : \bar{j} \in \Gamma_{\bar{i}}; \xi). \tag{1.23}$$

Полученное выражение представляет АР модель случайного поля. Однако использовать (1.23) для представления полей на сетках больших размеров трудно, а для бесконечных сеток — невозможно ввиду большого, или даже бесконечного, числа аргументов функций ϕ_i .

Преодолеть эту трудность позволяет то обстоятельство, что ПРВ элемента $x_{\overline{i}}$ часто зависит не от всего глобального состояния $\Gamma_{\overline{i}}$, а только от некоторой его части $L_{\overline{i}}$, называющейся *покальным состоянием* и включающей в себя только достаточно близкие к $x_{\overline{i}}$ элементы поля, не упреждающие $x_{\overline{i}}$ относительно данной развертки.

Область, соответствующая локальному состоянию $L_{\tilde{i}}$, на рис. 1.5 обозначена двойной штриховкой.

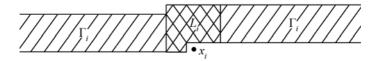


Рисунок 1.5 Глобальное Γ_i и локальное L_i состояния

В результате поле X может быть представлено AP моделью

$$x_{\overline{i}} = \phi_{\overline{i}} \left(x_{\overline{j}} : \overline{j} \in L_{\overline{i}}; \xi_{\overline{i}} \right), \tag{1.24}$$

которая во многих случаях может быть приемлема для решения прикладных задач.

Конечно, может оказаться, что даже область локального состояния $L_{\tilde{i}}$ слишком велика, и возникают значительные технические трудности при имитации или обработке полей. В таких ситуациях можно $L_{\tilde{i}}$ уменьшить до приемлемых размеров, используя полученную модель (1.24) как некоторое приближение к реальным физическим объектам. Тогда дополнительно появляется возможность имитировать такие изображения с приемлемыми вычислительными затратами.

Линейные авторегрессионные модели случайных полей

Наиболее простым частным случаем (1.24) является линейное стохастическое уравнение

$$x_{\overline{j}} = \sum_{\overline{l} \in G_j} \alpha_{\overline{j}, \overline{l}} x_{\overline{l}} + \sum_{\overline{l} \in Y_j} \beta_{\overline{j}, \overline{l}} \xi_{\overline{l}}, \ \overline{j} \in J,$$

$$(1.25)$$

с белым гауссовским СП $\{\xi_{\overline{j}}\}$, соответствующее известному уравнению авторегрессии-скользящего среднего для случайных последовательностей. Однако, в отличие от своего одномерного аналога, свойства СП, порождаемого уравнением (1.25), в настоящее время изучены не полностью даже для моделей с постоянными коэффициентами $\alpha_{\overline{j},\overline{l}}=\alpha_{\overline{l}}$, $\beta_{\overline{j},\overline{l}}=\beta_{\overline{l}}$ и неизменяющимся видом областей $G_{\overline{l}}=G$ и $Y_{\overline{l}}=Y$:

$$x_{\overline{j}} = \sum_{\overline{l} \in G} \alpha_{\overline{l}} x_{\overline{j} - \overline{l}} + \sum_{\overline{l} \in Y} \beta_{\overline{l}} \xi_{\overline{j} - \overline{l}}, \ \overline{j} \in J.$$
 (1.26)

Важным частным случаем (1.26) является уравнение многомерной АР:

$$x_{\overline{j}} = \sum_{\overline{l} \in G} \alpha_{\overline{l}} x_{\overline{j} - \overline{l}} + \xi_{\overline{j}}, \ \overline{j} \in J.$$
 (1.27)

Приведенные уравнения описывают алгоритм формирования СП $\{x_{\overline{j}}\}$ в точке $\overline{j}=(j_1,j_2,...,j_n)$. При этом предполагается, что в нашем распоряжении имеются все значения $x_{\overline{j}-\overline{l}}$, $\overline{l}\in G$, $(\overline{j}-\overline{l})<(\overline{j})$, вычисленные на предыдущих шагах или заданные в качестве начальных условий. Именно такие процедуры будем называть *пространственно-рекуррентными*. Заметим, что при белом СП $\{\xi_{\overline{j}}\}$ и конечных размерах области Y проблемы хранения или рекуррентного формирования массива $\xi_{\overline{j}-\overline{l}}$, $\overline{l}\in Y$, не возникают.

Возможности пространственных рекуррентных вычислений зависят от вида области локальных состояний G, порядка последовательного просмотра пространственной сетки J (правила развертки J в последовательность индексов) и соответствующих начальных условий.

Недостатком модели (1.27), усложняющим ее анализ, часто является большое количество слагаемых в правой части. Уменьшить это количество до минимума можно следующим образом. Простейшее AP уравнение, порождающее n-мерное поле X, не распадающееся на независимые СП меньшей размерности, имеет вид

$$x_{\bar{i}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{\bar{i} - e_k} + \beta \xi_{\bar{i}} , \qquad (1.28)$$

где $\overline{e}_k = (0,...0,1,0,...,0)$ — единичный вектор k-й координатной оси.

Любая модель (1.27) может быть приведена к модели типа (1.28) с минимальным числом слагаемых. Для этого воспользуемся векторными авторегрессионными моделями, которые в линейном случае описываются уравнением

$$\overline{x}_{i} = \sum_{j \in D} A_{j} \overline{x}_{i+j} + B \overline{\xi}_{i} , \qquad (1.29)$$

где $\overline{x_i}$ — значение векторного поля в узле \overline{i} ; $A_{\overline{j}}$, B — квадратные матрицы; $\{\overline{\xi_i}\}$ — стандартное СП независимых векторов с независимыми компонентами.

Действительно, рассмотрим, например, модель Хабиби:

$$x_{i_1 i_2} = \rho_1 x_{i_1 - 1, i_2} + \rho_2 x_{i_1, i_2 - 1} - \rho_1 \rho_2 x_{i_1 - 1, i_2 - 1} + \sigma \sqrt{(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)} \xi_{i_1 i_2}$$
 (1.30)

и представим ее в виде (1.29). Введем для этого векторы $\overline{x}_{\overline{i}} = \overline{x}_{ij} = \left(x_{ij}, x_{i,j-1}\right)^T$ и $\overline{\xi}_{\overline{i}} = \left(\xi_{ij}, \phi_{ij}\right)^T$, положим $\beta = \sigma \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}$, тогда $\overline{x}_{\overline{i}-\overline{e}_1} = \left(x_{i-1,j}, x_{i-1,j-1}\right)^T$, $\overline{x}_{\overline{i}-\overline{e}_2} = \left(x_{i,j-1}, x_{i,j-2}\right)^T$, и уравнение (1.30) будет эквивалентно первой компоненте векторного уравнения

$$\begin{pmatrix} x_{ij} \\ x_{i,j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & -\rho_1 \rho_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-1,j} \\ x_{i-1,j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i,j-1} \\ x_{i,j-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{ij} \\ \phi_{ij} \end{pmatrix}$$
(1.31)

или при очевидных обозначениях

$$\overline{x}_{\overline{i}} = A_1 \overline{x}_{\overline{i}-\overline{e}_1} + A_2 \overline{x}_{\overline{i}-\overline{e}_2} + B \overline{\zeta}_{\overline{i}},$$

что является минимальной векторной моделью вида (1.29). На рис. $1.6,\delta$ показаны элементы поля, входящие в векторы модели (1.31).

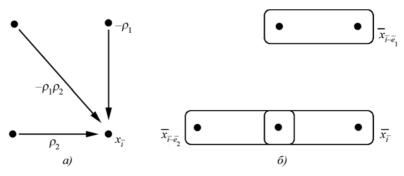


Рисунок 1.6 Переход от скалярной модели (a) к векторной модели (δ)

При решении многих практических задач возникает необходимость представить СП с помощью марковской случайной последовательности. Для двухмерного СП это можно осуществить несколькими способами на основе тензорного AP уравнения (1.12) с одним нижним индексом $\left\{x_j^k\right\} = \overline{x}^k$.

В качестве примера рассмотрим два способа преобразования модели Хабиби к векторным АР уравнениям.

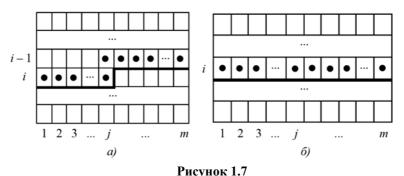
Первый способ основан на включении в вектор $\overline{x}^{i\,j}$, i=1,2,...,n, j=1,2,...,m элементов $(x_{ij}\ x_{i(j-1)}\ ...\ x_{i1}\ x_{(i-1)j}\ x_{(i-1)(j+1)}\ ...\ x_{(i-1)m})$, позиции которых отмечены кружками на рис. 1.7,a. В этом случае AP уравнение для марковской векторной последовательности

$$\bar{x}^{ij} = \wp_{i}\bar{x}^{i(j-1)} + \bar{\xi}^{ij}, \ j = 1, 2, ..., m$$
 (1.32)

соответствует пилообразной развертке (рис. 1.7,6) для каждой строки i=2,3,...,n двумерного кадра.

При этом $\ \overline{\xi}^{ij} = (\xi_{ij} \ 0 \ 0 \dots 0)^T$, а элементы матрицы

$$\wp_{j} = \begin{pmatrix} \rho_{2} & 0 & \dots & \rho_{1} & -\rho_{1}\rho_{2} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ j = 2, 3, \dots, m,$$



Два способа формирования векторной марковской последовательности из элементов двухмерного случайного поля

легко находятся с помощью сопоставления уравнений (1.30) и (1.32). Заметим, что при пилообразной развертке вектором, предшествующим $\overline{x}^{i1} = (x_{i1} \ x_{(i-1)1} \ x_{(i-1)2} \ ... \ x_{(i-1)m})^T$, является

$$\overline{x}^{i0} = \overline{x}^{(i-1)m} = (x_{(i-1)m} \ x_{(i-1)(m-1)} \ \dots \ x_{(i-1)1} \ x_{(i-2)m})^T$$

и поэтому

$$\wp_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При правильном формировании элементов первой строки и первого столбца кадра с помощью скалярных AP последовательностей получаем марковскую векторную СП (1.32), свойства которой в точности соответствуют свойствам двумерного СП (1.30).

Второй способ получения векторной случайной последовательности с такими же вероятностными характеристиками заключается в составлении вектора из элементов полной строки двумерного СП:

$$\overline{x}^{i} = (x_{i1} \ x_{i2} \ ... \ x_{im})^{T}, \ i = 1, 2, ..., n$$

Для формирования последовательности строк вновь применим AP уравнение (1.12) с одним нижним индексом, переписанное в векторной форме:

$$\overline{x}^i = \wp \overline{x}^{i-1} + \overline{\xi}^i \,, \tag{1.33}$$

где $\overline{\xi}^i$, i = 1, 2, ..., n — m-мерные CB с одинаковыми ковариационными матрицами $V_{\mathcal{E}_i} = V_{\mathcal{E}}$, i = 2, 3, ..., n .

Для определения элементов матрицы \wp умножим (1.33) на $\overline{x}^{(i-1)T}$ справа и найдем математическое ожидание:

$$M\{\overline{x}^{i}\overline{x}^{(i-1)T}\} = \wp \, V_{x(i-1)}, \ \ V_{x(i-1)} = M\{\overline{x}^{(i-1)}\overline{x}^{(i-1)T}\} \ .$$

Предполагая сохранение корреляционных характеристик по всему кадру $C\Pi$

$$V_{xi} = M\{\overline{x}^i \overline{x}^{iT}\} = V_x = \sigma_x^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_2 & \dots & \rho_2^{m-2} & \rho_2^{m-1} \\ \rho_2 & 1 & \dots & \rho_2^{m-3} & \rho_2^{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_2^{m-2} & \rho_2^{m-3} & \dots & 1 & \rho_2 \\ \rho_2^{m-1} & \rho_2^{m-2} & \dots & \rho_2 & 1 \end{pmatrix},$$

получим, после умножения (1.33) на \bar{x}^{iT} справа и нахождения математического ожидания,

$$V_x = M\{\overline{x}^i \overline{x}^{iT}\} = \wp V_x \wp^T + V_\xi \ .$$

Таким образом, можно получить корреляционные характеристики двумерного СП Хабиби (1.30), если положить

$$\wp = \rho_1 E , V_{\xi} = (1 - \rho^2) V_x ,$$

где E — единичная матрица.

Наконец, раскладывая симметрическую матрицу V_x в произведение двух треугольных

$$V_{x} = \sigma_{x}^{2} \mathcal{G} \mathcal{G}^{T}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \rho_{2} & \gamma & \dots & 0 & 0 \\ \rho_{2}^{2} & \rho_{2} \gamma & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{2}^{m-1} & \rho_{2}^{m-2} \gamma & \dots & \rho_{2} \gamma & \gamma \end{pmatrix},$$

получаем следующее рекуррентное соотношение для непосредственного моделирования векторной СП:

$$\overline{x}^{i} = \rho_{1} \overline{x}^{i-1} + \sigma_{x} \gamma \vartheta \overline{\xi}^{i}, i = 1, 2, ..., n,$$

$$(1.34)$$

где $\gamma=\sqrt{1-\rho_2^2}$, а векторы $\overline{\xi}^i$ составлены из независимых компонент ξ_{ij} , j=1,2,...,m с нулевыми средними и единичными дисперсиями.

Представленные две формы эквивалентного задания СП с помощью векторных марковских АР последовательностей (1.32) и (1.34) позволяют решать разнообразные задачи обработки наблюдений, записанных в форме двумерных или многомерных изображений.

Остановимся теперь на основных вероятностных характеристиках многомерных AP моделей СП. Этот класс СП порождается линейными стохастическими разностными уравнениями следующего вида:

$$x_{\overline{i}} = \sum_{\overline{j} \in D} \alpha_{\overline{j}} x_{\overline{i} - \overline{j}} + \beta \xi_{\overline{i}}, \ \overline{i} \in \Omega,$$

$$(1.35)$$

где:

 $X = \{x_{\overline{i}}, \overline{i} \in \Omega\}$ — моделируемое СП, определенное на N-мерной сетке;

$$\Omega=\{\overline{i}=\left(i_1,i_2,\dots i_N\right):i_k=1\dots M_k,\,k=1\dots N\}\;;\quad \{\alpha_{\overline{j}}^-,\beta,\,\overline{j}\in D\}\quad -$$
коэффициенты модели;

 $\Xi = \{\xi_{\overline{i}}, \ \overline{i} \in \Omega\}$ — белое СП; $D \subset \Omega$ — каузальная область ло-кальных состояний.

Чаще всего в качестве Ξ выбирают нормально распределенное СП с независимыми компонентами. В этом случае СП X также имеет гауссовское распределение.

Задача анализа моделей (1.35) в общем виде рассматривалась в работах [18, 19, 24, 43]. Модели (1.35) соответствует пространственный линейный фильтр с передаточной функцией

$$H(\overline{z}) = \frac{\beta}{1 - \sum_{\overline{j} \in D} \alpha_{\overline{j}} \overline{z}^{-\overline{j}}},$$
(1.36)

где
$$\overline{z}^{-\overline{j}} = z_1^{-j_1} z_2^{-j_2} \dots z_N^{-j_N}$$
 .

При этом спектральная плотность СП X записывается следующим образом:

$$S_x(\overline{z}) = H(\overline{z})S_{\xi}(\overline{z})H(\overline{z}^{-1}) = \sigma_{\xi}^2 H(\overline{z})H(\overline{z}^{-1}),$$

где $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ – дисперсия СП Ξ .

Корреляционная функция СП X может быть найдена с помощью обратного z-преобразования спектральной плотности:

$$R(\overline{r}) = \frac{\beta^2}{(2\pi i)^N} \oint_{C_N} S_x(\overline{z}) \overline{z}^{\overline{r} - \overline{1}} d\overline{z}, \qquad (1.37)$$

где $C_N = \{|\overline{z}| = 1\}$ — единичная полиокружность (прямое произведение n единичных окружностей) в многомерном комплексном пространстве.

Анализ вероятностных свойств СП упрощается, если их спектральная плотность может быть факторизована [72, 78], т.е.

$$S_x(\overline{z}) = \prod_{k=1}^N S_k(z_k).$$

Поскольку у таких полей передаточная функция многомерного фильтра

$$H(\overline{z}) = \prod_{k=1}^{N} H_k(z_k)$$
 и КФ $R(\overline{r}) = \prod_{k=1}^{N} R_k(r_k)$

также факторизуются, то для решения задачи статистического анализа многомерного СП достаточно исследовать свойства случайных последовательностей, порожденных одномерными AP с характеристиками $S_k(z_k)$, $H_k(z_k)$ и $R_k(r_k)$, $k=1,\ldots,M_k$.

К недостаткам таких моделей следует отнести невозможность описания с их помощью изотропных СП, например с КФ $R(\overline{r}) = R\left(\overline{r} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots r_N^2}\right)$. Однако, как показывает анализ, подбором соответствующих одномерных моделей удается достичь вполне приемлемых аппроксимаций.

В работах [24, 97, 98] для получения близких к изотропным СП предложено брать одномерные фильтры с кратными корнями

характеристических уравнений:
$$1 - \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{kj} \lambda_k^j = 0$$
, где

 $n_k, k = 1,..., M$ — порядки одномерных AP.

В этом разделе решаются задачи синтеза модели *N*-мерного СП с кратными корнями характеристических уравнений одномерных фильтров и анализа ее вероятностных свойств. Решим сначала эти задачи для одномерной модели.

Рассмотрим одномерную AP длиной M:

$$x_{i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{j} x_{i-j} + \beta \xi_{i}, \ i = 1, ..., M.$$
 (1.38)

Здесь $\{\xi_i\}$ — гауссовская последовательность независимых компонент с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ_ξ^2 . Решение задачи синтеза будет заключаться в том, чтобы по заданному корню характеристического уравнения $1/\rho$, его кратности n и требуемой дисперсии σ_x^2 поля определить неизвестные коэффициенты AP $\{\alpha_j, j=1...n; \beta\}$. В случае с кратными корнями это уравнение можно записать в операторной форме следующим образом:

$$(1-\rho z^{-1})^n x_i = \beta \xi_i, \ i = 1...M,$$
 (1.39)

где z^{-1} — оператор сдвига.

Учитывая, что $z^{-k}x_i = x_{k-i}$, перепишем (1.39):

$$x_i = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} C_n^j \rho^j x_{i-j} + \beta \xi_i, \ i = 1...M \ . \tag{1.40}$$

Сравнение (1.39) и (1.40) дает возможность записать выражение для коэффициентов $\alpha_i = \alpha_i(\rho, n)$:

$$\alpha_{j}(\rho,n) = (-1)^{j+1} C_{n}^{j} \rho^{j}, \ j=1,...,n.$$
 (1.41)

Значение неизвестного параметра β , являющегося коэффициентом масштаба в передаточной функции (1.36), должно выбираться так, чтобы фильтр был устойчив. Далее будет показано, как можно определить β на основе К Φ -модели.

Одной из задач статистического анализа модели является получение ее КФ. Найдем вначале НКФ, т.е. будем полагать $\sigma_x^2 = \sigma_\xi^2 = 1$. Для решения этой задачи воспользуемся формулой (1.37) для одномерного случая:

$$R(k) = \frac{\beta^2}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{z^{k-1}}{(z-\rho)^n (z^{-1}-\rho)^n} dz.$$

Так как подынтегральная функция имеет в точке $z=\rho$ полюс порядка n, то интеграл представляет собой коэффициент c_{-n} ее разложения в ряд Лорана, и может быть найден с использованием методов теории вычетов:

$$R(k) = \beta^{2} \operatorname{res}_{\rho} \left[\frac{z^{k-1}}{(z-\rho)^{n} (z^{-1}-\rho)^{n}} \right] = \frac{\beta^{2}}{(n-1)!} \lim_{z \to \rho} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left\{ \frac{z^{n+k-1}}{(1-\rho z)^{n}} \right\}.$$

Дифференцируя и переходя к пределу, получаем

$$R(k) = \beta^{2}(\rho, n)\rho^{k} \sum_{\ell=0}^{n-1} g(n, \ell, k) \frac{\rho^{2(n-\ell-1)}}{(1-\rho^{2})^{2n-\ell-1}},$$
(1.42)

где

$$g(n,\ell,k) = \frac{(n+k-1)!(2n-\ell-2)!}{\ell!(n-1)!(n-\ell-1)!(n+k-\ell-1)!},$$
(1.43)

а коэффициент $\beta = \beta(\rho, n)$ находится из условия R(0) = 1:

$$\beta^{2}(\rho,n) = \frac{\left(1-\rho^{2}\right)^{2n-1}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} \left(C_{n-1}^{\ell}\rho^{\ell}\right)^{2}}.$$
(1.44)

Формулы (1.42) – (1.44) дают, при заданных ρ и n, общий вид НКФ одномерной модели (1.38). Для того чтобы получить КФ при не равных единице дисперсиях σ_x^2 и σ_ξ^2 , необходимо домножить правую часть (1.44) на σ_x^2/σ_ξ^2 . Тем самым получаем выражение и для коэффициента β :

$$\beta = \frac{\sigma_x}{\sigma_{\xi}} \sqrt{\left(1 - \rho^2\right)^{2n-1} / \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(C_{n-1}^{\ell} \rho^{\ell}\right)^2} \ . \tag{1.45}$$

Формулы (1.41) и (1.45) полностью определяют неизвестные коэффициенты одномерной АР модели (1.38) с кратными корнями характеристического уравнения.

Рассмотрим теперь случай N измерений. Модель СП, при заданной дисперсии σ_x^2 , полностью определяется вектором параметров $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)$ и вектором кратностей (n_1, n_2, \dots, n_N) .

Пусть многомерное разделимое СП порождается следующими AP уравнениями, записанными в операторной форме:

$$\prod_{k=1}^{N} \left(1 - \rho_k z_k^{-1} \right)^{n_k} x_{\bar{i}} = \beta \xi_{\bar{i}}, \ \bar{i} \in \Omega,$$
 (1.46)

где:

N – размерность поля;

 ρ_k и n_k — параметр и кратность корней модели вдоль k-й оси;

 Ω – сетка, на которой определено поле X.

Определим коэффициенты AP для многомерной модели с кратными корнями. Для этого раскроем в (1.46) скобки:

$$\left(\prod_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{n_{k}} \alpha_{kl} z_{k}^{-l}\right) x_{\bar{i}} = \beta \xi_{\bar{i}}^{\varepsilon}, \ \sum_{j_{1}=0}^{n_{1}} \sum_{j_{2}=0}^{n_{2}} \dots \sum_{j_{N}=0}^{n_{N}} \alpha_{\bar{j}} x_{\bar{i}-\bar{j}} = \beta \xi_{\bar{i}}^{\varepsilon}, \ \bar{i} \in \Omega.$$
(1.47)

Шаблон коэффициентов $\{\alpha_{\overline{j}},\ \overline{j}=(j_1,j_2,...,j_N),\ j_k=1...n_k\}$ модели определен на N-мерном параллелепипеде размером $(n_1+1)\times(n_2+1)\times...\times(n_N+1)$.

Из (1.46) и (1.47) следует, что коэффициенты $\alpha_{\bar{j}}$ являются произведениями соответствующих коэффициентов α_{kj_k} одномерных АР вдоль k-й оси:

$$\alpha_{\overline{j}} = \prod_{k=1}^{N} \alpha_{kj_k} , \qquad (1.48)$$

где
$$\overline{j} = (j_1, j_2, \dots, j_N), j_k = \overline{1 \dots n_k}$$
.

Коэффициент β многомерной модели (1.47) находится аналогично:

$$\beta = \frac{\sigma_x}{\sigma_{\xi}} \prod_{k=1}^{N} \beta_k , \qquad (1.49)$$

где β_k — соответствующий нормированный одномерный коэффициент.

Выражение (1.47) дает общий вид AP модели многомерного разделимого гауссовского СП, а формулы (1.48) и (1.49) полностью определяют ее коэффициенты, т.е. задача синтеза модели решена. При этом КФ модели (1.47), как уже отмечалось, является произведением КФ соответствующих одномерных AP:

$$R(\overline{r}) = \prod_{k=1}^{N} R_k(r_k). \tag{1.50}$$

Для того чтобы корни характеристического уравнения были действительными, необходимо, чтобы параметр ρ выбирался из диапазона от нуля до единицы. Чем больше значение ρ , тем более крупные детали появляются на моделируемом изображении.

Рассмотрим некоторые примеры. Трехточечная модель Хабиби (1.30) является частным случаем двумерной модели (1.47) кратности (1,1), причем значение параметра ρ задает коэффициент корреляции соседних элементов Легко видеть, что КФ полу-

чаемого СП, вычисленная по формулам (1.41) и (1.50), совпадает с (1.39):

$$R(i,j) = \sigma_x^2 \rho_y^{|i|} \rho_x^{|j|}.$$

Для двумерной модели кратности (2, 2) КФ порождаемого СП записывается более сложно:

$$R(i,j) = \sigma_x^2 \rho_y^{|i|} \rho_x^{|j|} \left(1 + |i| \frac{1 - \rho_y^2}{1 + \rho_y^2} \right) \left(1 + |j| \frac{1 - \rho_x^2}{1 + \rho_x^2} \right),$$

и также совпадает с (1.39). Вид коэффициентов, рассчитанный по формулам (1.48) и (1.49), также одинаков.

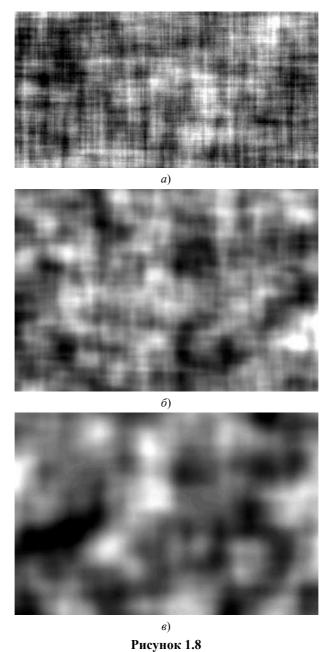
На рис. 1.8 приведены кадры изображений размером 600×400 элементов, сформированных на основе модели Хабиби (рис. 1.8,a) и на основе моделей с кратными корнями характеристических уравнений (рис. $1.8,\delta,a$) при $\rho_x=\rho_y=0.95$. Анализ приведенных и других результатов показывает, что, варьируя параметры связи и соотношения кратностей, можно получить широкий спектр разнотипных текстур, на основе которых возможно построение комплексных моделей многозональных изображений. При этом с ростом кратности корней моделируемое СП приближается по своим свойствам к изотропному СП. Это подтверждается также видом сечений равного уровня КФ, приведенных для $\rho_x=\rho_y=0.9$ на рис. 1.9.

Оценим вычислительную сложность предложенной модели. Для получения реализации N-мерного СП, определенного на многомерной сетке размером $M_1 \times M_2 \times ... \times M_N$, требуется порядка

$$\prod_{k=1}^{N} (n_k + 1) M_k$$
 операций умножения.

Полезный во многих приложениях вариант модели многомерного СП можно получить, взяв за основу одномерную АР с кратными корнями.

Пусть необходимо сформировать реализации N-мерного СП $X = \{x_{\overline{j}}, \ \overline{j} \in \Omega\}$, заданного на сетке $\Omega = \left\{\left(\overline{1, M_1}\right) \times \left(\overline{1, M_2}\right) \times \dots \times \left(\overline{1, M_N}\right)\right\}$. Это можно сделать следующим образом: сначала



Реализации случайных полей на основе авторегрессий с кратными корнями: a – кратность (1,1); δ – кратность (2,2); ϵ – кратность (3,3)

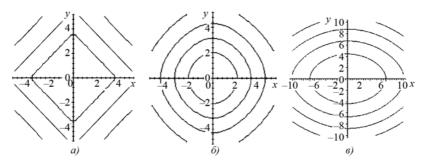


Рисунок 1.9

Сечения корреляционной функции двумерной модели с кратными корнями: a – кратность (1,1); δ – кратность (3,3); ϵ – кратность (2,3)

формируются N одномерных AP последовательностей $\{\vec{x}^k=(x_1^k,x_2^k,...,x_{M_k}^k);\ k=1...N\}$ на основе модели с кратными корнями (1.40) с заданным вектором $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_N)$ кратностей вдоль соответствующих осей. Далее элемент $x_{\overline{j}}$ поля X получается перемножением соответствующих элементов одномерных последовательностей:

$$x_{\overline{j}} = \prod_{k=1}^{N} x_{j_k}^k, \ \overline{j} = (j_1, j_2, ..., j_N) \in \Omega.$$
 (1.51)

Найдем КФ данной модели. Домножим (1.51) на $x_{\overline{j}+\overline{s}},\ \overline{j}+\overline{s}=\left(j_1+s_1,j_2+s_2,...,j_N+s_N\right)$ и найдем

$$M\left\{x_{\overline{j}}x_{\overline{j}+\overline{s}}\right\} = \prod_{k=1}^{N} M\left\{x_{j_k}^k x_{j_k+s_k}^k\right\} = \prod_{k=1}^{N} R^k\left(s_k\right).$$

Здесь $R^k(\cdot)$ – КФ (1.42) одномерной АР модели вдоль k-й оси.

Таким образом, данная модель является разделимой моделью СП, причем ее КФ совпадает с КФ N-мерной АР модели с кратными корнями. Закон распределения вероятностей такого СП оказывается негауссовским и, при больших N, достаточно сложным. По-видимому, именно из-за негауссовости СП и малых значений параметра ρ реализации этой модели обладают ярко выраженной осевой структурой, что редко встречается на реальных изображениях (за исключением, может быть, аэрофотоснимков

городов). Вместе с тем, предложенная модель отличается простотой и очень малыми вычислительными затратами (примерно $M_1...M_N$ операций умножения).

Пример реализации кадра размером 600×400 элементов на основе множительной модели (1.51) приведен на рис. 1.10. Действительно, даже для простейшего случая N=2 одномерная плотность СП находится как ПРВ произведения двух гауссовских СВ в виде

$$w(x_j) = \frac{1}{\sigma_x^4} K_0 \left(\frac{x_j}{\sigma_x^4} \right),$$

где $K_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя третьего рода нулевого порядка.

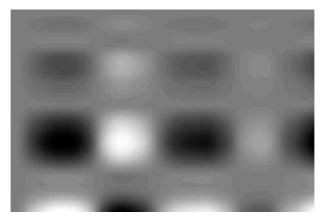


Рисунок 1.10 Реализация СП для множительной модели: кратность (4, 4); вектор параметров (0,95; 0,95)

Анализ КФ-моделей с кратными корнями показывает, что сечения КФ СП, полученных с помощью разделимых многомерных моделей, с ростом кратности корней характеристических уравнений приближаются к гиперэллипсоидам. Для оценки приближенности таких СП к изотропным желательно иметь количественную оценку анизотропии поля.

Для этого можно воспользоваться известным коэффициентом анизотропии двумерного СП:

$$A = \frac{1}{\overline{S}} \sqrt{\frac{2}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \left(S(\theta) - \overline{S} \right)^{2} d\theta, \ A \ge 0} ,$$

где:

 $S(\theta)$ – спектральная плотность поля в направлении θ ;

$$\overline{S} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} S(\theta) d\theta$$
 — среднее значение углового спектра.

Коэффициент A имеет смысл среднеквадратического расстояния между $S(\theta)$ и $\overline{S}(\theta)$ и характеризует суммарное отклонение углового спектра от его среднего значения. Недостатком данного метода оценки изотропности является предположение о том, что спектральная плотность поля $S(\theta)$ в полярных координатах $S(\theta)$ является функцией лишь одной переменной — направления θ , что верно лишь для изотропных полей. Другим недостатком является необходимость вычисления спектральной плотности в полярных координатах, что в рассматриваемом случае вызывает трудности для многих СП.

Поэтому целесообразно характеризовать изотропность многомерного СП на основе корреляционного расстояния τ в направлении \vec{u} :

$$\tau(\vec{u}) = \int_{0}^{+\infty} R(t\vec{u})dt,$$

где $\vec{u} \in S^{N-1}$ – точка на гиперсфере.

При этом предлагается следующий коэффициент анизотропии:

$$A_{\tau} = \frac{1}{\overline{\tau}} \sqrt{\frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{\vec{u} \in S^{N-1}} (\tau(\vec{u}) - \overline{\tau})^2 d\vec{u}}, \ A \ge 0,$$

где:

$$\overline{ au} = rac{1}{\left|S^{N-1}
ight|} \int\limits_{ec{u} \in S^{N-1}} au(ec{u}) dec{u}$$
 — среднее угловое корреляционное

расстояние;

 $|S^{N-1}|$ – площадь поверхности гиперсферы.

Достоинствами предложенного коэффициента является необходимость знания только КФ поля, а также возможность его вычисления с применением стандартных численных методов. Значения A_{τ} , найденные с помощью полученной формулы, для модели (1.47) при N=2, $\rho_y=\rho_x$ и различных соотношения кратностей приведены в табл. 1.1. Параметры ρ_y , ρ_x в случае различающихся кратностей выбирались, исходя из равенства корреляционных расстояний по обеим осям.

Таблица 1.1 *Коэффициент анизотропии случайного поля*

n_y	n_x			
	1	2	3	4
1	0,1232	0,0861	0,0826	0,0772
2	0,0861	0,0443	0,0394	0,0331
3	0,0826	0,0394	0,0270	0,0249
4	0,0772	0,0331	0,0249	0,0194

Анализ показывает, что значения коэффициента, близкие к нулю, говорят о высокой степени изотропности поля. Из таблицы видно, что с увеличением кратности корней модели, при условии соответствующего подбора параметров ρ_y , ρ_x , изотропность поля увеличивается. Наиболее близкие к изотропным реализации получаются при равных по обеим координатным осям кратностях. Как следует из данных рис. 1.9 и табл. 1.1, значения A_t растут, если зафиксировать кратность СП по одной из осей и увеличивать по другой, не изменяя параметры ρ_y , ρ_x .

Преимуществами данной методики оценки изотропности СП являются относительная простота вычисления, а также возможность ее применения на разнообразных выборках реальных данных.

Идентификация параметров модели

На этапе применения описанных моделей к обработке реальных данных возникает задача идентификации параметров. Идентификация одномерных AP моделей в общем случае описана в литературе, например в [4].

Будем исходить из предположения, что задано многомерное СП, являющееся реализацией некоторой разделимой АР модели. Ставится задача определения параметров этой модели.

Рассмотрим предлагаемую методику оценивания параметров в двумерном случае. При этом обобщение на СП большей размерности принципиальных трудностей не вызывает. Пусть двумерное СП $\{x_{kl}\}$ описывается следующим AP уравнением:

$$\sum_{i=0}^{n_y} \sum_{i=0}^{n_x} \alpha_{ij} x_{k-i,l-j} = \beta_{kl} \xi_{kl}, \qquad (1.52)$$

где $\{\xi_{kl}\}$ – стандартное обновляющее СП.

Для нахождения неизвестных коэффициентов α_{ij} , β_{kl} будем следовать основным правилам вывода системы Юла–Уокера для одномерных последовательностей.

Домножим (1.52) на
$$x_{k-s,l-t}$$
 , $s=0...n_y$, $t=0,...,n_x$, $\left(s,t\right)\neq \left(0,0\right)$,

$$x_{k-s,l-t} \sum_{i=0}^{n_y} \sum_{j=0}^{n_x} \alpha_{ij} x_{k-i,l-j} = \beta_{kl} \xi_{kl} x_{k-s,l-t},$$

и найдем математическое ожидание:

$$\sum_{i=0}^{n_{y}} \sum_{j=0}^{n_{x}} \alpha_{ij} R(i-s, j-t) = 0, \begin{cases} s = 0...n_{y}, \\ t = 0...n_{x}, \\ (s,t) \neq (0,0). \end{cases}$$
 (1.53)

Полученное выражение представляет собой систему $(n_y+1)(n_x+1)-1$ уравнений относительно неизвестных α_{ij} , причем $\alpha_{00}=1$. Значения КФ $R(\cdot)$ находятся из экспериментальных данных. Найдем коэффициенты β_{kl} . Для этого возведем (1.52) в квадрат и найдем математическое ожидание:

$$\left(\sum_{i=0}^{n_{y}} \sum_{j=0}^{n_{x}} \alpha_{ij} x_{k-i,l-j}\right) \left(\sum_{p=0}^{n_{y}} \sum_{q=0}^{n_{x}} \alpha_{pq} x_{k-p,l-q}\right) = \beta_{kl}^{2} \xi_{kl}^{2},$$

$$\sigma_{x}^{2} \sum_{i=0}^{n_{y}} \sum_{j=0}^{n_{x}} \sum_{p=0}^{n_{y}} \sum_{q=0}^{n_{x}} \alpha_{ij} \alpha_{pq} R(p-i,q-j) = \sigma_{\xi}^{2} \beta_{kl}^{2}.$$
(1.54)

Система линейных уравнений (1.53), (1.54) позволяет найти неизвестные коэффициенты α_{ij} , β_{kl} и тем самым полностью определить коэффициенты модели.

Заметим, что для случая N измерений система (1.53), (1.54) уравнений для идентификации параметров модели запишется в виде

$$\begin{cases}
\sum_{i_{1}=0}^{n_{1}} \dots \sum_{i_{N}}^{n_{N}} \alpha_{i_{1}i_{2}\dots i_{N}} \alpha_{s_{1}s_{2}\dots s_{N}} R(i_{1}-s_{1},i_{2}-s_{2},\dots,i_{N}-s_{N}) = 0, \\
s_{i} = 0 \dots n_{i}, i = 1 \dots N, \overline{s} \neq \overline{0},
\end{cases}$$
(1.55)

$$\beta_{kl}^{2} = \frac{\sigma_{x}^{2}}{\sigma_{\xi}^{2}} \sum_{i_{1}, i_{2}, \dots, i_{N}} \sum_{j_{1}, j_{2}, \dots, j_{N}} \alpha_{i_{1}i_{2} \dots i_{N}} \alpha_{j_{1}j_{2} \dots j_{N}} R(i_{1} - j_{1}, i_{2} - j_{2}, \dots, i_{N} - j_{N}).$$

$$(1.56)$$

Отметим, что для того чтобы система (1.55), (1.56) имела решение, матрица системы должна быть неособенной.

Рассмотрим теперь модель с кратными корнями для двумерного СП. В этом случае

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \rho_y^i \rho_x^j C_{n_y}^i C_{n_x}^j$$

и необходимо определить только четыре параметра (ρ_y , ρ_x , n_y и n_x). Однако система (1.53), (1.54) для кратных корней становится нелинейной относительно неизвестных параметров, и решение задачи идентификации требует другого подхода.

Для идентификации моделей с кратными корнями предлагается использовать двухэтапную процедуру, проводимую независимо по каждой оси.

Этап 1. Необходимо определить кратности модели по всем осям. Решение задачи нахождения кратности, по существу, является задачей определения порядка AP. Эта задача может быть решена на основе методики определения порядка AP одномерной последовательности [4].

Пусть имеется случайная последовательность $\{x_i, i=1...N\}$ и известно, что она порождается одномерной AP моделью

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_i x_{i-j} + \beta_i ,$$

где β_i – последовательность независимых стандартных CB.

В работе [4] показано, что если отсчеты k-й разностной последовательности $\{\Delta_i^k = x_{i+1} - x_i, \ i = 1...N - k\}$ не коррелированы, то порядок AP последовательности $\{x_i\}$ равен k.

Методика заключается в последовательном вычислении разностей $\{\Delta_i^k\}$ и вычислении их КФ. Как только последовательность перестает быть коррелированной, можно считать, что порядок АР определен. В случае модели с кратными корнями, знание порядка АР означает знание кратности модели.

В работе [4] приведены примеры применения данной методики, основанные на принятии статистической гипотезы о некоррелированности отсчетов случайной последовательности.

Этап 2. Производится определение значения параметра ρ . Для этого можно воспользоваться формулой (1.38), из которой следует, что $\alpha_i = (-1)^{i+1} \, C_n^i \, \rho^i$, i=1,2,...,n, или $\rho = i \sqrt{\frac{\alpha_i}{(-1)^{i+1} \, C_n^i}}$.

Значения коэффициентов α_i могут быть получены на основе выборочных значений КФ, как решение системы Юла–Уокера. Для повышения достоверности можно повторить процедуру для всех значений α_i , i=1...n, и на основе полученных оценок выбрать наилучшее значение параметра ρ .

Эксперименты показывают, что описанная процедура идентификации обеспечивает приемлемую точность оценки параметров. Так, для различных реализаций модели с кратными корнями ошибка оценки параметра ρ составляла в среднем 5...10%.

Применив изложенную методику по каждой оси, получим полностью идентифицированную многомерную модель СП с кратными корнями.

Авторегрессионная модель морского волнения с заданным спектром

Приведем пример использования авторегрессионной модели СП для описания и имитации трехмерного морского волнения [35, 47].

Морские подвижные объекты используются для проведения гидрографических работ, прокладки трубопроводов по морскому дну, обеспечения жизнедеятельности морских платформ, выполнения геологических изысканий на морском шельфе, выполнения спасательных работ, а также в задачах военно-прикладного значения. Существенная часть мощности исполнительных органов управления судном (рулей, подруливающих устройств, движителей и т. п.) расходуется на компенсацию возмущающего воздействия среды.

В целях повышения эффективности систем автоматического управления необходим анализ ветроволновых воздействий, для чего, в свою очередь, требуется создание адекватной математической модели морского волнения. При этом модель должна быть легко реализуема с помощью ЭВМ. В этом смысле целесообразно рассматривать авторегрессионные модели, реализация которых требует малых вычислительных затрат. В качестве критерия адекватности модели волнения естественно взять близость спектров реального процесса морского волнения и спектра имитирующего процесса.

В настоящее время для математического описания спектра волнения предложен ряд формул, в той или иной степени согласующихся с результатами натурных исследований. Они образуют группы экспоненциальных и дробно-рациональных спектров.

Общая форма экспоненциальных спектров имеет вид

$$S_r(\sigma) = A\sigma^{-k} \exp(-B\sigma^{-n})$$
,

где A, B, k, n — параметры, из которых A и B определяются интенсивностью волнения, а k и n — особенностями волнообразования.

XII Международная конференция опытовых бассейнов в 1969 г. рекомендовала пользоваться типовыми (стандартными) спектрами волнения, полученными для конкретных мест и условий. При отсутствии информации о типовом спектре района было предложено пользоваться стандартным спектром, у которого

k = 5 и n = 4 (спектр Пирсона–Мошковица). Стандартный экспоненциальный спектр имеет вид

$$S_r(\sigma) = 7,06\pi \frac{D_r}{\overline{\sigma}} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma}\right)^5 \exp\left[-1,25\left(\frac{\sigma_m}{\sigma}\right)^4\right],$$
 (1.57)

где:

 $D_r = 0.0358 h_{3\%}^2$ — дисперсия волновой ординаты;

 $\overline{\sigma}$ = 2π / \overline{T} — средняя частота волнения;

 $\overline{T} \approx 3.1 \sqrt{h_{3\%}}$ — средний период волнения;

 $\sigma_m = 0.71\overline{\sigma}$ — частота максимума спектра;

 $h_{3\%}$ — высота волны 3%-ной обеспеченности, т.е. высота волны, вероятность превышения которой составляет 3% (это табличная величина, зависящая от балла волн по шкале Бофорта).

Группу дробно-рациональных спектров образуют выражения, вид которых определяют дисперсия волновой ординаты D_r , коэффициент затухания α и угловая частота β соответствующих корреляционных функций.

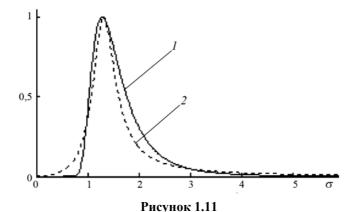
Дробно-рациональные спектры удобны для синтеза авторегрессионных моделей волнения, однако предложенные стандартные дробно-рациональные спектры смещены по отношению к экспоненциальным в область более низких частот (рис. 1.11).

Частотные свойства морских подвижных объектов таковы, что полоса пропускания расположена именно в низкочастотной области. Поэтому применение предложенных спектров морского волнения в дробнорациональной форме, являющихся в области низких частот менее точными, при анализе движения морских подвижных объектов приводит к завышенному влиянию возмущающих воздействий.

Произведем сначала синтез авторегрессионного процесса, дробно-рациональный спектр которого будет удовлетворительно близок к экспоненциальному стандартному спектру (1.57). Рассмотрим общий вид авторегрессии второго порядка со скользящим средним второго порядка:

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + b_0 \xi_n + b_1 \xi_{n-1}, \qquad (1.58)$$

где ξ_n — обновляющая последовательность независимых стандартных гауссовских величин.



Экспоненциальный (1) и дробно-рациональный (2) спектры

Этот фильтр имеет передаточную функцию

$$H_0(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$
 (1.59)

Включим последовательно с этим фильтром дискретный компенсатор

$$v_n = u_n + c u_{n-1}$$

с передаточной функцией

$$D(z) = 1 + cz^{-1}$$
,

где c — действительное число.

Это позволит уменьшить разницу между стандартным и аппроксимируемым спектрами в области низких частот. Передаточная функция принимает вид

$$H(z) = H_0(z)D(z) = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1})(1 + c_1 z^{-1})}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} =$$

$$= \frac{b_0 + (b_1 + cb_0)z^{-1} + b_1 cz^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

Кроме того, рассмотрим разность отсчетов процесса v_n через k шагов:

$$w_n = \dot{v}(n\Delta t) - \dot{v}((n-k)\Delta t) = v_n - v_{n-k} . \tag{1.60}$$

Операция (1.60) также направлена на ослабление отличий между спектрами в области низких частот, ей соответствует передаточная функция $F(z) = 1 - z^{-k}$.

При последовательном включении фильтров вида (1.60) спектры процессов перемножаются, поэтому удается улучшить показатели качества аппроксимации. Итак, дискретный фильтр, имитирующий процесс морского волнения, будет иметь передаточную функцию

$$G(z) = (H(z) \cdot D(z) \cdot F(z))^{s}, \qquad (1.61)$$

где s — число последовательно включенных фильтров (1.60).

Варьируя параметрами a, b, b_0 , b_1 , c, k, s описанной модели, можно получить дискретный процесс со спектром, близким к заданному.

Качество аппроксимации спектра оценивается некоторым критерием, например максимальной абсолютной или интегральной разницей между стандартным и аппроксимирующим спектрами.

Отметим, что повышение порядка авторегрессии (1.58) дает дополнительные возможности улучшения показателей качества аппроксимации спектра (1.57). Для этого заменим формирующее уравнение (1.58) на

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + b_0 \xi_n + b_1 \xi_{n-1} + b_2 \xi_{n-2}$$

и проведем вычисления, аналогичные (1.59)–(1.61). Для любой балльности волнения нетрудно найти значения параметров, обеспечивающих наилучшую аппроксимации. На рис. 1.12 графически представлен пример аппроксимации спектра (1.57) для волнения 3 балла. Заметно, что точность аппроксимации выше, чем на рис. 1.11, особенно в низких частотах.

Используем теперь полученную имитацию ординаты волны для формирования трехмерной модели волнения. Будем рассматривать дискретное сеточное поле

$$Y = \{ y_{ij}^t : (i,j) \in \Omega, t \in T \},$$

где:

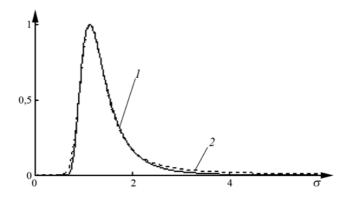


Рисунок 1.12 Стандартный спектр и аппроксимирующий спектр

 Ω – плоская $M \times N$ -сетка с единичным шагом; $T = \{1,2,...\}$ – множество значений временного индекса; y_{ii}^t – волновая ордината в точке (i,j) в момент времени t.

Образуем сначала возмущающую последовательность независимых столбцов $\overline{w}_j = \left(w_{1j}, w_{2j}, ..., w_{Mj}\right), j = 1,...,N$ с помощью описанной выше модели. Каждый столбец будет иметь спектр, близкий к спектру (1.57). Из этих столбцов сформируем первый кадр x^1 трехмерной модели волнения, как совокупность столбцов $x^1 = \left(\overline{x}_1^1, \ \overline{x}_2^1, \ ..., \ \overline{x}_N^1\right)$, порожденных векторной авторегрессионной моделью:

$$\overline{x}_1^1 = \overline{w}_1 \; , \; \overline{x}_j^1 = \rho \, \overline{x}_{j-1}^1 + \sqrt{1-\rho^2} \, \overline{w}_j \; , \; j = 2,...,N \; , \;$$

где ρ – коэффициент корреляции, близкий к единице, что обусловлено малым затуханием в направлении, параллельном гребням волн.

Осталось учесть временную динамику волнения. Это также можно сделать с помощью авторегрессионной модели

$$y^{1} = x^{1}, \ y^{t} = ry^{t-1} + \sqrt{1 - r^{2}}x^{t},$$

где r – коэффициент корреляции по времени.



Рисунок 1.13 Кадр имитации трехмерного морского волнения в 3 балла

На рис. 1.13 показан пример имитированного кадра волнения в 3 балла. Последовательность кадров $y^1, y^2,...$ является имитацией волнения водной поверхности с течением времени.

Простым преобразованием координат можно получить движение волн в произвольном направлении.

Имитированное описанным образом морское волнение может быть использовано для вычисления сил и моментов, действующих на корпус морского объекта.

1.5. Волновые модели случайных полей

В предыдущих параграфах приведено решение задачи анализа для AP и тензорных моделей СП. Принципиальные решения этой задачи имеются и для других моделей полей, но воспользоваться ими можно только в относительно простых частных случаях, так как конкретизация решения связана с громоздкими выкладками и вычислениями, например с действиями над матрицами и тензорами больших размеров и вычислением многомерных интегралов по комплексным переменным.

Еще более сложной в конструктивном отношении является задача синтеза. Вместе с тем, ее решение необходимо, например, для имитации СП с заданной КФ. В [79] рассмотрены методы синтеза модели СП с заданной КФ на основе разложения СП по некоторым базисам. Существенным недостатком таких моделей является большой объем вычислений, особенно при моделировании последовательности изображений.

Рассмотрим волновую модель СП, являющуюся обобщением ряда других моделей и позволяющую эффективно решать задачи

корреляционного анализа и синтеза [18, 23, 24, 43]. Эта модель достаточно проста и может служить основой для имитации изображений и их последовательностей с заданной КФ без увеличения числа параметров модели.

В волновой модели СП определяется равенством

$$x_{\overline{j}}^{t} = \sum_{\{k: \tau_{k} \le t\}} f((\overline{j}, t), (\overline{u}_{k}, \tau_{k}), \overline{\omega}_{k}), \qquad (1.62)$$

где:

(n+1)-мерная область определения $\{(\overline{j},t)\}$ поля может быть сеточной или непрерывной;

 $\{(\overline{u}_k, \tau_k)\}$ – дискретное поле случайных точек (ПСТ) в (n+1)-мерном непрерывном пространстве;

t и τ_k интерпретируются как время;

 $\overline{\omega}_k$ – случайный вектор параметров функции f.

Это поле можно представить как результат воздействия случайных возмущений или волн $f((\overline{j},t),(\overline{u}_k,\tau_k),\overline{\omega}_k)$, возникающих в случайных местах \overline{u}_k в случайные моменты времени τ_k и изменяющихся по заданному закону во времени и пространстве.

Выбор функции f, параметров ПСТ и $\overline{\omega}$ позволяет получить широкий класс полей, включающий в себя следующие модели.

1. Пуассоновские поля: при

$$f((\overline{j},t),(\overline{u}_k,\tau_k),\overline{\omega}_k) = \delta((\overline{j},t)-(\overline{u}_k,\tau_k)),$$

где δ – символ Кронекера и $\{(\overline{u}_k, \tau_k)\}$ – пуассоновское ПСТ.

2. Многомерный фильтрованный пуассоновский процесс: при

$$f((\overline{j},t),(\overline{u}_k,\tau_k),\overline{\omega}_k) = g((\overline{j}-\overline{u}_kt-\tau_k),\xi_k),$$

где $\{\xi_k\}$ – система скалярных CB.

Эта модель может порождать только стационарные однородные поля, а образующие волны могут отличаться друг от друга только одним параметром ξ_k .

3. Модель взвешенных сумм: она получается при волнах

$$f((\overline{j},t),(\overline{u}_k,\tau_k),\overline{\omega}_k) = g((\overline{j},t),(\overline{u}_k,\tau_k))\xi_k$$

где $\{(\overline{u}_k, \tau_k)\}$ — совокупность всех узлов сетки и g — соответствующие веса случайных величин ξ_k .

4. *Модель случайных блужданий*: ПСТ описывает случайное блуждание (возможно, с возникновением и исчезновением) совокупности волн, а выбор $\overline{\omega}_k$ определяет динамику формы и интенсивности волн. Такие модели можно применить, например, для имитации изображения движущихся облаков.

Рассмотрим частный случай волновой модели, для которой корреляционные задачи анализа и синтеза легко решаются. Пусть

$$f((\overline{j},t),(\overline{u}_k,\tau_k),\overline{\omega}_k) = g(\rho_k / R_k) \exp(-\mu/|t-\tau_k|)\xi_k, \qquad (1.63)$$

где:

 Π CT — пуассоновское с постоянной плотностью λ ;

$$\rho_k = \left| \overline{j} - \overline{u}_k \right| - \text{расстояние между } \overline{j} \text{ и } \overline{u}_k;$$

 $\{R_k\}$ — система независимых неотрицательных одинаково распределенных CB с ПРВ $w(\alpha)$;

 $\{\xi_k\}$ – система независимых одинаково распределенных СВ.

Волны неподвижны, независимы, имеют сферические сечения по пространству и экспоненциально затухают со временем; система $\{\mathcal{E}_k\}$ определяет интенсивность волн, а $\{R_k\}$ — их пространственный масштаб. Порождаемое поле X, очевидно, стационарно, однородно, имеет нулевое среднее и изотропную по пространству $K\Phi$:

$$V(\rho,t) = M[x_{(-\rho/2,0,0,\dots,0)}^t x_{(\rho/2,0,0,\dots,0)}].$$

Учитывая, что в данном случае слагаемые в (1.62) не коррелированы и элементарное событие $\Delta A = \{$ в элементе $\Delta V = \Delta_{j_1} \Delta_{j_2}.....\Delta_{j_n} \Delta \tau$ возникла точка ПСТ, которой соответствует волна с пространственным масштабом α из элемента $\Delta \alpha \}$ имеет вероятность $P(\Delta A) = \lambda \Delta V w(\alpha) \Delta \alpha$, выразим (1.63) через интеграл по переменным τ , α , $j_1,...,j_n$. После интегрирования по τ получаем

$$V(\rho,t) = \frac{\lambda}{2\mu} e^{-\mu t} \int_{0-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{\sqrt{(j_1 - \rho/2)^2 + j_2^2 + ... + j_n^2}}{\alpha}\right) \times g\left(\frac{\sqrt{(j_1 + \rho/2)^2 + j_2^2 + ... + j_n^2}}{\alpha}\right) w(\alpha) dj_1...dj_n d\alpha.$$

Этот (n+1)-кратный интеграл сводится к однократному

$$V(\rho,t) = \frac{c^2 \pi^{n/2} \lambda}{2^{n+1}} e^{-\mu t} \int_0^\infty \alpha^n \exp\left(-\frac{\rho^2}{\alpha^2}\right) w(\alpha) d\alpha , \qquad (1.64)$$

если выбрать

$$g(y) = c \exp(-2y^2)$$
. (1.65)

При $\rho = t = 0$ из (1.64) находим дисперсию поля

$$\sigma_n^2 = \frac{c^2 \pi^{n/2} \lambda}{2^{n+1} \mu} M[R^n], \qquad (1.66)$$

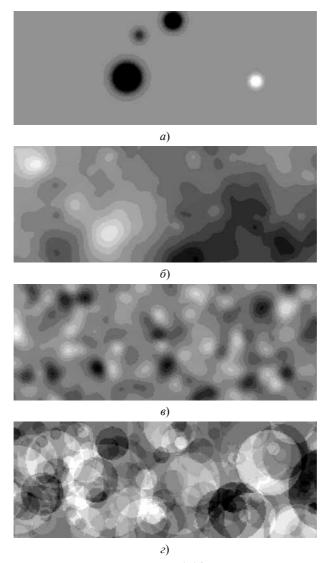
пропорциональную плотности λ ПСТ, эффективному интервалу $1/\mu$ затухания волн и среднему значению n-й степени масштаба R.

Имитация дискретного поля на n-мерной сетке $\{\overline{j}\}$ с шагом квантования Δt по времени на основе модели рассмотренного частного вида может быть осуществлена с помощью следующего алгоритма. В начальный момент $t_0=0$ значения поля во всех узлах равны нулю. В каждый последующий момент $t_m=m\Delta t$ на непрерывном пространстве или на сетке, несколько перекрывающей $\{\overline{j}\}$, формируется пуассоновское ПСТ с плотностью $\lambda \Delta t$. В каждой сформированной точке ПСТ \overline{u}_k разыгрываются СВ ξ_k и R_k , после чего производится преобразование

$$x_{\bar{j}}^{t_{m}} = x_{\bar{j}}^{t_{m-1}} \exp(-\mu \cdot \Delta t) + \sum_{k} g(\rho_{k} / R_{k}) \xi_{k}$$
 (1.67)

всех значений поля на сетке $\{\overline{j}\}$. При таком моделировании в (1.67) можно учитывать только достаточно большие по сравнению с уровнем квантования слагаемые. Достоинством такого алгоритма является его рекуррентность, что позволяет легко реализовать имитацию поля на ЭВМ.

На рис. 1.14 приведена реализация полей, полученных с помощью описанного алгоритма при различных значениях входящих в модель параметрах. На рис. 1.14,a показан первый кадр поля, на котором отчетливо видны четыре волны с квадратично экспоненциальным сечением. У светлой волны значение случайного коэффициента ξ_k в (1.63) было положительно, а у трех темных волн оказались отрицательные значения коэффициентов ξ_k .



 $\begin{array}{c} \textbf{Рисунок 1.14} \\ \textbf{Реализация волновой модели:} \\ a-\text{первые волны; } \textit{δ-- установившийся процесс;} \\ \textit{ϵ-- постоянный масштаб волн; ϵ-- кусочно-постоянные волны} \end{array}$

С течением времени волн становится все больше, они налагаются друг на друга, создавая сложное плавное изображение. На рис. 1.14,6 показан двадцатый кадр этого процесса. По прошествии временного интервала порядка $m\Delta t = 1/\mu$ характер изображения визуально практически не меняется — процесс формирования поля устанавливается. Происходит это потому, что старые волны затухают при многократном умножении на $\exp(\mu \Delta t)$ в (1.67).

Основной вклад в формирование изображения вносят волны, возникающие на последних $m=1/\mu\Delta t$ кадрах. Текстура изображений визуально не изменяется, а дисперсия слабо варьируется. Выборочная КФ на больших изображениях очень близка к ее теоретическому виду, что свидетельствует о приемлемости описанного способа имитации изображений с КФ заданного вида.

Рис. 1.14, ϵ получен при вырожденном распределении (R=5), поэтому изображение выглядит проще по сравнению с предыдущим, так как состоит из волн, отличающихся друг от друга только интенсивностью. На нем имеются образования примерно одинаковых размеров, а на рис. 1.14, ϵ 0 присутствуют разномасштабные образования.

Если в (1.62) функция g(y) кусочно-постоянна, то и реализации поля будут кусочно-постоянными. Пример реализации такого поля для функции g(y)=1 при $|y|\le 1$ и g(y)=0 при |y|>1 приведен на рис. 1.14, ε .

Изображение является результатом наложения кругов различных диаметров и случайных интенсивностей. Поэтому на границах кругов наблюдаются контрастные переходы.

Рассмотрим теперь решение корреляционных задач анализа и синтеза. Из (1.64) следует, что построенное поле имеет экспоненциальную НКФ $e^{-\mu t}$ по времени и НКФ

$$r(\rho) = \frac{1}{M[R^n]} \int_0^\infty \alpha^n x p(-\rho^2 / \alpha^2) w(\alpha) d\alpha$$
 (1.68)

по пространству. Таким образом, при решении задачи анализа, когда ПРВ $w(\alpha)$ задана, искомая НКФ может быть найдена аналитически или численным интегрированием.

При решении задачи синтеза, когда НКФ $r(\rho)$ задана, выражение (1.68) следует рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной ПРВ $w(\alpha)$.

Выполняя в (1.68) замену $x = a^{-2}$, получаем выражение НКФ

$$r(\rho) = \frac{1}{2M[R^n]} \int_0^\infty x^{-\frac{n+3}{2}} w(x^{-\frac{1}{2}}) \exp(-\rho^2 x) dx$$
 (1.69)

через преобразование Лапласа функции $f(x) = x^{-(n+3)/2}w(x^{-1/2})$. Из (1.69) следует, что если f(x) и $F(\rho)$ — оригинал и изображение при преобразовании Лапласа, то, с точностью до постоянного множителя,

$$r(\rho) = F(\rho^2)$$
 и $w(\alpha) = \alpha^{n+3} f(\alpha^{-2})$.

Это обстоятельство позволяет использовать теорию преобразования Лапласа для решения поставленных задач анализа и синтеза. Например, при равномерной ПРВ $w(\alpha)$ на отрезке [a;b] получаем

$$r(\rho) = (n+1)\rho^{n+1} \times \left[\Gamma\left(-\frac{n+1}{2}, \rho^2 b^{-2}\right) - \Gamma\left(-\frac{n+1}{2}, \rho^2 a^{-2}\right) \right] / 2(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

При

$$w(\alpha) = 2a^{2k+n}\alpha^{-(2k+n+1)} \exp(-a^2/\alpha^2) / \Gamma(k+n/2)$$

находим

$$r(\rho) = [a^2/(a^2 + \rho^2)]^k$$

а при

$$w(\alpha) = 2a^n b^n \alpha^{-(n+1)} \times \times [\exp(-a^2 / \alpha^2) - \exp(-b^2 / \alpha^2)] / (b^2 - a^2) \Gamma(n/2)$$

имеем

$$r(\rho) = [\ln((b^2 + \rho^2)/(a^2 + \rho^2))]/[\ln(b^2/a^2)].$$

Поскольку найти аналитическое решение задачи синтеза удается не всегда, рассмотрим метод ее приближенного решения.

Из (1.68) следует, что при вырожденном распределении ($R=\alpha={\rm const}$) получаем КФ $\exp(-\rho^2/\alpha^2)$. Пусть теперь задана произвольная невозрастающая НКФ $r(\rho)$. Аппроксимируем ее с достаточной точностью суммой гауссоид с положительными коэффициентами:

$$r(\rho) \approx h(\rho) = \sum_{i} q_{i} \exp(-\rho^{2}/\alpha_{i}^{2}), \qquad (1.70)$$

где $\sum_{i} q_{i} = 1$, так как r(0) = 1.

Тогда при дискретном распределении

$$P(R = \alpha_i) = k^{-1}q_i/\alpha_i^n ,$$

где $k = \sum q_i / \alpha_i^n$, порождаемое поле будет иметь НКФ, в точности равную $h(\rho)$.

Построенная модель позволяет приближенно решать задачу синтеза для заданной монотонной НКФ с помощью только выбора распределения вероятностей масштаба R.

Реализация немонотонной КФ

Существенным ограничением в приведенном решении задачи синтеза является предположение о монотонности заданной КФ $r(\rho)$, так как в противном случае аппроксимация (1.70) немонотонной функции убывающими гауссоидами становится невозможной. Для того чтобы КФ порождаемого СП была немонотонной, нужно использовать немонотонные по пространству волны [52, 89, 90].

Для этого сначала возьмем вместо (1.65) функцию

$$g(y) = \sum_{k=1}^{K} c_k \exp(-\beta_k y^2), \qquad (1.71)$$

т.е. каждая волна будет являться суммой K гауссоид. Тогда при вырожденном распределении ($R=\alpha={\rm const}$) получим вместо (1.70) НКФ

$$r(\rho) = B \sum_{k,l=1}^{K} \frac{c_k c_l}{(\beta_k + \beta_l)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\beta_k \beta_l}{\beta_k + \beta_l} \frac{\rho^2}{\alpha^2}\right), \tag{1.72}$$

где
$$B = \left(\sum_{k,l=1}^{K} \frac{c_k c_l}{(\beta_k + \beta_l)^{n/2}}\right)^{-1}$$
 — нормирующий множитель.

В частности, при n=2, K=2, т.е. для двумерного СП с волнами в виде суммы двух гауссоид, получаем НКФ в виде суммы трех гауссоид:

$$r(\rho) = B\left(\frac{c_1^2}{2\beta_1} \exp\left(-\frac{\beta_1 \rho^2}{2\alpha^2}\right) + \frac{2c_1c_2}{\beta_1 + \beta_2} \exp\left(-\frac{\beta_k \beta_l \rho^2}{(\beta_k + \beta_l)\alpha^2}\right) + \frac{c_2^2}{2\beta_2} \exp\left(-\frac{\beta_2 \rho^2}{2\alpha^2}\right)\right)$$

с нормирующим множителем $B = \left(\frac{c_1^2}{2\beta_1} + \frac{2c_1c_2}{\beta_1 + \beta_2} + \frac{c_2^2}{2\beta_2}\right)^{-1}$. Например, при $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $\beta_1 = 0$, 4, $\beta_2 = 0$, 2 имеем НКФ

$$r(\rho) = 6\exp\left(-\frac{0.2}{\alpha^2}\rho^2\right) - 8\exp\left(-\frac{2}{15\alpha^2}\rho^2\right) + 3\exp\left(-\frac{0.1}{\alpha^2}\rho^2\right),$$
(1.73)

график которой показан на рис. 1.15.

Для нахождения НКФ при невырожденном распределении коэффициента масштаба нужно в (1.69) вместо $\exp(-\rho^2/\alpha^2)$ подставить взвешенную сумму гауссоид (1.71).



Рисунок 1.15 График нормированной корреляционной функции (1.73)

Более широкий класс КФ можно получить при использовании смещенных гауссоид:

$$g(y) = \sum_{k=1}^{K} c_k \exp(-\beta_k (y - a_k)^2),$$

т.е. имитированное изображение будет состоять из «кольчатых» пятен. Тогда НКФ примет вид

$$B\sum_{k,l=1}^{K} \frac{c_k c_l}{(\beta_k + \beta_l)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\beta_k \beta_l}{\beta_k + \beta_l} \frac{(\rho + a_l - a_k)^2}{\alpha^2}\right). \tag{1.74}$$

Выражение (1.72) есть частный случай (1.74) при нулевых смещениях $a_k=0$. Если в (1.74) взять одинаково смещенные гауссоиды ($\beta_k=\beta$), то получаем

$$B\sum_{k,l=1}^{K}c_kc_l\exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha^2}(\rho+a_l-a_k)^2\right).$$

В выражении (1.74) размерность СП влияет только на нормирующий множитель B. При равноотстоящих смещениях $a_k = (k-1)a$ имеем

$$g(y) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k \exp(-\beta (y - ka)^2),$$

что порождает СП с НКФ

$$B\sum_{k,l=0}^{K-1} c_k c_l \exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha^2} (\rho - (k-l)a)^2\right). \tag{1.75}$$

В этом случае волна (1.56) и НКФ (1.75) имеют одинаковую структуру, они состоят из гауссоид с одинаковыми кратными смещениями.

Рассмотрим частный случай, когда $c_k = (-1)^k$, $\alpha = 1$:

$$g(y) = \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k \exp(-\beta (y - ka)^2), \qquad (1.76)$$

$$r(\rho) = B \sum_{k,l=0}^{K-1} (-1)^{k+l} \exp\left(-\frac{\beta}{2} (\rho - (k-l)a)^2\right). \tag{1.77}$$

При достаточно большом смещении a графики сечения волны (1.76) и НКФ (1.77) имеют вид, показанный на рис. 1.16.

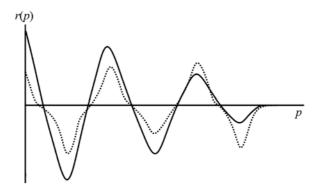


Рисунок 1.16

Графики сечения волны (1.76) (I) и соответствующей НКФ (1.77) при K=6 (2; шесть гауссоид), a=10. Пересечения графиков с осью абсцисс происходят в точках, примерно кратных a

Пусть задана НКФ $r(\rho)$, тогда требуется подобрать параметры $K, \alpha_k, \beta_k, c_k$, при которых порождаемое СП имеет НКФ (1.74), достаточно близкую к заданной $r(\rho)$. Аналитически решить эту задачу удается только в некоторых частных случаях, когда и сама $r(\rho)$ задана аналитическим выражением. Обычно же $r(\rho)$ оценена по конкретным изображениям и поэтому задана таблично на системе точек. Поэтому задачу синтеза будем решать приближенно, а именно: будем подбирать параметры модели, минимизируя средний квадрат ошибки аппроксимации НКФ.

Пример аппроксимации и имитации

Пусть требуется построить волновую модель изображения на плоскости с НКФ $r(\rho) = \text{sinc}(0,3\rho)$ на отрезке [0; 18] с шагом 0,25 (рис. 1.17). Для аппроксимации требуется определить число K смещенных гауссоид, которое подбиралось опытным пу-

тем постепенным увеличением. Оказалось, что достаточно хорошее приближение достигается при шести гауссоидах (рис. 1.17), максимальная ошибка аппроксимации равна 0,005017. Дальнейшее увеличение количества гауссоид можно считать нецелесообразным. Этот и другие примеры показывают, что достаточно хорошая аппроксимация достигается при количестве гауссоид, равном числу экстремумов НКФ на отрезке аппроксимации (на рис. 1.17 их шесть).

На рис. 1.18 приведен пример имитации изображения с помощью описанной модели. На имитированных изображениях была вычислена выборочная КФ, которая оказалась достаточно близкой к заданной КФ и ее аппроксимации.

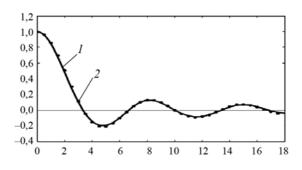


Рисунок 1.17 График НКФ $r(\rho) = \text{sinc } (0,3\rho) (1)$ и ее аппроксимации (2) с помощью шести гауссоид

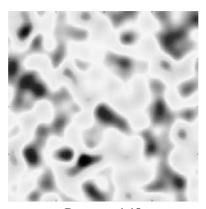


Рисунок 1.18 Реализация случайного поля на основе волновой модели

Отметим, что волновая модель может порождать и анизотропные поля. Для этого волны должны иметь форму, отличную от сферической. Если, например, в (1.63) положить

$$\rho_k = \sqrt{(\overline{j} - \overline{u}_k)^T A(\overline{j} - \overline{u}_k)} ,$$

где A — положительно определенная матрица, то волны будут иметь эллипсоидальную форму с заданной ориентацией.

Рассмотренному выше случаю сферических волн соответствует A=E. В общем случае в формулах (1.64) и (1.66) добавится дополнительный множитель ($\det A$)^{-1/2}, равный произведению полуосей эллипсоида $\overline{j}^T A \overline{j} = 1$. При этом все точки поля на эллипсоиде $\sqrt{\overline{j}^T A \overline{j}} = \rho$ будут иметь ковариацию (1.64) с его центром, т.е. поле будет иметь эллипсоидальную анизотропию.

1.6. ВЕКТОРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Информационное СП может быть векторным. Например, поле скоростей, спектрозональные (цветные) изображения, поле межкадровых смещений изображений и т.д. Скалярное СП можно описать как векторное для упрощения уравнений этого описания. Например, мы уже применяли такой подход для уменьшения числа слагаемых в правой части АР модели (1.27) до размерности СП в векторной полиокружности модели (1.29).

Будем рассматривать векторные СП $X = \{\overline{x}_{\overline{i}} : \overline{i} \in \Omega\}$, заданные на конечной или бесконечной целочисленной n-мерной сетке Ω . Значения СП есть $\overline{x}_{\overline{i}} = (x_{\overline{i}1}, x_{\overline{i}2}, ..., x_{\overline{im}})^T$ — векторы размерности m. В целом СП $X = \{\overline{x}_{\overline{i},k} : \overline{i} \in \Omega, \ k = \overline{1,m}\}$ можно рассматривать и как совокупность скалярных СВ, которая может быть определена различными способами.

Авторегрессионные модели векторных случайных полей

Рассмотрим линейную АР модель векторного СП вида

$$\overline{x}_{\overline{i}} = \sum_{\overline{j} \in D} A_{\overline{j}} \overline{x}_{\overline{i} + \overline{j}} + B \overline{\xi}_{\overline{i}} , \qquad (1.78)$$

где:

 $A_{\overline{i}}$ и B – квадратные матрицы;

 $\xi = \{\xi_{\overline{i}}\}$ — обновляющее стандартное СП, состоящее из независимых векторов с независимыми компонентами;

D – множество индексов.

Если сетка Ω ограничена (хотя бы частично), то нужно еще задать начальные условия, позволяющие воспользоваться уравнением (1.78). При подходящих начальных условиях (или на неограниченной сетке) порождаемое поле однородно, т.е. его КФ $V_x(\overline{i}\,,\overline{j})=M[\overline{x}_{\overline{i}}\,\overline{x}_{\overline{j}}^T]$ зависит только от взаимного расположения узлов \overline{i} и $\overline{j}:V_x(\overline{i}\,,\overline{j})=V_x(0,\overline{j}-\overline{i})$. Поэтому будем использовать обозначение

$$V_x(\overline{i}) = V_x(0,\overline{i})$$
.

Отметим, что

$$V_{x}(-\overline{i}) = V_{x}^{T}(\overline{i}).$$

Можно показать, что КФ порожденного поля может быть найдена из выражения, аналогичного случаю скалярных СП:

$$V_{x}(\overline{i}) = \frac{1}{(2\pi i)^{n}} \times \int_{C_{n}} \left[E - \sum_{\overline{j} \in D} \overline{z}^{\overline{j}} A_{\overline{j}} \right]^{-1} BB^{T} \left[E - \sum_{\overline{j} \in D} \overline{z}^{-\overline{j}} A^{T}_{\overline{j}} \right]^{-1} \overline{z}^{-\overline{i} - \overline{1}} d\overline{z} , \qquad (1.79)$$

где:

i — мнимая единица;

$$\overline{z}^{\overline{j}}=(z_1,...,z_n)^{(j_1,...,j_n)}=z_1^{j_1}z_2^{j_2}...z_n^{j_n}\;;$$

$$\overline{1} = (1, ..., 1)$$
; $d\overline{z} = dz_1 dz_2 ... dz_n$;

 $C_n = \{|z_1| = 1, ..., |z_n| = 1\}$ — единичная полиокружность (прямое произведение n единичных окружностей);

E — единичная матрица.

Таким образом, правая часть (1.79) есть n-кратный интеграл по n комплексным переменным z_1, \ldots, z_n , причем интегрирование

каждого элемента подынтегральной матрицы (являющейся функцией n комплексных переменных) проводится независимо от остальных элементов. Так что в (1.79) после вычисления подынтегральной матрицы нужно вычислить много интегралов, что представляет собой громоздкую операцию.

Авторегрессионные модели векторных полей Хабиби

Векторным аналогом скалярной КФ $V_x(i,j) = M \left[x_{ij} x_{00} \right] = \delta^2 \rho_1^{|i|} \rho_2^{|j|}$ модели (1.30) является КФ

$$V_x(i,j) = M[\overline{x}_{ij}\overline{x}_{00}^T] = A_1^{i+}A_2^{j+}VA_1^{Ti-}A_2^{Tj-}, \qquad (1.80)$$

где:

 $A_{\rm l}$ и $A_{\rm 2}$ — перестановочные между собой матрицы, все собственные числа которых меньше единицы;

$$V = V_x(0,0)$$
;
 $i+= \max(0,i)$; $i-= \max(0,-i)$.

Матрицы A_1 и A_2 являются своего рода матричными коэффициентами корреляции на единичном расстоянии по осям коорлинат.

Векторное СП с КФ (1.80) может быть задано на квадранте с помощью AP уравнений типа модели Хабиби:

$$\overline{x}_{00} = W\overline{\xi}_{00},
\overline{x}_{i0} = A_{1}\overline{x}_{i-1,0} + U_{1}\overline{\xi}_{i0}, \qquad i \ge 1,
\overline{x}_{0j} = A_{2}\overline{x}_{0,j-1} + U_{2}\overline{\xi}_{oj}, \qquad j \ge 1,
\overline{x}_{ij} = A_{1}\overline{x}_{i-1,j} + A_{2}\overline{x}_{i,j-1} - A_{1}A_{2}\overline{x}_{i-1,j-1} + U\overline{\xi}_{ij}, \quad i \ge 1, j \ge 1,$$
(1.81)

где матрицы W, U_1 , U_2 и U должны удовлетворять условиям:

$$\begin{split} WW^T &= V \;,\; U_1U_1^T = V - A_1VA_1^T \;,\\ UU^T &= V - A_1VA_1^T - A_2VA_2^T + (A_1A_2)V(A_1A_2)^T \;,\\ U_2U_2^T &= V - A_2VA_2^T \;,\;$$
для получения КФ (1.80).

Модель (1.81) легко обобщается на многомерный случай с $K\Phi$, аналогичной (1.80).

Волновые модели векторных случайных полей

Волновые модели скалярных СП могут быть обобщены на случай векторных полей. Наиболее простым частным случаем такой модели является модель с волнами вида

$$\overline{f}((\overline{j},t),(\overline{u}_k,\tau_k),\overline{w}_k) = g((\overline{j},t),(\overline{u}_k,\tau_k),\overline{w}_k)G\overline{\xi}_k, \qquad (1.82)$$

гле:

g(*) – скалярная функция;

G — матрица;

векторы $\overline{\xi}_k$ независимы между собой и имеют независимые стандартные компоненты.

В этом случае векторы одной волны коллинеарны случайному вектору $G\overline{\xi}_k$, т.е. возмущающее влияние каждой волны состоит в прибавлении к имеющимся векторам поля однонаправленных векторов. Такое поле имеет К Φ вида

$$V_x(*) = GV_f(*)G^T,$$

где $V_f(*)$ — КФ скалярного волнового поля, порождаемого функцией (1.82) при замене в ней $G\overline{\xi}_k$ на стандартные скалярные ξ_k с тем же совместным распределением, что и у компонент вектора $\overline{\xi}_k$.

Более сложные модели можно получить, взяв в (1.82) векторную функцию

$$\overline{f}(*) = G((\overline{j},t),(\overline{u}_k,\tau_k),\overline{w}_k)\overline{\xi}_k$$

где G(*) – случайный или переменный матричный коэффициент.

В этом случае каждая волна может состоять из векторов, направленных по-разному в различных точках пространства, например, в виде вихря. Тогда порождаемые поля могут иметь сложную структуру и описывать более широкий спектр реальных случайных векторных полей.

Существенно, что эта модель описывает последовательность кадров, что позволяет моделировать динамические векторные случайные процессы, например параметры переменных геометрических искажений многомерных изображений или поле скоростей движения жидкостей и газов.

Тензорные модели векторных и более сложнозначных случайных полей

Тензорная модель (1.10) или (1.11) пригодна для описания последовательностей скалярных кадров, определенных на сетке Ω любой размерности. Для представления последовательности векторнозначных кадров можно использовать ту же модель, увеличив размерность Ω на единицу. Эта дополнительная размерность используется для компонент векторов моделируемого векторного СП. Такая модель может быть использована, например, для описания последовательности цветных изображений. В этом случае модель определяет вектор цвета в каждом пикселе.

Аналогичный прием может быть использован для построения моделей и более сложных полей, значениями которых являются m-мерные матрицы или тензоры ранга m. Для этого размерность сетки Ω увеличивается на m единиц. Например, таким способом можно описать СП тензоров МКГТ.

1.7. СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Все рассмотренные в предыдущих разделах изображения и СП были заданы на прямоугольных сетках некоторой размерности. Например, в двумерном случае изображение имеет привычную плоскую форму, т.е. занимает часть плоскости. В некоторых практически важных задачах изображения могут быть заданы на поверхностях другого вида, например, сферическое изображение Земли или цилиндрического вала вращения.

Описание моделей таких изображений существенным образом отличается как видом пространственной сетки, так и способом задания корреляционных связей. Рассмотрим особенности представления авторегрессионных изображений на цилиндре и сфере, а также волновые модели на почти произвольных поверхностях.

Авторегрессионная модель СП на цилиндре

Рассмотрим цилиндрическое изображение, например, изображение вала вращения. Если его разрезать вдоль и развернуть, то оно превращается в прямоугольное. На исходном цилин-

дрическом изображении точки вдоль линии разреза были рядом, поэтому отсчеты в них высококоррелированы. А на разрезанном изображении эти точки находятся на противоположных краях, поэтому концы строк высококоррелированы с их началами. Такие изображения не описываются рассмотренными моделями на прямоугольниках, так как у этих моделей корреляционные связи ослабляются с ростом расстояния между отсчетами, поэтому точки изображения на концах строк не имеют требуемой высокой корреляции, например, изображение, имитированное с помощью модели Хабиби и разрезанное вдоль оси цилиндра (рис. 1.19). На этом рисунке видно, что первые и последние столбцы прямоугольного изображения существенно различаются, поэтому при склейке этого изображения в цилиндр на стыке будут большие скачки яркости.

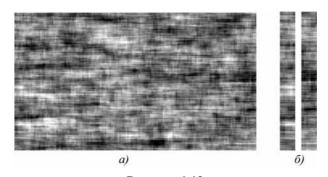


Рисунок 1.19 Изображение, имитированное при помощи модели Хабиби:

а – имитированное при помощи модели жаоной.
 а – имитированное изображение; б – первые и последние пять столбцов изображения а

Для приближения модели к реальным цилиндрическим изображениям рассмотрим спиралевидную сетку на цилиндре, показанную на рис. 1.20. Строки этой сетки представляют собой витки спирали (винтовой линии).

Для описания изображения, заданного на этой сетке, применим аналог авторегрессионной модели Хабиби [77, 91]:

$$x_{k,l} = \rho x_{k,l-1} + r x_{k-1,l} - \rho r x_{k-1,l-1} + \beta \xi_{k,l}, \qquad (1.83)$$

где:

k – номер витка спирали;

l – номер узла в витке.

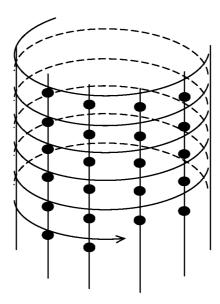


Рисунок 1.20

Спиралевидная сетка отсчетов цилиндрического изображения

При этом $l = \overline{0, T-1}$;

$$x_{k,l} = x_{k+1,l-T}$$
 при $l \ge T$;

T — период, т.е. число точек в одном витке. Отметим, что в модели (1.83) сетка может рассматриваться и как обычная цилиндрическая, т.е. как последовательность окружностей.

Полученная модель цилиндрического изображения может быть представлена в эквивалентном виде как модель случайного процесса, представляющего собой развертку изображения вдоль спирали:

$$x_{n} = \rho x_{n-1} + r x_{n-T} - \rho r x_{n-T-1} + \beta \xi_{n}, \qquad (1.84)$$

где n = kT + l.

Очевидно, при значениях r, близких к единице, соседние строки изображения (витки спирали) будут незначительно различаться между собой, поэтому эту модель можно использовать для описания и имитации квазипериодических сигналов, например речевых.

Можно показать, что КФ модели (1.84) имеет вид

$$V(n) = \beta^{2} \left(\frac{1}{(1-r^{2})T} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{z_{k}}{(1-\rho z_{k})(z_{k}-\rho)} z_{k}^{n} + \frac{s}{(1-\rho^{2})(1-rs)(s-r)} \rho^{n} \right),$$

$$(1.85)$$

где $z_k = \sqrt[T]{r}e^{i\frac{2\pi}{T}k}$ и $s = \rho^T$.

В частности, при n = kT получаем

$$V(kT) = \frac{\beta^2}{(1-\rho^2)(1-r^2)(1-sr)(r-s)} \Big((1-s^2)r^{k+1} - (1-r^2)s^{k+1} \Big).$$
(1.86)

Из (1.86) при k = 0 находим дисперсию

$$\sigma^2 = \frac{\beta^2 (1+rs)}{(1-\rho^2)(1-r^2)(1-rs)}$$

и другую форму записи КФ:

$$V(kT) = \sigma^2 r^k + \frac{s(r^k - s^k)}{(1 - \rho^2)(r - s)}.$$

При $0 \le l \le T$ получаем

$$V(l) = \sigma^2 \rho^l + \frac{r(\rho^{T-l} - \rho^{T+l})}{(1 - \rho^2)(r - s)(1 - rs)}.$$

Заметно, что КФ модели (1.72) является затухающе-периодической (рис. 1.21,a). Значения функции постепенно убывают с увеличением номера периода, т.е. с увеличением расстояния значения процесса становятся менее коррелированными. То же самое наблюдается и на графике КФ для модели Хабиби (рис. 1.21, δ). Однако КФ модели Хабиби разрывная, так как КФ внутри строки монотонно убывает.

На рис. 1.22, a показано изображение, имитированное с помощью описанной модели и разрезанное вдоль оси цилиндра. Первые и последние пять столбцов этого изображения (рис. 1.22, δ) почти одинаковы, так как на цилиндре они находятся рядом и между их отсчетами имеется сильная корреляция.

На рис. 1.23 представлен график развертки реализации, полученной с помощью модели (1.71). Визуально заметна квазипериодичность этой реализации.

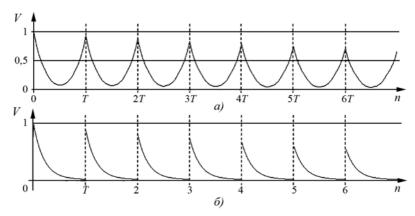


Рисунок 1.21 Графики КФ развертки изображения: a — модель (1.84); δ — модель Хабиби

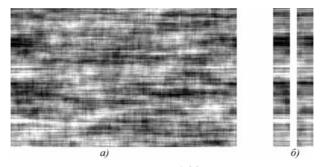


Рисунок 1.22 Изображение, имитированное моделью (1.71): a — развертка изображения, δ — первые и последние пять столбцов изображения a

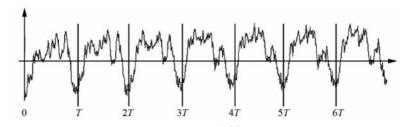


Рисунок 1.23 График развертки цилиндрического изображения в процесс

В [91] эта модель использована для представления и имитации вокализованных звуков речи и музыкальных звуков, имеющих квазипериодический характер. Прослушивание этих реализаций как аудиосигналов показало их схожесть с гласными звуками речи и звуками музыкальных инструментов в зависимости от выбора значений параметров модели.

Авторегрессионная модель случайного поля на сфере

Аналогично спиралевидной модели СП на цилиндре можно построить авторегрессионные модели и на других поверхностях. Рассмотрим случай сферы. Сначала на сфере зададим некоторую спираль с точками. Возьмем на сфере радиусом R аналог спирали Архимеда: $\theta = \pi t$, где $\theta \in [0;\pi]$ — полярный угол (широта, отсчитываемая от «Северного полюса»); $t \in [0;1]$ — параметр; $\lambda = 2\pi Kt$ — долгота; K — целое число.

При возрастании t от 0 до 1 точка с координатами

$$(x, y, z) = (R\cos(2\pi Kt), R\sin(2\pi Kt), R\cos(\pi t))$$

опишет на сфере спираль с K витками (рис. 1.24,a). Расстояние между двумя соседними витками равно $L=\pi R/K$. На этой спирали возьмем точки на равных расстояниях L друг от друга, начиная с «Северного полюса», т.е. с t=0, что дает примерно равномерную сетку отсчетов на сфере.

Далее становится возможным применение авторегрессионной модели, например, когда значение в очередной точке спирали зависит от значений в предыдущей точке и от значений в нескольких точках предыдущего витка. Однако коэффициенты этой модели уже не будут постоянными из-за изменяющейся геометрии расположения точек при движении по спирали, что усложняет модель.

К сожалению, на сфере нельзя задать сетки отсчетов с равномерной плотностью, как это можно было сделать на цилиндре. Поэтому и авторегрессионные модели на сфере получаются более сложными для анализа, синтеза и технической реализации, так как геометрия расположения точек непостоянна.

Чтобы упростить модель, возьмем на сфере вспомогательную спираль с тем же количеством витков, но с большим одинаковым количеством точек на всех витках. Тогда сетку отсчетов можно считать приблизительно прямоугольной, а коэффициенты авторегрессионной модели можно выбирать постоянными в пределах одного витка (в зависимости от длины этого витка). А именно, меняться будет только корреляция СП вдоль витка (чем длиннее виток, тем меньше корреляция между соседними точками). Значения изображения в заданной системе точек на поверхности определяются интерполяцией из построенной вспомогательной спирали. Полученная приближенная модель оказывается значительно проще и дает изображения, близкие по своим характеристикам к требуемым.

На рис. 1.24 показан пример имитации изображения на сфере с помощью спиралевидной модели, аналогичной (1.83). Естественно, что полученное изображение вблизи экватора похоже по структуре на изображения, генерируемые моделью Хабиби — сильная корреляция по меридианам и параллелям. На полюсах меридианы сходятся, поэтому там просматривается радиально-кольцевая структура изображения.

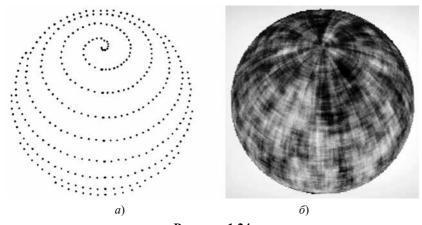


Рисунок 1.24 Спиралевидная сетка на сфере (*a*) и имитированное изображение (б)

Волновые модели СП на произвольной поверхности в виде сечений

Рассмотренную выше авторегрессионную модель изображения на цилиндре удалось реализовать и проанализировать потому, что на этой поверхности существует простая регулярная сетка отсчетов. Это, видимо, единственный в своем роде случай. На других же поверхностях может не быть сеток с постоянной конфигурацией и размером ячеек, удобных для авторегрессионного представления изображений. Их нет даже на сфере, несмотря на ее симметричность. Построение моделей СП непосредственно на поверхностях сложно в анализе, синтезе и реализации. Поэтому приходится находить другие методы задания СП на поверхностях. Представляется перспективным следующий подход [52, 89].

Пусть S — произвольная поверхность. Для задания СП X на ней можно применить простой прием: взять некоторое случайное поле Z в пространстве P, содержащем S, и принять за отсчеты X в точках поверхности S значения пространственного поля Z в этих точках. Другими словами, X есть сечение поля Z поверхностью S.

При этом можно использовать любую модель СП в пространстве. Однако следует учесть, что необходимо получать отсчеты именно в точках поверхности S.

Применение авторегрессионной модели для построения СП на поверхностях требует вычисления значений изображения во всех точках сетки, поэтому при имитации изображения на поверхности будет вычислено и не использовано большое количество значений пространственного изображения. Необходима также интерполяция СП в точки поверхности с дробными координатами. Кроме того, синтез авторегрессионных моделей с заданной КФ очень сложен, что препятствует построению изображений на поверхностях с заданной КФ.

На рис. 1.25 приведен пример сечения трехмерного авторегрессионного СП с факторизуемой КФ гиперболическим параболоидом. На изображении заметны гиперболы в сечениях, перпендикулярных оси OZ, и параболы в сечениях, перпендикулярных другим осям, что вполне соответствует свойствам этой фигуры.

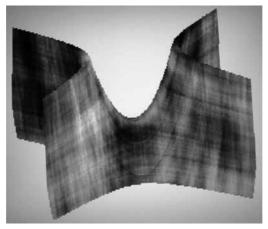


Рисунок 1.25 Сечение авторегрессионного СП гиперболическим параболоидом

Более удобна для построения изображений на поверхностях волновая модель. В этой модели отсчеты могут быть сформированы только в нужных точках с любыми координатами (в нашем случае — в наборе точек заданной поверхности). Задача корреляционного синтеза для этой модели решается сравнительно легко. Поэтому нетрудно построить модель изображения на поверхности с заданной КФ.

Следует учесть, что КФ волновой модели есть функция евклидового расстояния между точками пространства, а на поверхности КФ может быть задана как функция расстояния по геодезической линии. В этом случае КФ, заданную на поверхности, следует пересчитать в КФ по евклидовому расстоянию.

Отметим, что применение многомерной волновой модели делает возможным представление и имитацию изображений на гиперповерхностях любой размерности, так как волновая модель может быть реализована на пространстве произвольной размерности.

Рассмотрим в качестве примера имитацию рельефа по данным каталога лунных точек ULCN 2005, состоящего из 272 931 точки на поверхности Луны, полученных по данным космических миссий и земным наблюдениям. По этим данным сначала методом наименьших квадратов был построен аппроксимирующий эллипсоид. Отклонения высот из каталога рельефа от этого эллипсоида с нулевым средним были приняты за отсчеты изобра-

жения, заданного на эллипсоиде. По полученным данным была оценена КФ, зависящая от евклидова расстояния между точками на эллипсоиде. Эта КФ была аппроксимирована суммой гауссоид. Графики выборочной и аппроксимирующей КФ показаны на рис. 1.26. Полученная аппроксимация использована в (1.70) для получения распределения вероятностей параметра масштаба R при имитации изображения на эллипсоиде, т.е. отклонения рельефа от этого эллипсоида.

На рис. 1.27 показан пример имитации рельефа на сегменте эллипсоида (большим высотам соответствуют большие яркости). Для сравнения на рис. 1.28 показан участок реального рельефа Луны. Визуально эти рисунки схожи, что свидетельствует о достаточной адекватности предложенной модели.

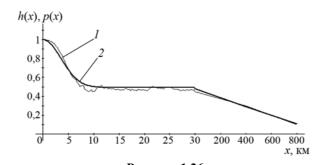


Рисунок 1.26 Корреляционная функция рельефа Луны и ее аппроксимация: 1 – выборочная КФ; 2 – аппроксимирующая КФ

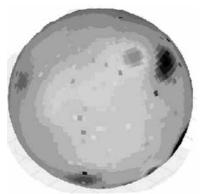


Рисунок 1.27 Имитация рельефа



Рисунок 1.28 Реальный рельеф участка Луны

1.8. Смешанные авторегрессионные модели случайных полей

Во многих случаях последовательности реальных изображений обладают значительными изменениями пространственно-временных корреляционных свойств. Это может быть связано с географическими и климатическими особенностями наблюдаемых объектов, изменением освещенности, случайным распределением горизонтально и вертикально-неоднородной облачности, ее эволюциями, эффектами затенения в поле обзора и т.д.

Для оценки эффективности алгоритмов обработки неоднородных изображений желательно использовать достаточно простые методы имитации таких последовательностей. Одним из возможных подходов к созданию массивов изображений с изменяющимися свойствами является применение смешанных моделей [70], называемых также дваждыстохастическими [25, 26, 97, 98]. Дважды-стохастические модели изображений создаются на основе предварительного формирования СП тех или иных параметров создаваемого СП.

Рассмотрим один из способов имитации неоднородного изображения [97, 98], заключающийся в том, что кадр предварительно сформированного (базового) СП преобразуется в совокупность корреляционных параметров $\left\{\rho_{\overline{j}},\ \overline{j}\in (j_1,...,j_M)\right\}$, характеризующих величины связи между соседними элементами изображения. Затем формируется изображение как модель СП с полученными корреляционными параметрами $\rho_{\overline{j}}$.

Для формирования базового СП и моделирования изображения возможно использование различных моделей СП. Возьмем, например, реализацию СП $X = \left\{x_{\overline{i}}, \overline{i} \in \Omega\right\}$, полученного с помощью АР модели Хабиби (1.30):

$$x_{i_1i_2} = \rho_{xi_1i_2}x_{i_1-1,i_2} + \rho_{yi_1i_2}x_{i_1,i_2-1} - \rho_{xi_1i_2}\rho_{yi_1i_2}x_{i_1-1,i_2-1} + \xi_{i_1i_2}.$$

Использование процедуры Хабиби для моделирования изображения с изменяющимися корреляционными свойствами обусловливает необходимость предварительного формирования двух базовых СП. Значения одного из них будут преобразованы в со-

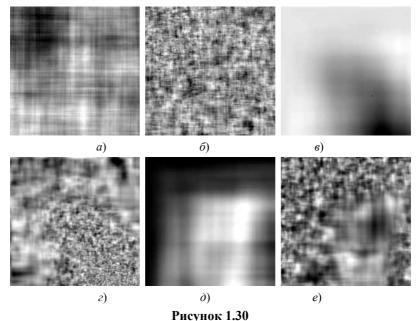
вокупность корреляционных параметров $\{\rho_{xi_1i_2}\}$, а значения другого — в совокупность корреляционных параметров $\{\rho_{yi_1i_2}\}$. С помощью подбора способа преобразования значений базовых СП в совокупность корреляционных параметров можно формировать последовательности изображений, близкие по своим свойствам к реальным спутниковым снимкам.

Условная схема способа моделирования изображения с изменяющимися корреляционными свойствами, использующего для формирования СП модель Хабиби, показана на рис. 1.29. Пример моделирования изображения с изменяющимися корреляционными свойствами, характеризующий рельеф предполагаемого снимка земной поверхности, представлен на рис. 1.30, где a, e, d – базовое СП; 6, e, e – кадры изображения с изменяющимися корреляционными свойствами. Причем, для формирования СП на рис. 1.30, a, d использовалась простейшая модель Хабиби, а для формирования СП на рис. 1.30, e, d, e, e использовалась модель СП с корнями характеристических уравнений кратностью (2; 2).

На рис. 1.31 представлены примеры неоднородных изображений на основе дважды стохастической модели СП с различными средними значениями коэффициентов корреляции.



Схема моделирования изображения с изменяющимися корреляционными свойствами



Результаты имитации изображений с изменяющимися корреляционными свойствами: $a - (0.9; 0.9); \delta - (0.9; 0.9); \varepsilon - (0.99; 0.99);$ $\varepsilon - (0.9; 0.9); \partial - (0.99; 0.99); \varepsilon - (0.99; 0.99)$

Примеры реализации многозональных изображений на основе дважды стохастических моделей с внутрикадровым коэффициентом корреляции 0,99 и различными межкадровыми коэффициентами показаны на рис. 1.32.

Используя дважды стохастические AP модели, можно при относительно небольших вычислительных затратах формировать неоднородные изображения и их последовательности, близкие по своим свойствам к реальным многозональным изображениям. Это позволяет использовать такие модели для анализа эффективности алгоритмов обработки изображений на основе статистического моделирования.

Для рассматриваемых дважды-стохастических моделей может быть найдено приближенное выражение для КФ. Рассмотрим одну строку двумерного СП, формируемую как AP последовательность:

$$x_i = \rho_i x_{i-1} + \sigma_x \sqrt{\left(1 - \rho_i^2\right)} \xi_i,$$

где ρ_i — очень медленно изменяющаяся (по отношению к среднему интервалу корреляции последовательности x_i) СВ, имеющая гауссовское распределение с математическим ожиданием $m_{\rho} = M\left\{\rho_i\right\}$ и дисперсией $\sigma_{\rho}^2 = M\left\{\left(\rho_i - m_{\rho}\right)^2\right\}$.

Тогда нормированная КФ может быть найдена следующим образом:

$$R(k) = M\left\{\rho_i^{|k|}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_i^{|k|} w(\rho_i) d\rho_i.$$

После несложных преобразований это выражение можно записать в следующем виде

Для четных k:

$$R(k) = \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}} C_k^{2j} \sigma_{\rho}^{2j} m_{\rho}^{k-2j} (k-2j-1)!!.$$

Для нечетных k

$$R(k) = \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} C_k^{2j} \sigma_{\rho}^{2j} m_{\rho}^{k-2j} (k-2j-1)!!$$

где $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$; (k-2j-1)!! определяется как произведение

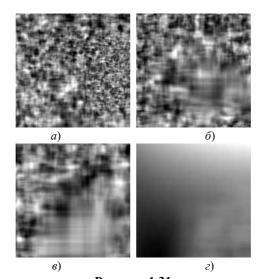
всех натуральных нечетных чисел в отрезке [1, (k-2j-1)].

Для нескольких первых значений аргумента КФ имеет вид:

$$R(1) = m_{\rho}, \ R(2) = \left(m_{\rho}^2 + \sigma_{\rho}^2\right), \ R(3) = \left(m_{\rho}^3 + 3\sigma_{\rho}^2 m_{\rho}\right),$$

$$R(4) = \left(m_{\rho}^4 + 6\sigma_{\rho}^2 m_{\rho}^2 + 3\sigma_{\rho}^4\right), \ R(5) = \left(m_{\rho}^5 + 10\sigma_{\rho}^2 m_{\rho}^3 + 15\sigma_{\rho}^4 m_{\rho}\right).$$

Анализ представленных выражений позволяет сделать вывод, что при $\sigma_{\rho} \to 0$ КФ принимает вид $R(k) = m_{\rho}^{|k|}$, т.е. при $\sigma_{\rho} \to 0$ смешанный случайный процесс $\{x^i\}$ стремится к обычной АР последовательности с неизменяющимся коэффициентом корреляции m_{ρ} .



 $\begin{tabular}{ll} \bf Pисунок 1.31 \\ \bf Heoднородные изображения: \\ \it a-(0,9;0,9); \ \it G-(0,95;0,95); \ \it g-(0,99;0,99); \ \it z-(0,999;0,999) \end{tabular}$

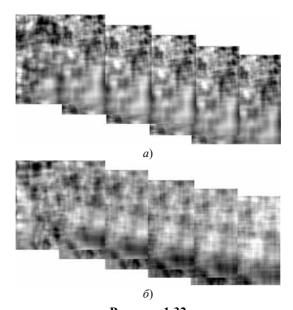


Рисунок 1.32 Многозональное изображение: a — межкадровый коэффициент корреляции 0,99; σ — межкадровый коэффициент корреляции 0,8

Глава 2

ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Выделение полезной составляющей изображений на основе их зашумленных наблюдений является важной задачей, так как дает возможность улучшить многомерное изображение при наличии помех. Кроме того, как будет показано в следующем разделе, рассмотрение проблем обнаружения аномалий также приводит к необходимости построения оптимальных оценок СП и определения ковариационных матриц ошибок фильтрации. Подходы к решению задач определения потенциальной точности оценивания и построения алгоритмов фильтрации многомерных СП оказываются различными. В первом случае для получения достаточно простых аналитических соотношений целесообразно обратиться к асимптотическим формулам фильтра Винера [17]. Однако процедуры винеровской фильтрации могут использоваться в прикладных задачах лишь при ограниченном числе к кадров и малых размерах сеток \mathbf{G} и \mathbf{J}_{t} .

При построении оценок многомерных изображений на фоне помех в реальном масштабе времени желательно найти структуры оптимальных или близких к ним алгоритмов с относительно небольшими вычислительными затратами. Это удается сделать с помощью рекуррентных по времени и пространству методов оценивания, основанных на рассмотренных каузальных моделях изображений [7, 17, 18, 23, 28].

2.1. Байесовские оценки случайных полей

Одним из наименее обременительных ограничений, позволяющих найти рекуррентное решение задачи оценивания последовательности многомерных изображений, является ее описание с помощью тензорных стохастических разностных уравнений (1.9), (1.10). На основе наблюдения последовательности кадров

$$z_{\overline{j}}^{i} = x_{\overline{j}}^{i} + \theta_{\overline{j}}^{i}, \ \overline{j} \in J_{i}, \ i = 1, 2, \dots,$$
 (2.1)

представляющих собой аддитивную смесь информационного СП $x_{\bar{j}}^i$ и белого СП помех $\theta_{\bar{j}}^i$, необходимо найти наилучшую оценку $\hat{x}_{\bar{j}}^k$ очередного кадра $x_{\bar{j}}^k$ информационного СП по всем наблюдениям $z^1, z^2, ..., z^k$. Для поиска такой оценки воспользуемся байесовским критерием максимума среднего выигрыша [7, 9, 18, 19, 23] и методом инвариантного погружения [41, 70, 82].

2.1.1. Байесовский критерий качества

Предположим, что вся информация о параметре $x_{\bar{j}}^i$ до эксперимента заключена в известной априорной ПРВ $w(X_k)$ многомерного массива $X_k = \left(x_{\bar{j}}^1, \, \bar{j} \in J_1, \, x_{\bar{j}}^2, \, \bar{j} \in J_2, ..., \, x_{\bar{j}}^k, \, \bar{j} \in J_k\right)$. Для построения байесовского критерия качества оценивания нужно задать скалярную функцию потерь $R(X_k, \hat{X}_k(Z_k))$, определяющую потери (штраф) в зависимости от величины отличия между оценкой $\hat{X}_k(Z_k)$, $Z_k = \left(z_{\bar{j}}^1, z_{\bar{j}}^2, ..., z_{\bar{j}}^k\right)$, и действительным значением параметра X_k . При этом оптимальные байесовские оценки \hat{X}_k минимизируют средние потери

$$\overline{R} = \int_{G_z} \int_{G_x} R(X_k, \hat{X}_k(Z_k)) w(X_k, Z_k) dX_k dZ_k,$$

где:

 $w(X_k,Z_k)=w(Z_k)w(X_k/Z_k)$ — совместная ПРВ случайных величин X_k и Z_k , заданная на прямом произведении пространства наблюдений G_z и пространства параметров G_x ;

$$dX_k = dx_1 dx_2 ... dx_N$$
, $dZ_k = dz_1 dz_2 ... dz_n$;

N — общее число элементов множества

$$X_k = \left(x_{\overline{j}}^1,\, \overline{j} \in J_1, \ x_{\overline{j}}^2,\, \overline{j} \in J_2, ..., \ x_{\overline{j}}^k,\, \overline{j} \in J_k\right).$$

Представим средние потери в виде:

$$\overline{R} = \int_{G_{*}} R_{a}(Z_{k}) w(Z_{k}) dZ_{k},$$

где

$$R_a(Z_k) = \int_{G_v} R(X_k, \hat{X}_k(Z_k)) w(X_k / Z_k) dX_k.$$
 (2.2)

Таким образом, минимизация средних потерь \overline{R} по виду оценки $\hat{X}_k(Z_k)$ эквивалентна минимизации условных (апостериорных) потерь $R_a(Z_k)$, в каждой точке Z_k выборочного пространства G_z .

Наиболее простые в вычислительном плане алгоритмы оценивания часто связаны с простой функцией потерь. К сожалению, традиционные формы записи простой функции потерь не позволяют учесть корреляционные связи и априорные дисперсии многомерных параметров. При отсутствии такого учета задача оценивания может вырождаться. Действительно, подставим выражение $R(\overline{x},\hat{x}) = r_0 - \delta(\overline{x} - \hat{x})$ для двумерного гауссовского параметра $\overline{x} = (x_1 \ x_2)^T$ с ковариационной матрицей

$$V_0 = M\{\overline{x}\ \overline{x}^T\} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$
 в формулу (2.2). Тогда

$$R_a(Z_k) = r_0 - w(\hat{\overline{x}}) \int_{G_z} w(Z_k / \hat{\overline{x}}) dZ_k,$$

где

$$w(\hat{x}) = (2\pi\sigma^2(1-\rho^2))^{-0.5} \exp\{-\hat{x}_1/2\sigma^2 - (\hat{x}_2-\rho\hat{x}_1)^2/2\sigma^2(1-\rho^2)\}.$$

Очевидно, при $\rho \to 1$ не требуется даже связи параметра \overline{x} и наблюдений Z_k для получения бесконечной отрицательной средней величины потерь (т.е. бесконечного выигрыша). Достаточно выбрать, например, $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 1$. Причина неверного вывода заключается в том, что при $\rho = 1$ ранг матрицы V_0 и ранг распределения случайной величины \overline{x} равны единице. При этом параметры оказываются сосредоточенными на пространстве низшей размерности, чем δ -функция Дирака.

Для того чтобы сделать предельный переход в многомерном случае более наглядным, введем вместо функции потерь равномерную функцию выигрыша

$$\mathfrak{I}_{x}(X_{k},\hat{X}_{k}) = \begin{cases} g, & X_{k} - \hat{X}_{k} \in G_{\varepsilon}, \\ 0 & X_{k} - \hat{X}_{k} \notin G_{\varepsilon}, \end{cases}$$
 (2.3)

где:

g — «премия», назначаемая за точное оценивание совокупности X_{ι} ;

 G_{ε} — многомерная область в пространстве параметров G_{x} , содержащая начало координат.

При этом критерием качества является математическое ожидание функции выигрыша

$$\mathfrak{I} = M\{\mathfrak{I}_{x}(X_{k}, \hat{X}_{k})\} = g \int_{G_{z}} \int_{X_{k} - \hat{X}_{k} \in G_{\varepsilon}} w(X_{k}, Z_{k}) dZ_{k}, \qquad (2.4)$$

а оптимальная оценка \hat{X}_k соответствует максимуму среднего выигрыша \Im . Нетрудно убедиться, что рассматриваемые критерии (2.2) и (2.4) приводят к одинаковым оценкам, если

$$R(X_k, \hat{X}_k(Z_k)) = c_0 - \Im_x(X_k, \hat{X}_k(Z_k)),$$

где c_0 – произвольная постоянная.

Для выбора области D при гауссовском массиве параметров X_k заметим, что априорная ПРВ $w(X_k)$ может быть охарактеризована эллипсоидом рассеяния

$$G_a: K(X_k) \leq N+2$$

где:

$$K(X_k) = (X_k - m_x)^T V_0^{-1} (X_k - m_x);$$

 N — размерность G_x ; $m_x = M\{X_k\};$
 V_0 — ковариационная матрица X_k .

Выберем G_{ε} подобной эллипсоиду рассеяния G_a и назначим премию g в размере $g=\beta\mathrm{mes}G_a/\mathrm{mes}G_{\varepsilon}$, пропорциональном отношению объемов этих областей.

Оптимизацию правила принятия решения будем связывать с поиском наибольшего среднего выигрыша

$$\mathfrak{I} = \beta \frac{\operatorname{mes} G_a}{\operatorname{mes} G_{\varepsilon}} \int_{G_z X_k - \hat{X}_k \in G_{\varepsilon}} w(X_k, Z_k) dZ_k.$$

После предельного перехода от равномерной функции выигрыша к простой при ${\rm mes}G_{\varepsilon} \to 0$ выражение для среднего выигрыша упрощается:

$$\mathfrak{I} = \beta \operatorname{mes} G_a \int_{G_z} w(X_k, Z_k) dZ_k .$$

Оптимальная байесовская оценка \hat{X}_k находится по максимуму среднего выигрыша \Im или, при заданных наблюдениях Z_k , — по максимуму критерия

$$T = \beta \operatorname{mes} G_a w(\hat{X}_k) L(\hat{X}_k), \tag{2.5}$$

где $L(\hat{X}_k) = w(Z_k / \hat{X}_k)$ — функция правдоподобия.

Для гауссовских параметров X_k ПРВ

$$w(X_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det V_o}} \exp\left\{-\frac{1}{2}K(X_k)\right\}$$

и тогда, с учетом объема эллипсоида рассеяния ${\rm mes}G_a=$ = $\sqrt{(N+2)^N\pi^N\det V_0}$, получаем следующий вид статистики:

$$T = \beta \frac{(0.5N+1)^{0.5N}}{\Gamma(0.5N+1)} \exp\{-\frac{1}{2}K(\hat{X}_k)\}L(\hat{X}_k), \qquad (2.6)$$

где $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функция.

Для рассмотренного примера оценки двумерного параметра $\overline{x}=(x_1x_2)^T$ априорная область рассеяния G_a ограничена эллипсоидом $\overline{x}^TV_0\overline{x}=4$ (рис. 2.1). Премия в размере $\beta \mathrm{mes} G_a/\mathrm{mes} G_\varepsilon$ назначается, если оценка \hat{x} попадает в область G_ε , подобную G_a .

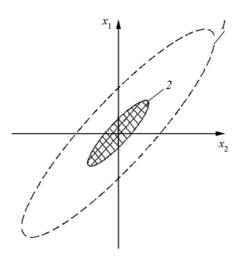


Рисунок 2.1 Эллипс рассеяния, ограничивающий область G_a (I), и подобная ей область G_{ε} ; ρ = 0,9

Тогда при $\operatorname{mes} G_{\varepsilon} \to 0$ средний выигрыш

$$\Im = 2\beta \int_{G_z} \exp(-\frac{(\hat{x}_1^2 - 2\rho\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{x}_2^2)}{2\sigma^2(1 - \rho^2)}) w(Z_k / \overline{x}) dZ_k$$

будет максимален для оценки, максимизирующей

$$T = 2\beta \exp \left\{ -\frac{(\hat{x}_1^2 - 2\rho \hat{x}_1 \hat{x}_2 + \hat{x}_2^2)}{2\sigma^2 (1 - \rho^2)} \right\} L(\hat{\overline{x}}_k).$$

Если $\rho \to 1$, то выигрыш максимален при $\hat{\overline{x}}_1 = \hat{\overline{x}}_2$ и составляет точно такую же величину, как и при оценке одного параметра $x = x_1 = x_2$.

2.1.2. Линейные рекуррентные оценки. Метод инвариантного погружения

На основе рассмотренного байесовского критерия качества при простой функции выигрыша могут быть получены строго оптимальные рекуррентные оценки изменяющихся векторных гауссовских параметров. Для описания этого изменения воспользуемся линейным тензорным уравнением авторегрессии (1.10):

$$\begin{aligned} x^{i} &= \wp^{i-1} x^{i-1} + \xi^{i}, \ i = 1, 2, ..., k, \ x^{i} = \\ &= \left\{ x_{\overline{j}}^{i}, \ \overline{j} \in J_{i} \right\}, \ \wp^{i-1} = \left\{ \wp_{\overline{j}\overline{l}}^{i-1}, \ \overline{j}, \overline{l} \in J_{i-1} \right\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

При этом совместная ПРВ всех оцениваемых параметров запишется в виле

$$w(X_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det V_o}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (x^i - \wp^{i-1} x^{i-1})^T (V_{\xi}^i)^{-1} (x^i - \wp^{i-1} x^{i-1})\right\}.$$

Пусть на каждом шаге осуществляются наблюдения аддитивной смеси (2.1) $z_{\overline{j}}^i = x_{\overline{j}}^i + \theta_{\overline{j}}^i, \ \overline{j} \in J_i$ информационного параметра $x_{\overline{j}}^i, \ \overline{j} \in J_i$ и белого шума $\theta_{\overline{j}}^i, \ \overline{j} \in J_i$ с пространственной ковариационной матрицей $V_{\overline{j}\,\overline{l}}^i = \left\{\theta_{\overline{j}}^i\theta_{\overline{l}}^i\right\}, i = 1, 2, ..., k$.

Совместная условная ПРВ наблюдений находится как про-изведение

$$w(Z_k/X_k) = \prod_{i=1}^k w(z^i/x^i) = \exp\left\{\sum_{i=1}^k \Xi_i(x^i,z^i)\right\},$$

где

$$\Xi_i(x^i, z^i) = \ln w(z^i / x^i) =$$

$$= -0.5 \ln((2\pi)^n \det V^i) - 0.5(z^i - x^i)(V^i)^{-1}(z^i - x^i).$$

В соответствии с предложенным байесовским критерием качества (2.5), (2.6) и представленных формул для ПРВ параметров

и наблюдений оптимальные оценки находятся из условия максимума статистики:

$$T = \beta \frac{(0,5N+1)^{0,5N}}{\Gamma(0,5N+1)} \times \exp\left(-\sum_{i=1}^{k} (x^{i} - \wp^{i-1}x^{i-1})^{T} (V_{\xi}^{i})^{-1} (x^{i} - \wp^{i-1}x^{i-1}) - \Xi_{i}(x^{i}, z^{i})\right).$$

Очевидно, максимизация T эквивалентна минимизации критерия

$$J_k(X_k) = \sum_{i=1}^k (x^i - \wp^{i-1} x^{i-1}) (V_{\xi}^i)^{-1} (x^i - \wp^{i-1} x^{i-1}) - \Xi_i(x^i, z^i). \quad (2.8)$$

Таким образом, для получения оптимальных оценок

$$\hat{X}_k = \left(\hat{x}_{\overline{j}}^1,\, \overline{j} \in J_1, \ \hat{x}_{\overline{j}}^2, \overline{j} \in J_2, ..., \ \hat{x}_{\overline{j}}^k,\, \overline{j} \in J_k\right)$$

всех параметров

$$X_k = \left(x_{\overline{j}}^1, \ \overline{j} \in J_1, \ x_{\overline{j}}^2, \ \overline{j} \in J_2, ..., \ x_{\overline{j}}^k, \ \overline{j} \in J_k\right)$$

необходимо найти минимум (2.8) по переменным $x^1, x^2, ..., x^k$. Для удобства и простоты последующих преобразований представим минимизацию (2.8) как задачу на условный экстремум:

$$J_k(X_k, \{\xi^i\}) = \sum_{i=1}^k (0.5\xi^i (V_\xi^i)^{-1} \xi^i - \Xi_i(x^i, z^i))$$

с ограничениями (2.7). Для определения оптимальных оценок введем множители $\lambda^{i}_{\bar{i}}$, i=0,1,...,k и функцию Лагранжа

$$\begin{split} &J_L \Big(X_k, \! \big\{ \lambda^i \big\}, \! \big\{ \xi^i \big\} \Big) \! = \\ &= \! J_k \Big(X_k, \! \big\{ \xi^i \big\} \Big) \! + \! \sum_{i=1}^k \lambda^{i-1} (x^i - \wp^{i-1} x^{i-1} - \xi^i) \end{split},$$

продифференцируем $J_L(X_k, \{\lambda^i\}, \{\xi^i\})$ по $\{x^i\}, \{\lambda^i\}, \{\xi^i\}, i=1,2,...,k$ и приравняем производные нулю. В результате получим следующую систему линейных разностных уравнений:

$$\lambda^{i-1} - \wp^{i} \lambda^{i} = \Xi_{i}'(x^{i\lambda}, z^{i}),$$

$$V_{\varepsilon}^{i} \lambda^{i-1} = x^{i\lambda} - \wp^{i-1} x^{(i-1)\lambda}, i = 1, 2, ..., k, \lambda^{k} = 0, \overline{x}^{0\lambda} = 0,$$

$$(2.9)$$

где:

 $x^{i\lambda} = x^{i\lambda} \left(\left\{ z_{\bar{j}}^1, z_{\bar{j}}^2, ..., z_{\bar{j}}^k \right\} \right), i < k$ — интерполированные (сглаженные) оценки;

 $\hat{x}^k = \hat{x}^k \left(\left\{ z_{\overline{j}}^1, z_{\overline{j}}^2, ..., z_{\overline{j}}^k \right\} \right) - \text{результаты фильтрации, т.е. оценки}$ в момент дискретного времени k, полученная по наблюдениям $\left\{ z_{\overline{j}}^1, z_{\overline{j}}^2, ..., z_{\overline{j}}^k \right\}$.

Заметим, что производная $\Xi_i'(x^{i\lambda},z^i)$ от скалярной величины $\Xi_i(x^i,z^i)$ по тензору x^i является тензором.

Решение найденной системы разностных уравнений (2.9) при фиксированном и небольшом числе k наблюдений $\left\{z_{\bar{j}}^1, z_{\bar{j}}^2, ..., z_{\bar{j}}^k\right\}$ с учетом возможностей современных ЭВМ не представляет значительных трудностей.

Рассматриваемый класс задач рекуррентного оценивания предполагает непрерывное увеличение числа k. При этом прямые методы решения системы линейных уравнений, например, методы Крамера или Гаусса, оказываются малопригодными. Анализ проблемы показывает, что необходимо найти способ преобразования решения системы из k-1 уравнения $\partial J_{k-1}/\partial x^i=0, i=1,2,...,k-1$, в решение системы из k уравнений $\partial J_k/\partial x^i=0, i=1,2,...,k$.

Именно такой подход и позволил бы найти оптимальную оценку $\hat{\bar{x}}_k = \hat{\bar{x}}_k \left(\left\{ z_{\bar{j}}^1, z_{\bar{j}}^2, ..., z_{\bar{j}}^k \right\} \right)$ в виде линейной функции оценки $\hat{x}^{k-1} = \hat{x}^{k-1} \left(\left\{ z_{\bar{j}}^1, z_{\bar{j}}^2, ..., z_{\bar{j}}^{k-1} \right\} \right)$ на предыдущем шаге и очередного кадра наблюдений $\left\{ z_{\bar{j}}^k, \bar{j} \in J_k \right\}$.

Рассмотрим возможности получения оптимальных байесовских рекуррентных оценок изменяющихся параметров на основе метода инвариантного погружения [9, 41, 82]. Суть этого метода

заключается в решении более общей задачи, чем заданная, т.е. погружении частной задачи в более общую.

Для рекуррентного решения системы (2.9) будем искать решение более общей системы уравнений с ненулевым граничным условием $\overline{\lambda}_k \neq 0$. Последние уравнение такой системы запишем в виде

$$\lambda^{k-1} - c^k = \Xi_i'(x^{k\lambda}, z^k), \ V_{\mathcal{E}}^k \lambda^{k-1} = x^{k\lambda} - \wp^{k-1} x^{(k-1)\lambda}, \tag{2.10}$$

где $c^k = \wp^k \lambda^k \neq 0$ — ненулевое граничное условие.

При этом оценку при ненулевом граничном условии можно рассматривать как функцию двух переменных

$$x^{k\lambda} = x^{k\lambda}(\hat{x}^k, c^k)$$
,

причем

$$x^{k\lambda} = x^{k\lambda}(\hat{x}^k, c^k = 0) = \hat{x}^k$$
.

Совершенно аналогично и оценку на предыдущем шаге фильтрации можно представить в виде функции

$$x^{(k-1)\lambda} = x^{(k-1)\lambda}(\hat{x}^{k-1}, c^{k-1})$$

с условием

$$x^{(k-1)\lambda} = x^{(k-1)\lambda}(\hat{x}^{k-1}, c^{k-1} = 0) = \hat{x}^{k-1},$$

где
$$c^{k-1} = \wp^{k-1} \lambda^{k-1} \neq 0$$
.

Для линейной системы уравнений эти функции двух переменных линейны:

$$x^{k\lambda} = \hat{x}^k + P^k c^k, \ x^{(k-1)\lambda} = \hat{x}^{k-1} + P^{k-1} c^{k-1}, \tag{2.11}$$

где $P^k = P_{\overline{jl}}, \overline{j}, \overline{l} \in J_k$, – пространственные матрицы.

С учетом этих соотношений выполним следующие простые преобразования второго уравнения (2.10):

$$x^{k\lambda} = \wp^{k-1} x^{(k-1)\lambda} + V_{\mathcal{E}}^k \lambda^{k-1} = \hat{x}_3^k + P_3^k \lambda^{k-1}, \qquad (2.12)$$

где:

 $\hat{x}_3^k = \wp^{k-1} \hat{x}^{k-1}$ — экстраполированное на один шаг значение оценки \hat{x}^{k-1} на k-1 шаге;

 $P_9^k = \wp^{k-1} P^{k-1} \wp^{k-1} + V_\xi^k \quad - \ \, \text{ковариационная} \quad \text{матрица} \quad \text{ошибок}$ такой экстраполяции.

Учтем теперь, что

$$x^{k\lambda} = \hat{x}^k + P^k c^k = \hat{x}_9^k + P_9^k \lambda^{k-1},$$

$$\Xi_k'(x^{k\lambda}, z^k) = (V^k)^{-1} (z^k - x^k) - (V^k)^{-1} P_9^k \lambda^{k-1}$$

и подставим \overline{c}_k из первого уравнения (2.10). Получим следующее тождество относительно λ^{k-1} :

$$\hat{x}^k = \hat{x}^k_{_3} + P_k V_k^{-1} (\overline{z}_k - \hat{x}^k_{_3}) - P^k \lambda^{k-1} + P_3^k \lambda^{k-1} - P^k (V^k)^{-1} P_3^k \lambda^{k-1} \,.$$

Полагая здесь $\lambda^{k-1} = 0$, найдем уравнение оптимальной фильтрации:

$$\hat{x}^k = \hat{x}_2^k + P_k(V^k)^{-1}(\overline{z}_k - \hat{x}_2^k). \tag{2.13}$$

Приравнивая коэффициенты при λ^{k-1} , находим рекуррентную связь между ковариационными матрицами ошибок:

$$P^{k} = P_{9}^{k} (E + (V^{k})^{-1} P_{9}^{k})^{-1},$$

где E — единичный тензор.

Полученные рекуррентные оценки и уравнения для матричных коэффициентов для вырожденных сеток из одной строки, когда $x_{\bar{j}}^k = x_{j_1}^k$, $j_1 = 1,2,...,M$, совпадают с уравнениями векторной калмановской фильтрации [6–9, 35]. Вместе с тем, необходимо заметить, что здесь они получены на основе байесовского критерия и являются строго оптимальными при специально построенной для случая многомерных параметров простой функции потерь (простой функции выигрыша), позволяющей решать задачу даже при вырожденных априорных распределениях оцениваемых параметров.

Линейный тензорный фильтр Калмана

Модель наблюдений

$$z_{\overline{j}}^{\underline{k}} = C_{\overline{i}\overline{l}} x_{\overline{l}}^{\underline{k}} + \theta_{\overline{j}}^{\underline{k}}, \ \overline{j} \in J_{zk}, \overline{l} \in J_{xk} \,.$$

Модель изменения параметров

$$x_{\bar{j}}^{i} = \wp_{\bar{j}\bar{l}}^{i-1} \, x_{\bar{l}}^{i-1} + \xi_{\bar{j}}^{i}, \, i = 1, 2, ..., k, \, \bar{j} \in J_{xi} \, , \bar{l} \in J_{x(i-1)}.$$

Фильтрация параметров

$$\hat{x}^{k} = \hat{x}_{3}^{k} + B^{k}(z^{k} - C^{k}\hat{x}_{3}^{k}),$$

$$\hat{x}_{2}^{k} = \wp^{k-1} \hat{x}^{k-1}$$
.

Ковариационные матрицы ошибок (первый вариант)

$$B^k = P^k C^k (V^k)^{-1}, \ \ P^k = P_{\mathfrak{I}}^k (E + C^k (V^k)^{-1} C^k P_{\mathfrak{I}}^k)^{-1},$$

$$P_{\mathfrak{I}}^{k} = \wp^{k-1} P^{k-1} \wp^{k-1} + V_{\xi}^{k} .$$

Ковариационные матрицы ошибок (второй вариант)

$$B^{k} = P_{3}^{k} C^{k} (\Gamma^{k})^{-1}, \ P^{k} = (E - B^{k} C^{k}) P_{3}^{k},$$

$$\Gamma^k = C^k P_3^k C^k + V^k, \ \ P_3^k = \wp^{k-1} P^{k-1} \wp^{k-1} + V_{\mathcal{E}}^k \, .$$

Начальные условия и априорные данные

$$\hat{x}_{2}^{1} = M\{x^{1}\} = 0, P_{2}^{1} = M\{(x^{1} - \hat{x}_{2}^{1})(x^{1} - \hat{x}_{2}^{1})\},$$

$$M\left\{\theta^k\right\}=0\;,\;M\left\{\theta^k\theta^k\right\}=V^k\;,\;M\left\{\xi^k\right\}=0\;,\;M\left\{\xi^k\xi^k\right\}=V^k_{\mathcal{E}}\;.$$

2.1.3. Фильтрация последовательности кадров

Рассмотрим в качестве примера поле X с множительной корреляцией

$$M\left\{x_{\overline{j}}^{t} \times x_{\overline{l}}^{s}\right\} = \sigma_{x}^{2} \rho^{|t-s|} \prod_{k=1}^{n} r_{k}^{|j_{k}-t_{k}|},$$

где:

ho – коэффициент корреляции по времени;

 r_k — коэффициент по k-й пространственной оси;

 σ_x^2 – дисперсия поля.

Тогда при t = s получаем внутрикадровые ковариации, а при t = s - 1 получаем межкадровые ковариации

$$V_x^{t|t-1} = \rho V_x^{t|t} ,$$

гле:

$$R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_m$$
;

 R_{k} — корреляционный тензор k-й строки.

В этом случае

$$\rho^{t} = \rho E, v^{t-1} (v^{t-1})^{T} = V_{x}^{t} = V_{x}$$

и уравнения фильтрации принимают вид

$$\hat{x}^{t} = \rho \hat{x}^{t-1} + P^{t} \left(z^{t} - \rho \hat{x}^{t-1} \right), \quad P^{t} = P_{j}^{t} \left(E + P_{3}^{t} \right)^{-1},$$

$$P_{3}^{t} = \rho^{2} P^{t} + \left(1 - \rho^{2} \right) q R, \quad P_{3}^{1} = q R,$$

где:

$$q = \sigma_x^2 / V_\theta$$
 – отношение сигнал/шум;

тензоры P_9^t и P^t нормированы дисперсией шума и представляют относительные ковариации ошибок экстраполированных и текущих оценок, выраженных в дисперсиях шума.

Рассмотрим для иллюстрации поле с 3×2 сеткой J_t , т.е. случай, когда кадры x^t состоят из шести точек:

$$x^{t} = \begin{pmatrix} x_{11}^{t} & x_{21}^{t} & x_{31}^{t} \\ x_{12}^{t} & x_{22}^{t} & x_{32}^{t} \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы корреляции первой строки и второй строки имеют вид

$$R_{1} = \begin{pmatrix} 1 & r_{1} & r_{1}^{2} \\ r_{1} & 1 & r_{1} \\ r_{1}^{2} & r_{1} & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{2} = \begin{pmatrix} 1 & r_{2} \\ r_{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$V_x = \sigma_x^2 R_1 \times R_2 = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & | & r_2 & r_2 r_1 & r_2 r_1^2 \\ r_1 & 1 & r_1 & | & r_2 r_1 & r_2 & r_2 r_1 \\ \hline r_1 & 1 & r_1 & | & r_2 r_1 & r_2 & r_2 r_1 \\ \hline r_2 & r_1 & 1 & | & r_2 r_1^2 & | & r_2 r_1^2 & r_2 r_1 & r_2 \\ \hline r_2 r_1 & r_2 & r_2 r_1 & | & r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 r_1^2 & r_2 r_1 & r_2 & | & r_1^2 & r_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы ковариации ошибок $P_{\mathfrak{I}}^t$ и P^t имеют такую же форму.

Элементами тензоров P^t являются ковариации ошибок фильтрации x^k , зависящие в данном случае только от четырех параметров, коэффициентов корреляции r_1, r_2 и ρ , а также отношения сигнал/шум $q = \sigma_x^2/V_\theta$. При q >> 1, $t \to \infty$ величины $P_{j_1j_2}^t$ довольно быстро сходятся к предельным $\{P_{j_1j_2}^t\} = P_{j_1j_2}$. Предельные значения применять можно сразу же. Это ухудшит результаты фильтрации только на первых шагах, но значительно сократит объем необходимых вычислений (или объем запоминающего устройства, если коэффициенты $\{P_{j_1j_2}^t\}$ вычисляются до эксперимента).

2.2. ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ТЕНЗОРНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ

2.2.1. Интерполяция оценок

При решении задачи фильтрации марковской последовательности $\left\{x_{\bar{j}}^1, \bar{j} \in J_1\right\}$, $\left\{x_{\bar{j}}^2, \bar{j} \in J_2\right\}$,..., $\left\{x_{\bar{j}}^k, \bar{j} \in J_k\right\}$ на основе наблюдений $\left\{z_{\bar{j}}^1\right\}$, $\left\{z_{\bar{j}}^2\right\}$, ..., $\left\{z_{\bar{j}}^k\right\}$ последовательно находятся оценки $\hat{x}_{\bar{j}}^1 = \hat{x}_{\bar{j}}^1\left(\left\{z_{\bar{j}}^1\right\}\right)$, $\hat{x}_{\bar{j}}^2 = \hat{x}_{\bar{j}}^2\left(\left\{z_{\bar{j}}^1\right\}, \left\{z_{\bar{j}}^2\right\}\right)$, ..., $\hat{x}_{\bar{j}}^k = \hat{x}_{\bar{j}}^k\left(\left\{z_{\bar{j}}^1\right\}, \left\{z_{\bar{j}}^2\right\}, ..., \left\{z_{\bar{j}}^k\right\}\right)$. В ряде практических задач желательно улучшить оценки $x^{i\lambda} = x^{i\lambda}\left(\left\{z_{\bar{j}}^1, z_{\bar{j}}^2, ..., z_{\bar{j}}^i\right\}\right)$, i < k, за счет новой информации, содер-

жащейся в наблюдениях $\left\{z_{\bar{j}}^{i+1}, z_{\bar{j}}^{i+2}, ..., z_{\bar{j}}^{k}\right\}$. Задача построения таких оценок $x^{i\lambda} = x^{i\lambda}\left(\left\{z_{\bar{j}}^{1}, z_{\bar{j}}^{2}, ..., z_{\bar{j}}^{k}\right\}\right), i < k$, называется задачей интерполяции или задачей сглаживания.

После получения наблюдений z^k и вычисления \hat{x}^k по формуле (2.13) из соотношения (2.12) можно найти $\lambda^{k-1} = (P_3^k)^{-1} (\hat{x}^k - \hat{x}_3^k)$ и, следовательно, точное значение граничного условия $c^{k-1} = \wp^{k-1} \lambda^{k-1}$. Тогда интерполированная оценка $x^{(k-1)\lambda} = x^{(k-1)\lambda} \left(\left\{ z_{\bar{j}}^1, z_{\bar{j}}^2, ..., z_{\bar{j}}^k \right\} \right)$ находится по формуле (2.11) в виде

$$x^{(k-1)\lambda} = \hat{x}^{k-1} + P^{k-1}c^{k-1} = \hat{x}^{k-1} + A^{k-1}(\hat{x}^k - \hat{x}_3^k),$$

где
$$A^{k-1} = P^{k-1} \wp^{k-1} (P_2^k)^{-1}$$
.

Точно так же могут быть найдены и остальные интерполированные оценки. Действительно, предположим, что была найдена оценка $x^{(i+1)\lambda} = x^{(i+1)\lambda} \left(\left\{z_{\bar{j}}^1, z_{\bar{j}}^2, ..., z_{\bar{j}}^k\right\}\right)$, i < k. Рассмотрим, каким образом с помощью рекуррентных вычислений может быть получена оценка

$$x^{i\lambda} = x^{i\lambda} \left(\left\{ z_{\overline{j}}^1, z_{\overline{j}}^2, ..., z_{\overline{j}}^k \right\} \right), i < k.$$

Перепишем второе уравнение системы (2.9) для индекса i+1 в виде $V_{\xi}^{i+1}\lambda^i=x^{(i+1)\lambda}-\wp^ix^{i\lambda}$. Из этого уравнения с учетом $x^{i\lambda}=\hat{x}^i+P^ic^i$, $c^i=\wp^i\lambda^i$, найдем соотношение

$$\lambda^{i} = (P_{3}^{i+1})^{-1} (x^{(i+1)\lambda} - \hat{x}_{3}^{(i+1)\lambda}),$$

где $P_3^{i+1} = \wp^i P^i \wp^i + V_\xi^{i+1}$ — вычисленная в процессе фильтрации ковариационная матрица ошибок экстраполяции на один шаг.

Поскольку интерполированная оценка на i-м шаге определяется по формуле $x^{i\lambda} = \hat{x}^i + P^i c^i$, $c^i = \wp^i \lambda^i$, то окончательно получаем рекуррентную процедуру вычисления сглаженных оценок:

$$x^{i\lambda} = \hat{x}^i + A^i(\hat{x}^{i+1} - \hat{x}_2^{i+1}), i = k-1, k-2, ..., 1,$$
 (2.14)

с начальным условием $x^{k\lambda} = \hat{x}^k$; $A^i = P^i \wp^i (P_3^{i+1})^{-1}$. Заметим, что для применения этого алгоритма необходимо сохранить в памяти вычислительного устройства значения результатов фильтрации \hat{x}^i , \hat{x}^i_3 , i=1,2,...,k и матричные коэффициенты P^i_3 , P^i i=1,2,...,k.

Применение метода инвариантного погружения позволило решить и весьма сложную проблему интерполяции оценок гауссовских марковских последовательностей кадров многомерных изображений. Известны и другие способы нахождения таких оценок, но они требуют значительно более сложных и трудоемких математических преобразований.

Интерполированные оценки $x^{i\lambda}=x^{i\lambda}\left(\left\{z_{\overline{j}}^1,z_{\overline{j}}^2,...,z_{\overline{j}}^k\right\}\right),i< k,$ основаны на бо́льшем числе наблюдений, чем результаты фильтрации $\hat{x}^i=\hat{x}^i\left(\left\{z_{\overline{j}}^1,z_{\overline{j}}^2,...,z_{\overline{j}}^i\right\}\right)$. Поэтому дисперсия ошибок интерполированных оценок будет меньше (точнее, не больше) дисперсии ошибок фильтрации. Представляет большой практический интерес определение ковариационных матриц $P^{i\lambda}=M\left\{(x^{i\lambda}-x^i)(x^{i\lambda}-x^i)\right\}$ ошибок интерполяции. Для вычисления $P^{i\lambda}$ воспользуемся подходом, предложенным в работе [70]. Вычтем из правой и левой частей уравнения (2.14) истинное значение параметра x^i и произведем перестановку членов:

$$x^{i\lambda} - x^i - A^i x^{(i+1)\lambda} = \hat{x}^i - x^i - A^i \hat{x}_{2}^{i+1}$$
.

Перемножим правые и левые части этого равенства и найдем математические ожидания полученных произведений. После несложных преобразований [70] получим рекуррентную связь между ковариационными матрицами интерполированных оценок:

$$P^{i\lambda} = P^i + A^i (P^{(i+1)\lambda} - P_2^{i+1}) A^i, \quad i = k-1, \quad k-2, ..., 1,$$
 (2.15)

с граничным условием $P^{k\lambda} = P^k$.

Представленные соотношения (2.14) и (2.15) позволяют решать задачи нахождения сглаженных оценок и ковариационных матриц ошибок оценивания.

2.2.2. Рекуррентное оценивание при негауссовских наблюдениях

Существует ряд практических задач, в которых условные ПРВ наблюдений $w(\{x^i,z^i\})$, i=1,2,...,k, не являются гауссовскими, либо модель наблюдений содержит нелинейные функции $h^i(x^i)$ оцениваемого кадра x^i изображения:

$$z^{i} = h^{i}(x^{i}) + \theta^{i}, i = 1, 2, ..., k.$$
 (2.16)

В этих случаях (2.9) является системой нелинейных уравнений из-за нелинейности функции

$$\Xi'_{i}(x^{i}, z^{i}) = d\Xi_{i}(\{x^{i}, z^{i}\})/d\{x^{i}\} = d \ln w(\{x^{i}, z^{i}\})/d\{x^{i}\}.$$

Применение метода инвариантного погружения с добавлением ненулевого граничного условия приводит к уравнению (2.10):

$$\lambda^{k-1} - c^k = \Xi_k'(x^{k\lambda}, z^k), \tag{2.17}$$

где $c^k = \wp^k \lambda^k \neq 0$.

Однако интерполированные оценки $x^{k\lambda} = x^{k\lambda}(\hat{x}^k, c^k)$ для нелинейной функции $\Xi_k'(x^{k\lambda}, z^k)$ уже не могут считаться линейными функциями переменных \hat{x}^k, c^k . В рассматриваемом случае можно воспользоваться аппроксимацией неизвестных функций $x^{k\lambda} = x^{k\lambda}(\hat{x}^k, c^k)$ двух тензорных переменных конечным числом членов разложения в многомерный ряд Тейлора.

Анализ показывает, что такое разложение позволяет найти рекуррентные оценки, если ограничиться линейными членами по \hat{x}^k и членами с c^k в любой степени. Однако при хорошем качестве оценивания элементы c^k малы и применение высоких степеней в разложении, как правило, не приводит к заметному улучшению оценок.

Вместе с тем, даже разложение второго порядка потребует существенного усложнения алгоритма фильтрации. Поэтому, ес-

ли нет веских оснований для разложений более высоких порядков, будем аппроксимировать неизвестные функции линейными приближениями (2.11):

$$x^{k\lambda} = \hat{x}^k + P^k c^k$$
, $x^{(k-1)\lambda} = \hat{x}^{k-1} + P^{k-1} c^{k-1}$,

где $P^k = P_{\overline{jl}}$, \overline{j} , $\overline{l} \in J_k$, — пространственные матрицы.

После подстановки c^k из (2.17) с учетом оставшегося справедливым равенства (2.12), получим следующее выражение:

$$\hat{x}^{k} = \hat{x}_{3}^{k} + P^{k} \Xi_{k}' (x^{k\lambda} = \hat{x}_{3}^{k} + P_{3}^{k} \lambda^{k-1}, z^{k}) - -P^{k} \lambda^{k-1} + P_{3}^{k} \lambda^{k-1}.$$
(2.18)

При хорошей аппроксимации это равенство должно выполняться для любых значений λ^{k-1} . Полагая $\lambda^{k-1}=0$, получаем уравнение квазилинейной фильтрации по методу инвариантного погружения:

$$\hat{x}^k = \hat{x}_3^k + P^k \Xi_k'(\hat{x}_3^k, z^k). \tag{2.19}$$

Дифференцируя (2.18) по λ^{k-1} в точке $\lambda^{k-1}=0$, находим рекуррентную связь между приближенными ковариационными матрицами ошибок:

$$P^{k} = P_{9}^{k} (E - \Xi_{k}^{"}(\hat{x}_{9}^{k}, z^{k}) P_{9}^{k})^{-1},$$
(2.20)

где:

$$\Xi_{k}''(\hat{x}_{3}^{k}, z^{k}) = d\Xi_{k}'(\hat{x}_{3}^{k}, z^{k}) / d\hat{x}_{3}^{k};$$

$$P_{3}^{k} = \wp^{k-1} P^{k-1} \wp^{k-1} + V_{\xi}^{k}.$$

Для часто встречающейся модели наблюдений (2.16) нетрудно получить уравнения нелинейной фильтрации, являющиеся частным случаем уравнений (2.19), (2.20). Запишем выражение для условной ПРВ наблюдений

$$w(\{z^{i}, x^{i}\}) = 1/\sqrt{((2\pi)^{n} \det V^{i})} \times \exp\{-0.5(z^{i} - h^{i}(x^{i}))(V^{i})^{-1}(z^{i} - h^{i}(x^{i}))\}$$

и найдем логарифм этой ПРВ:

$$\Xi_i(z^i, x^i) = \ln w(z^i / x^i) =$$

$$= -0.5 \ln((2\pi)^n \det V^i) - 0.5(z^i - h^i(x^i))(V^i)^{-1}(z^i - h^i(x^i)).$$

После дифференцирования и подстановки в формулы (2.19), (2.20) получим следующие уравнения для решения задачи фильтрации последовательности изображений:

$$\hat{x}^k = \hat{x}_3^k + P^k \frac{dh^k(\hat{x}_3^k)}{d\hat{x}_3^k} (V^k)^{-1} (z^k - h^k(\hat{x}_3^k)), \qquad (2.21)$$

$$P^{k} = P_{3}^{k} (E - \Xi_{k}^{"}(\hat{x}_{3}^{k}, z^{k}) P_{3}^{k})^{-1},$$

где

$$\Xi_{k}''(\hat{x}_{3}^{k}, z^{k}) = \frac{d}{d\hat{x}_{3}^{k}} \left(\frac{dh^{k}(\hat{x}_{3}^{k})}{d\hat{x}_{3}^{k}} (V^{k})^{-1} (z^{k} - h^{k}(\hat{x}_{3}^{k})) \right).$$

Найденные с помощью линейного приближения (2.11) для метода инвариантного погружения уравнения (2.21) для векторного представления совпадают с уравнениями, полученными в работе [70] на основе поиска максимума апостериорной ПРВ $w(X_k/Z_k)$.

Алгоритмы интерполяции оценок (2.14), (2.15) можно использовать без изменений и для решения рассмотренной задачи нелинейного оценивания. Однако необходимо учитывать, что оценки и ковариационные матрицы ошибок будут приближенными, и поэтому применение алгоритмов должно сопровождаться тщательным статистическим моделированием.

Дальнейшее обобщение алгоритмов нелинейной фильтрации с помощью рассмотренного подхода достаточно просто может быть сделано и для более сложных негауссовских марковских последовательностей, описываемых уравнением вида (1.9):

$$x^{i} = \phi^{i}(x^{i-1}) + \mathcal{G}^{i}(x^{i-1})\xi^{i}, i = 1, 2, \dots,$$
(2.22)

где:

$$\{\xi_j^i:i\in I,\overline{j}\in\Omega\}\ -\text{стандартное гауссовское СП};$$

$$\xi^i=\{\xi_j^i:\overline{j}\in\Omega\}\ -i\text{-} \text{й кадр этого поля};$$

 $\phi^i(x^{i-1}) = \{\phi^i_j(x^{i-1}): \overline{j} \in \Omega\} \ - \ M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \text{ -матричная функция;}$ ция;

 $\mathcal{G}^i(x^{i-1}) = \{\mathcal{G}^i_{j\bar{t}}(x^{i-1}): \bar{j}, \bar{t} \in \Omega\} \quad \text{- тензоры ранга } 2n, \ \text{формирую-шие возмущающую компоненту } i\text{-го кадра из } \xi^i \ \text{по правилу ум-ножения тензоров } \mathcal{G}^i\xi^i = \left\{\mathcal{G}^i_{j\bar{t}}\right\}\left\{\xi^i_{\bar{t}}\right\} = \left\{\sum \mathcal{G}^i_{j\bar{t}}\xi^i_{\bar{t}}\right\} \ [60].$

Повторяя рассмотренный вывод уравнений фильтрации на основе метода инвариантного погружения, нетрудно убедиться, что описание СП с помощью нелинейной модели (2.22) приводит к изменениям только экстраполированной оценки и матрицы ковариаций ошибок экстраполяции:

$$\hat{x}_{3}^{i} = \varphi^{i}(\hat{x}^{i-1}),$$

$$P_{3}^{i} = \varphi'_{i}(\hat{x}^{i-1})P^{i-1}\varphi'_{i}(\hat{x}^{i-1}) + \mathcal{G}^{i}(\hat{x}^{i-1})V_{\xi}^{i}\mathcal{G}^{i}(\hat{x}^{i-1}),$$
(2.23)

где $\varphi'_i(\hat{x}^{i-1}) = d\varphi^i(\hat{x}^{i-1})/d\hat{x}^{i-1}$.

При этом алгоритм (2.21) с учетом (2.23) позволяет находить экстраполированные оценки СП $\left\{\hat{x}_{9\bar{j}}^i, \bar{j} \in J_{xi}\right\}$ и ковариационные матрицы ошибок экстраполяции $P_{9\bar{j}\bar{l}}^i$ рекуррентно по мере поступления наблюдений $\{z_{\bar{j}}^i, \bar{j} \in J_{zi}\}$ очередных кадров СП. Для случая гауссовских СП, определяемых линейными стохастическими уравнениями (2.22) при $\varphi_{\bar{j}}^i\left(x_{\bar{l}}^{i-1}\right) = \wp_{\bar{j}\bar{l}}^{i-1}x_{\bar{l}}^{i-1}$ и $\upsilon_{\bar{j}\bar{q}}^i\left(x_{\bar{l}}^{i-1}\right) = \upsilon_{\bar{j}\bar{q}}^i$, процедура фильтрации-экстраполяции (2.21) дает строго оптимальное решение задачи фильтрации последовательности изображений (см. с. 100).

Полученные уравнения тензорной фильтрации могут быть обобщены и на случай почти произвольного взаимодействия

$$z_{\overline{j}}^{i} = S_{\overline{j}}^{i}(x_{\overline{l}}^{i}, \theta_{\overline{l}}^{i}), \ \overline{j} \in J_{zi}, \overline{l} \in J_{xi},$$

$$(2.24)$$

информационного СП и помех [9, 18, 23].

На основе модифицированного метода инвариантного погружения и рассмотренных моделей можно синтезировать рекуррентные процедуры для проверки многоальтернативных гипотез.

Например,

$$H_{\nu}: \{z^{i} = S_{\nu}^{i}(x_{\nu}^{i}, \theta^{i})\},$$

где $S^i_{\nu}(x^i_{\nu},\theta^i)$, $\nu=0,1,...,M-1$ — различные, вообще говоря, нелинейные тензорные функции, описывающие взаимодействие различных негауссовских СП $x^i_{\nu \bar{\iota}}$ и помех [18].

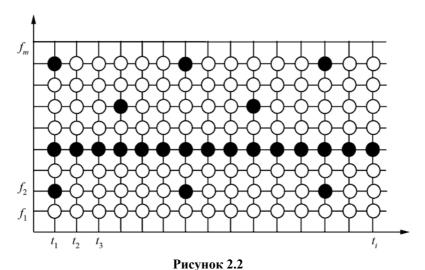
Полученные результаты дают возможность решения широкого круга реальных задач, связанных с обработкой нестационарных и негауссовских последовательностей многомерных изображений при почти произвольных преобразованиях информационных последовательностей и помех.

2.3. ОЦЕНИВАНИЕ ПОЛЕЙ КВАДРАТУРНЫХ КОМПОНЕНТ В МНОГОЧАСТОТНЫХ СИСТЕМАХ СВЯЗИ С ПИЛОТ-СИГНАЛАМИ

В последнее десятилетие интенсивное развитие получили мобильные многочастотные системы связи. В таких системах используется ортогональное частотное разделение с мультиплексированием (OFDM — Orthogonal Frequency Division Multiplexing) [54], представляющее собой специальный случай одновременной передачи потока цифровых данных по многим частотным каналам. Высокая спектральная эффективность обеспечивается достаточно близким расположением частот соседних поднесущих колебаний, которые генерируются совместно так, чтобы сигналы всех поднесущих были ортогональны. Это достигается благодаря применению быстрого Фурье-преобразования. В итоге формируется частотно-временная сигнальная матрица (рис. 2.2), которую можно представить в виде двумерного СП.

Одним из требований к таким системам является поддержание устойчивой связи с абонентами, перемещающимися в мегаполисах с высокой скоростью. Быстро изменяющиеся условия многолучевого распространения радиоволн приводят к возникно-

вению замираний сигналов, т.е. быстрых изменений амплитуды и фазы результирующего колебания во времени на каждой из используемых частот f_j , j=1,2,...,m. Вместе с тем, замирания на близких частотах, как правило, оказываются сильно коррелированными.



Размещение пилот-сигналов и информационных символов на частотно-временной сетке:

— информационный символ;
— пилот-сигнал

Это позволяет использовать специальные дискретные по времени измерительные сигналы (пилот-сигналы) на нескольких частотах, обеспечивающие оценивание изменяющихся амплитудно-фазовых характеристик всех принимаемых сигналов (рис. 2.2). В отличие от информационных, пилот-сигналы не передают какие-либо сообщения и поэтому снижают общую скорость передачи информации. Вместе с тем, применение пилот-сигналов позволяет дать оценку частотно-временного поля характеристик принимаемых сигналов и снизить вероятность ошибочного приема символов. Поэтому их число должно выбираться с учетом компромисса между снижением скорости передачи информации и качеством оценивания характеристик замираний.

Рассмотрим алгоритмы оптимального оценивания СП амплитудно-фазовых характеристик на основе анализа принятых

пилот-сигналов. Пусть на частоте f_j передается пилот-сигнал $S_0\cos 2\pi f_j t$. Сигнал, прошедший через канал с замираниями, на входе приемного устройства может быть представлен в виде

$$z_{j}(t) = \gamma_{j}(t)S_{0}\cos(2\pi f_{j}t + \varphi_{j}(t)) + n_{j}(t), \quad j = 1, 2, ..., m,$$

где:

 $\gamma_{i}(t)$ — случайный коэффициент передачи канала связи;

 $\varphi_{i}(t)$ — случайная фаза принимаемого сигнала;

 $n_j(t)$ — аддитивная помеха, которая обычно представляет собой белый гауссовский шум.

Эту же модель наблюдений удобно представить в форме

$$z_{j}(t) = A_{cj}(t)S_{o}\cos 2\pi f_{j}t + A_{sj}(t)S_{o}\sin 2\pi f_{j}t + n_{j}(t),$$

$$j = 1, 2, ..., m$$

с квадратурными составляющими

$$A_{cj}(t) = \gamma_j(t)\cos\varphi_j(t)$$
 и $A_{sj}(t) = \gamma_j(t)\sin\varphi_j(t)$

коэффициента передачи. В достаточно общем для приложений случае считается, что квадратурные составляющие имеют гауссовские ПРВ с различными средними $m_{\rm c}, m_s$ и дисперсиями $\sigma_{\rm c}^2, \sigma_s^2$, приводящие к совместному четырехпараметрическому распределению [54].

После демодуляции и нормировки наблюдения в моменты времени t_i и на частотах f_j , где передаются пилот-сигналы, получим

$$\begin{split} z_{cj}^i &= A_{cj}^i + \theta_{cj}^i, \ z_{sj}^i = A_{sj}^i + \theta_{sj}^i, \ j = j_1, j_2, ..., j_{M_i}, \\ i &= 1, 2, ..., \end{split} \tag{2.25}$$

где:

 M_i — число пилот-сигналов на i-й временной позиции;

 $\theta_{c\,j}^i,\,\theta_{s\,j}^i$ — независимые гауссовские CB с нулевыми средними и дисперсиями σ^2 .

Задача состоит в нахождении оценок \hat{A}^i_{g} , \hat{A}^i_{g} всех значений полей квадратурных составляющих A^i_{cj} , A^i_{sj} , j=1,2,...,m, i=1,2,... по частичным наблюдениям (2.25) значений этих полей в области пилот сигналов (рис. 2.2).

Поскольку оценивание двух квадратурных составляющих осуществляется с помощью одинаковых алгоритмов (см. с. 100), рассмотрим запись основных соотношений для косинусной комнаблюдений M_i Составим вектор из $\overline{z}_{\mathrm{c}}^i = (z_{\mathrm{c}j_1}^i \ z_{\mathrm{c}j_2}^i \ ... \ z_{\mathrm{c}j_{M_i}}^i)^T, \ i=1,2,...,k$ в области пилот-сигналов, а в вектор оцениваемых параметров включим все значения квадратурных составляющих: $\bar{x}_{c}^{i} = (A_{c1}^{i} \ A_{c2}^{i} \ ... \ A_{cm}^{i})^{T}$. Тогда совокупность наблюдений вектора \overline{x}_{0}^{i} на частичных фоне помех $\overline{\theta}_{\mathrm{c}}^{i} = (\theta_{\mathrm{c}j_{1}}^{i} \ \theta_{\mathrm{c}j_{2}}^{i} \ ... \ \theta_{\mathrm{c}j_{m}}^{i})^{T}$ можно записать в стандартном виде:

$$\overline{z}_{c}^{i} = C^{i}\overline{x}_{c}^{i} + \overline{\theta}_{c}^{i}, i = 1, 2, \dots,$$

где $C^i - M_i \times m$ — матрица, каждая строка которой содержит нули и единицу, соответствующую положению одного из M_i пилотсигналов.

На следующем шаге необходимо описать взаимосвязи между значениями квадратурной составляющей по времени и по частоте, т.е. задать КФ $B_{\rm c}(k,l)=M\left\{A_{\rm c\,j}^i\,A_{{\rm c}(j+l)}^{i+k}\right\}$ двумерного СП. Для записанной модели наблюдений можно использовать алгоритмы (1.57) построчного представления $\overline{x}^i=\rho_1\overline{x}^{i-1}+\overline{\xi}^i$, i=1,2,...,n, и фильтрации двумерных изображений (см. с. 100):

$$\hat{\overline{x}}^i = \hat{\overline{x}}_3^i + B^i (\overline{z}^i - C^i \hat{\overline{x}}_3^i), i = 1, 2, ...,$$

где:

$$\hat{\overline{x}}_{\scriptscriptstyle 3}^i = \rho_{\rm l} \hat{\overline{x}}^{i-1} \, ; \ P_{\scriptscriptstyle 3}^i = \rho_{\rm l}^2 P^{i-1} + V_{\xi}^i ; \ V_{\xi}^i = (1-\rho_{\rm l}^2) V_x^i ;$$

 $V_x^i = M\left\{\overline{x}^i\,\overline{x}^{iT}\right\}$ — корреляционная матрица информационного СП (см. (1.57)); $P_{21} = V_x^1$, $\hat{x}_2^1 = \overline{0}$.

Ковариационые матрицы ошибок фильтрации нужно либо хранить в памяти ЭВМ, либо вычислять по формулам

$$P^{i} = (E - B^{i}C^{i})P_{2}^{i}, \quad B^{i} = P_{2}^{i}C^{i}(\Gamma^{i})^{-1}, \quad \Gamma^{i} = C^{i}P_{2}^{i}C^{i} + V^{i},$$

требующим обращения матриц Γ^i , i = 1,2,... относительно небольшого ($M_i << m$) размера $M_i \times M_i$ элементов. Заметим, что представленный алгоритм позволяет по небольшому числу M_i пилот-сигналов проводить оценивание всех значений $\overline{x}_{\rm c}^i = (A_{\rm cl}^i A_{\rm c2}^i ... A_{\rm cm}^i)^T$ СП квадратурных составляющих. При этом возникает важная задача добиться наилучшего (с точки зрения минимума максимального значения дисперсии ошибки) расположения ограниченного числа пилот-сигналов на двумерной сетке отсчетов (рис. 2.2).

На рис. 2.3 представлена зависимость относительной максимальной дисперсии ошибки интерполяции $\sigma_{\varepsilon \max}^2 / \sigma_x^2$ для оптимального плана размещения пилот-сигналов от интервала корреляции $L=1/(1-\rho_1)$ при различном общем числе пилот-сигналов m_p на кадре размерм $m\times m=10\times 10$. Анализ кривых показывает, что при сильных шумах $(q=\sigma_x^2V^{-1}<1)$ приемлемого качества интерполяции можно достичь лишь при достаточно сильной корреляции $\rho_1>0.995$ и большом числе пилот-сигналов $m_p\geq m^2/5$.

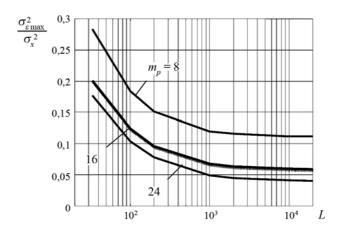


Рисунок 2.3 Графики зависимости дисперсии ошибки интерполяции от интервала корреляции: q = 1,0; m = 10

Приведенные результаты позволяют также дать рекомендации по методике выбора необходимого количества пилот-сигналов, размещаемых на сетке заданных размеров в зависимости от требуемого качества интерполяции при различных параметрах случайных полей квадратурных составляющих.

Заметим, что в рассматриваемых задачах КФ может значительно отличаться от экспоненциальной. Так, анализ экспериментальных данных [54] показывает, что в условиях мегаполиса при движении абонента хорошей аппроксимацией может быть равномерное распределение углов прихода сигналов и экспоненциальное распределение времени задержки: $w(\tau) = \lambda \exp(-\lambda \tau)$, $\tau \ge 0$.

В этом случае нормированная КФ запишется в виде произведения КФ по времени и по частоте:

$$R_{c}(k,l) = J_{0}(\omega_{max}(t_{i+k} - t_{i}))/(1 + (2\pi(f_{i+l} - f_{i})/\lambda)^{2},$$

где:

 $J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка;$

 $\omega_{\rm max}$ — максимальная доплеровская добавка частоты, вызванная движением абонента.

К сожалению, плавное изменение КФ во времени и по частоте не всегда позволяет адекватно представить корреляционные связи простейшей моделью авторегрессии. Поэтому целесообразно провести сравнительный анализ эффективности алгоритмов фильтрации, основанных на различных авторегрессионных уравнениях, и при необходимости использовать модели второго или более высоких порядков. При этом наиболее удобными и экономичными часто оказываются авторегрессионные модели СП с кратными корнями характеристических уравнений (см. §1.4).

2.4. РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Случайные поля часто применяются для представления пространственно-временных сигналов в различных информационных системах. При синтезе и анализе подобных систем используются методы оптимального линейного оценивания СП, заданных на многомерных сетках, на фоне аддитивных помех. Строго

оптимальное решение этой задачи [18, 101] предполагает применение методов векторной калмановской фильтрации. Однако при этом возникают значительные технические проблемы, связанные с большим числом вычислительных операций при реализации процедур оценивания в реальном масштабе времени.

Рассмотрим возможности построения рекуррентных по пространству алгоритмов оценивания, позволяющих значительно сократить число операций при сохранении эффективности, близкой к потенциально-достижимой.

Пусть марковское поле $X = \{x_{ij}\}$ задано на двумерной сетке $\Omega = \{(i,j): i = \overline{1...M_1}, \ j = \overline{1...M_2}\}$ простейшей AP моделью (1.30) с характеристическими корнями кратности (1,1):

$$x_{ij} = \rho_y x_{i-1,j} + \rho_x x_{i,j-1} - \rho_x \rho_y x_{i-1,j-1} + \xi_{ij}, (i,j) \in \Omega,$$

где:

 ρ_x, ρ_y — коэффициенты корреляции соседних элементов изображения по строке и столбцу соответственно;

 $\{\xi_{ij}\}$ — двумерное СП гауссовских СВ с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_{\xi}^2 = M\{\xi_{ij}^2\} = \left(1-\rho_x^2\right)\left(1-\rho_y^2\right)\sigma_x^2\;;\;\sigma_x^2 = M\{x_{ij}^2\}\;.$

Задача оптимального (в смысле минимума дисперсии ошибки) оценивания x_{ij} рассматривается обычно для аддитивной модели наблюдений:

$$z_{ij} = x_{i,j} + \theta_{ij}, \ (i,j) \in \Omega,$$
 (2.26)

где $\left\{ \theta_{ij} \right\}$ — белое гауссовское поле с дисперсией $\sigma_{ heta}^2 = M \left\{ \theta_{ij}^2 \right\}$.

В работе [101] задача оценивания двумерного поля X сводится к задаче калмановской фильтрации векторной случайной последовательности. При этом в расширенный вектор состояния \overline{x}_k включаются все элементы k-й строки изображения. Модель (1.9) для этого случая преобразуется к виду

$$\overline{x}_k = R\overline{x}_{k-1} + V\overline{\xi}_k \,, \tag{2.27}$$

где:

 $\overline{\xi}_k$ — вектор некоррелированных гауссовских СВ с ковариационной матрицей $V_\xi = VV^T = \left(1-\rho_y^2\right)V_x$;

 $R = \rho_{\nu}E$ — переходная матрица системы;

 $V_x = M\left\{\overline{x}_k\overline{x}_k^T\right\}$ — корреляционная матрица информационного СП;

E — единичная матрица.

После перехода к векторной форме модель наблюдений (2.26) запишется следующим образом:

$$\overline{z}_k = \overline{x}_k + \overline{\theta}_k, \ k = \overline{1...M_1},$$
 (2.28)

где $\overline{\theta}_k = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)^T$.

Соотношения (2.27), (2.28) приводят к следующему алгоритму построчной калмановской фильтрации [18]:

$$\hat{\overline{x}}_{3k} = R\overline{x}_{k-1}, \ , \ \hat{\overline{x}}_k = \hat{\overline{x}}_{3k} + P_k V_{\theta}^{-1} (\overline{z}_k - \hat{\overline{x}}_{3k}),$$
 (2.29)

$$P_{2k} = RP_{k-1}R^{T} + V_{\mathcal{E}}, \ P_{k} = P_{2k} \left(E + V_{\theta}^{-1} P_{2k} \right), \tag{2.30}$$

где начальные условия задаются следующим образом:

$$P_{a1} = V_x, \ \hat{\overline{x}}_{a1} = \overline{0} \ .$$
 (2.31)

В (2.29)-(2.31) используются векторно-матричные операции, и оценка $\hat{\overline{x}}_k$, получаемая на каждом шаге, является полной строкой изображения.

Оценим число элементарных операций умножения на каждом шаге вычислений. Учитывая тот факт, что коэффициенты R и V_{θ} являются, по существу, скалярами, вычислительная сложность процедуры пересчета матрицы ковариаций ошибок оценивания P_k в (2.30) составляет $O\!\left(M_2^4 + M_2^3 + M_2^2\right)$ операций умножения, где M_2 — длина строки. При этом основное число операций $O\!\left(M_2^4\right)$ требуется для вычисления обратной матрицы. Собственно, процедура вычисления оценки информационного поля в (2.30) требует $O\!\left(M_2^2 + 2M_2\right)$ умножений.

Рассмотрим возможности сокращения требуемого числа операций для решения задачи квазиоптимального оценивания двумерного СП. Для этого сначала выпишем элементы $P_{\ell j}^k = M\left\{ \varepsilon_\ell^k \varepsilon_j^k \right\}$ матрицы P_k , представляющие собой ковариации

ошибок оценивания $\varepsilon_\ell^k = x_\ell^k - \hat{x}_\ell^k$. Как следует из (2.13), матрица P_k образуется из матрицы P_{9k} с элементами $P_{9\ell j}^k = M\left\{u_{9\ell}^k u_{9j}^k\right\}$, равными ковариациям ошибок экстраполяции $u_{9\ell}^k = x_\ell^k - \hat{x}_{9\ell}^k$.

Выделим ℓ -й элемент k-й строки изображения и запишем (2.29) в следующей скалярной форме:

$$\widehat{x}_{\ell}^{k} = \widehat{x}_{3\ell}^{k} + \widehat{\widehat{u}}_{\ell}^{k}, \qquad (2.32)$$

где

$$\hat{\hat{u}}_{\ell}^{k} = V_{\theta}^{-1} \sum_{j=1}^{N} P_{\ell j}^{k} \left(z_{j}^{k} - \hat{x}_{2j}^{k} \right). \tag{2.33}$$

Анализ данного выражения показывает, что соотношение (2.33) можно рассматривать как оценку величины u_ℓ^k с помощью оптимального нерекурсивного линейного фильтра (фильтра Винера) [28]. При этом для оценки u_ℓ^k используется разность $y_j^k = z_j^k - \hat{x}_{3j}^k = x_j^k - \hat{x}_{2j}^k + \theta_j^k = u_j^k + \theta_j^k$.

Для преобразования винеровской нерекуррентной оценки (2.33) в калмановскую допустим, что модели состояния и наблюдения для u_{ℓ}^{k} записываются следующим образом [18]:

$$\begin{cases}
 u_{\ell} = \gamma_{\ell} u_{\ell-1} + \xi_{\ell}, \\
 y_{\ell} = u_{\ell} + \theta_{\ell},
\end{cases}$$
(2.34)

где индекс k опущен для сокращения записи.

Для того чтобы применить к (2.34) процедуру скалярного калмановского оценивания, необходимо определить коэффициенты γ_ℓ и дисперсию порождающего шума $V_{\xi\ell}^2$ на каждом шаге. Это можно сделать, исходя из (2.34) и (2.29). Действительно,

$$M\left\{u_{\ell}u_{\ell-1}\right\} = \gamma_{\ell}M\left\{u_{\ell-1}^2\right\},\,$$

где $M\left\{u_\ell u_{\ell-1}\right\}=P_{\Im\ell,\ell-1}^k$, $M\left\{u_\ell^2\right\}=P_{\Im\ell,\ell}^k$ — элементы матрицы $P_{\Im k}$.

Отсюда можно определить недостающие параметры модели:

$$\gamma_{\ell} = P_{2\ell,\ell-1}^{k} / P_{2\ell-1,\ell-1}^{k} , \qquad (2.35)$$

$$V_{\xi\ell} = M\left\{\xi_{\ell}^{2}\right\} = P_{3\ell,\ell}^{k} - \gamma_{\ell}^{2} P_{3\ell-1,\ell-1}^{k}. \tag{2.36}$$

С учетом (2.34) – (2.36) составим уравнения калмановского оценивания u_ℓ , состоящего из двух этапов, – фильтрации и последующего сглаживания, соответствующих прямому и обратному ходу алгоритма вдоль строки. Использование двухпроходного алгоритма продиктовано тем фактом, что в оценивании каждого отсчета x_{ij} по формулам (2.29) – (2.31) участвуют все элементы i-й строки изображения, следовательно, оценка производится на основе всех наблюдений \overline{z}_i . Поэтому для получения оптимальной оценки с использованием скалярного фильтра необходимо провести интерполяцию полученных прямым ходом оценок при помощи процедур, приведенных в 2.2.1.

Первый этап работы скалярного алгоритма имеет следующий вид:

$$P_{3\ell}^{u} = \gamma_{\ell}^{2} P_{\ell-1}^{u} + V_{\xi\ell}, \ P_{\ell}^{u} = P_{3\ell}^{u} \left(1 + V_{\theta}^{-1} P_{3\ell}^{u} \right)^{-1}, \tag{2.37}$$

$$\hat{u}_{3\ell} = \gamma_{\ell} \hat{u}_{\ell-1} , \ \hat{u}_{\ell} = \hat{u}_{3\ell} + P_{\ell}^{u} V_{\theta}^{-1} (y_{\ell} - \hat{u}_{3\ell}) , \tag{2.38}$$

и начальные условия задаются в виде

$$P_{31}^{u} = P_{311}, \ \hat{u}_{31} = 0, \tag{2.39}$$

где $\ell = 1...M_1$.

Bторой эman предполагает использование значений P_{ℓ}^u и $P_{\mathfrak{I}(\ell+1)}^u$, вычисленных на предыдущем этапе:

$$\widehat{\hat{u}}_N = \widehat{u}_N \,, \tag{2.40}$$

$$\widehat{\hat{u}}_{\ell} = \widehat{u}_{\ell} + \left(P_{\ell}^{u} / P_{\mathfrak{I}(\ell+1)}^{u}\right) \gamma_{\ell} \left(\widehat{\hat{u}}_{\ell+1} - \gamma_{\ell} \widehat{u}_{\ell}\right), \tag{2.41}$$

где $\ell = M_1 - 1, M_1 - 2, \dots, 1$.

Для вычисления коэффициентов γ_ℓ и $V_{\xi\ell}$ требуются точные значения $P_{\mathfrak{I}^k}^k$ элементов матрицы $P_{\mathfrak{I}^k}^k$. Как показывают эксперименты, значения элементов $P_{\mathfrak{I}^k}^k$, $k=1...M_2$, устанавливаются достаточно быстро. Например, при $\rho=0.9$, $M_2=100$ уже на 5 шаге

(после оценивания 5 строки изображения) элементы матрицы P_3^k практически не изменяются. Поэтому коэффициенты γ_ℓ и $V_{\xi\ell}$ предлагается вычислять на основе установившегося значения этой матрицы $P_3^k = P_3$.

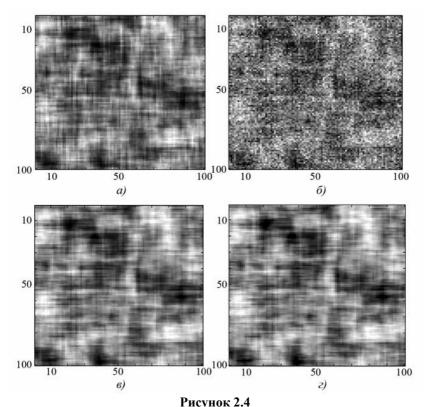
Таким образом, предлагается следующий квазиоптимальный алгоритм оценивания. Для получения установившегося значения матрицы P_3^k первые несколько строк изображения оцениваются при помощи векторного фильтра Калмана (2.29) — (2.31). Затем осуществляется рекуррентное по пространству оценивание на основе скалярной процедуры (2.37) — (2.41) и установившихся значений матричных коэффициентов P и P_3 .

Оценим вычислительную сложность алгоритма (2.37) — (2.41) и выигрыш данной процедуры перед векторным фильтром при условии предварительного пересчета матричных коэффициентов фильтра, то есть будем сравнивать лишь вычислительную сложность получения оценки по формулам (2.30) и (2.27) — (2.31) соответственно.

Для вычисления коэффициентов γ_ℓ , $V_{\xi\ell}$ на каждом шаге требуется 3 умножения, для прямого прохода алгоритма — 10 умножений, и для обратного прохода — еще 3 умножения. Таким образом, всего для оценки одной строки изображения требуется около $16M_2$ умножений. Сравнивая полученную величину с количеством операций для получения векторной оценки (2.30), можно заключить, что выигрыш в числе операций, требуемых для фильтрации одной строки изображения, составляет порядка M_2 .

Для анализа эффективности предложенных алгоритмов были проведены вычисления на ЭВМ. Результаты, полученные при обработке изображений с помощью двух алгоритмов фильтрации (оптимального и квазиоптимального), представлены на рис. 2.4.

На рис. 2.4,a показано смоделированное изображение X размером 100×100 элементов. Параметры модели: $\rho_y = \rho_x = 0.9$, $\sigma_x^2 = 1$. На рис. 2.4, δ показано изображение в смеси с реализацией шума с дисперсией $\sigma_\theta^2 = 1$. На рис. 2.4, δ и ε представлены отфильтрованные изображения с помощью оптимального (рис. 2.4, ε) и квазиоптимального (рис. 2.4, ε) алгоритмов.



Смоделированное изображение (a); зашумленное изображение (δ); оптимальная оценка (ϵ); квазиоптимальная оценка (ϵ)

На рис. 2.5 показаны точные (значки +) и приближенные (значки \circ) зависимости интегральных невязок u_ℓ и $\hat{\bar{u}}_\ell$ от номера элемента для последней строки изображения. Анализ показывает, что относительная ошибка оценивания коэффициентов составляет около 5%.

На рис. 2.6 представлена зависимость дисперсии ошибки фильтрации от номера j элемента в последней строке изображения размером 100×100 элементов при использовании векторного оптимального фильтра (2.29), (2.30) (сплошные линии) и квазиоптимального скалярного алгоритма (2.33), (2.34) (пунктир) при коэффициентах корреляции $\rho_x = 0.9$, $\rho_y = 0.9$ и двух отношениях сигнал/шум $q = \sigma_x^2 / \sigma_\theta^2$.

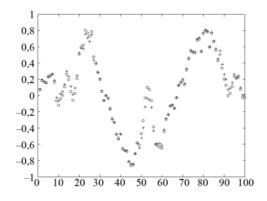
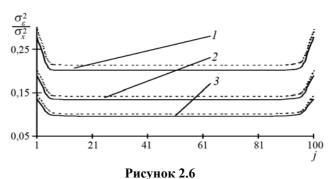


Рисунок 2.5 Интегральные невязки последней строки изображения



Дисперсия ошибки фильтрации элементов последней строки: I - SNR = 1; 2 - SNR = 2; 3 - SNR = 5

На рис. 2.7 и 2.8 показана дисперсия ошибки фильтрации среднего и крайних элементов последней строки. Необходимо отметить, что дисперсия ошибки на рис. 2.6-2.8 является минимально достижимой.

Несмотря на то, что рассмотренный алгоритм не является строго оптимальным, можно высказать предположение о том, что соответствующий подбор параметров и порядка AP модели (2.34) позволит получить еще более близкие к оптимальным решения. Тем не менее, следует отметить необходимость дальнейшего изучения идей, положенных в основу данного квазиоптимального алгоритма.

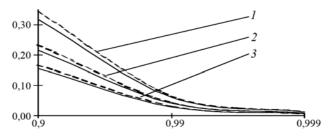


Рисунок 2.7

Дисперсия ошибки фильтрации среднего элемента строки: I - SNR = 1; 2 - SNR = 2; 3 - SNR = 5

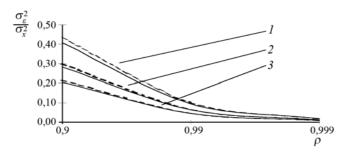


Рисунок 2.8

Дисперсия ошибки фильтрации крайних элементов строки:

$$1 - \text{SNR} = 1$$
; $2 - \text{SNR} = 2$; $3 - \text{SNR} = 5$

Предложенный подход позволяет получить алгоритмы фильтрации изображений, важным достоинством которых является простота технической реализации при весьма незначительном проигрыше перед оптимальными процедурами по величине дисперсии ошибки, не превышающем 3...6%. Вместе с тем, выигрыш в числе арифметических операций по сравнению, например, с аналогичным оптимальным алгоритмом [101], может быть оценен примерно в M_2^2 раз, где M_2 – длина строки изображения.

2.5. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Одной из сложных задач, возникающих при реализации алгоритмов фильтрации последовательностей изображений на многомерных сетках, является анализ их эффективности. Формально, пространственные ковариационные матрицы ошибок оценивания $P_{\bar{\jmath}\bar{l}}^k$, $\bar{j} \in J_k$, k=1,2,..., и прогнозирования $P_{\bar{\jmath}\bar{l}}^k$, $\bar{j} \in J_k$, k=1,2,... можно вычислить с помощью рекуррентных соотношений. Если необходимо провести сравнение алгоритмов при различных значениях параметров стохастических уравнений и уровнях помех, то определение даже установившихся значений элементов ковариационных матриц становится весьма трудоемкой задачей из-за большого объема вычислений. Вместе с тем, имеется относительно простой способ определения эффективности оценивания однородных полей на бесконечных сетках, основанный на основных положениях теории фильтра Винера [17, 70].

Для нахождения дисперсии ошибки σ_{ε}^2 оптимальной фильтрации рассмотрим однородное информационное СП $x_{\overline{j}}$, заданное на n-мерной сетке J бесконечных размеров. Пусть на основе наблюдений $z_{\overline{j}} = x_{\overline{j}} + \theta_{\overline{j}}, \ \overline{j} = (j_1 \ j_2 ... j_n)^T \in J$ необходимо дать наилучшую (в смысле минимума дисперсии ошибки) линейную оценку $\hat{x}_{\overline{0}} = \sum_{\overline{j} \in J} h_{\overline{j}} z_{\overline{j}}$ элемента $x_{\overline{0}}$ информационного СП.

Условие минимума дисперсии

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = M\left\{ (\hat{x}_{\overline{0}} - x_{\overline{0}})^{2} \right\} = M\left\{ \left(\sum_{\overline{j} \in J} h_{\overline{j}} z_{\overline{j}} - x_{\overline{0}} \right)^{2} \right\}$$

запишется как система линейных уравнений

$$h_{\overline{q}}\sigma^2 + \sum_{\overline{j} \in J} h_{\overline{j}} B(\overline{q} - \overline{j}) = B(\overline{q}), \quad \overline{q} \in J , \qquad (2.42)$$

которую можно рассматривать как пространственный аналог уравнений Винера—Хопфа; $B(\overline{q}) = M\{x_{\overline{l}}, x_{\overline{l}+\overline{q}}\}$ — ковариационная

функция информационного СП. Точно так же, как и для одномерного фильтра, минимально достижимая дисперсия ошибки определяется соотношением

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma^2 h_{\overline{0}}$$

где $\sigma^2=M\left\{\theta_{\overline{j}}^2\right\}$ — дисперсия аддитивного однородного пространственного белого шума $\theta_{\overline{j}},\overline{j}\in J$.

С помощью многомерного дискретного Фурье-преобразования может быть найдено решение системы (2.42) и выражение для дисперсии ошибки:

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = \frac{\sigma^{2}}{(2\pi)^{n}} \int_{\Omega} \frac{f_{D}(\overline{\lambda})}{\sigma^{2} + f_{D}(\overline{\lambda})} d\overline{\lambda},$$

где:

 $f_D(\overline{\lambda})$ — энергетический спектр информационного СП (дискретное n-мерное Фурье-преобразование от $B(\overline{q})$);

$$\overline{\lambda} = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^T;$$

$$\sigma_x^2 = M \left\{ x_{\overline{j}}^2 \right\}.$$

К сожалению, как показывает анализ, представить результаты в аналитической форме удается только для «разделимых» экспоненциальных корреляционных функций $B(\overline{q}) = \prod_{i=1}^n B(q_i)$ [17,

72]. Например, для СП с экспоненциальной КФ $B(\overline{q}) = \sigma_x^2 \prod_{i=1}^n \rho_i^{|q|_i}$ находим

$$\frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{\sigma_{x}^{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n}} \int_{-\pi}^{\pi} ... \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\prod_{i=1}^{n} (1 - \rho_{i}^{2})}{q \prod_{i=1}^{n} (1 - \rho_{i}^{2}) + \prod_{i=1}^{n} (1 + \rho_{i}^{2} - 2\rho_{i} \cos \lambda_{i})} d\overline{\lambda},$$
(2.43)

где $q = \sigma_x^2/\sigma^2$ — отношение дисперсий информационного и мешающего СП.

Заметим, что для двумерного СП это соотношение было получено и проанализировано в работе [72].

Безусловно, исследование эффективности фильтрации с разделимыми КФ представляет определенный самостоятельный интерес. Однако здесь появляется уникальная возможность провести сравнение точной величины дисперсии ошибки (2.43) фильтрации СП на многомерной сетке J с аппроксимирующей это соотношение формулой для дисперсии СП непрерывного аргумента [17].

Действительно, предполагая ячейки пространственной сетки J малыми по сравнению с интервалом корреляции, заменим систему (2.42) одним интегральным уравнением:

$$h(\overline{u})\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}^n} h(\overline{v})B(\overline{u} - \overline{v})d\overline{v} = B(\overline{u}), \ \overline{u} \in R_n.$$

Можно показать, что весовая функция $h(\overline{u})$ соответствует оптимальной (в смысле минимума дисперсии ошибки) оценке

$$\hat{x}(\overline{0}) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} h(\overline{u}) z(\overline{u}) d\overline{u}$$

в задаче фильтрации информационного СП $x(\overline{u}), \overline{u} \in R_n$, непрерывного аргумента с КФ по наблюдениям

$$z(\overline{u}) = x(\overline{u}) + \theta(\overline{u})$$
,

где
$$M\{\theta(\overline{u})\}=0$$
;

$$M\{\theta(\overline{u})\theta(\overline{v})\} = \sigma^2\delta(\overline{u} - \overline{v});$$

 $\delta(\overline{u})$ – обобщенная дельта-функция:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} h(\overline{u}) \delta(\overline{u} - \overline{v}) d\overline{u} = H(\overline{v}).$$

При этом дисперсия ошибки оптимальной фильтрации СП на многомерной сетке может быть приближенно найдена по формуле

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = \sigma^{2} h_{\overline{0}} \cong \frac{\sigma^{2}}{(2\pi)^{n}} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\overline{\lambda})}{\sigma^{2} + f(\overline{\lambda})} d\overline{\lambda}, \qquad (2.44)$$

где:

$$f(\overline{\lambda}) = \int_{\mathbb{R}^n} B(\overline{u}) \exp(-j(\overline{\lambda}, \overline{u})) d\overline{u} . \qquad (2.45)$$

Фурье-преобразование СП $x(\overline{u}), \ \overline{u}, \overline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ непрерывного аргумента

$$(\overline{\lambda}, \overline{u}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i} u_{i} ; d\overline{\lambda} = d\lambda_{1} d\lambda_{2} ... d\lambda_{n}.$$

Представим теперь СП $x_{\overline{i}}$ дискретного аргумента $\overline{i} \in R^n$ как пространственную дискретизацию СП $x(\overline{u})$ непрерывного аргумента $\overline{u} \in R^n$ с экспоненциальной К Φ :

$$B(\bar{\tau}) = \sigma_x^2 \prod_{i=1}^n \exp(-\alpha_i |\tau_i|),$$

где $\exp(-\alpha_i) = \rho_i$ или $\alpha_i = -\ln \rho_i$.

Поскольку

$$f(\overline{\lambda}) = 2^n \sigma_x^2 / \prod_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha_i^2} + 1 \right),$$

то после преобразований получаем выражение, удобное для численных расчетов:

$$\frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{\sigma_{x}^{2}} = \frac{1}{(0,5\pi)^{n}} \int_{0}^{\pi/2} \dots \int_{0}^{\pi/2} \frac{d\overline{\varphi}}{1 + \frac{q}{\gamma} \prod_{i=1}^{n} \cos^{2} \varphi_{i}},$$
(2.46)

где
$$q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}$$
; $\gamma = \prod_{i=1}^n \alpha_i / 2^n$.

Для оценки сходимости полученного аппроксимирующего соотношения к точному результату были произведены численные расчеты для СП размерности n=1,2,3.

На рис. 2.9 представлены некоторые результаты этих расчетов при различных коэффициентах корреляции, иллюстрирующие сходимость зависимостей дисперсии ошибки фильтрации СП непрерывного аргумента (пунктир) к соответствующей кривой для СП дискретного аргумента (сплошные линии).

Анализ приведенных графиков показывает, что для СП с экспоненциальными КФ относительная дисперсия ошибки (2.46) при любом n сходится к (2.43), если $q/\gamma \to 0$. На рис. 2.10 показана зависимость граничных значений q и $(1-\rho)$ для СП размерности n=2 при $\rho_1=\rho_2=\rho$, обеспечивающая заданную относительную погрешность аппроксимации $Q=\left|\sigma_{\rm непр}^2-\sigma_{\rm дискр}^2\right|/\sigma_{\rm непр}^2$.

Таким образом, полученные результаты позволяют определить область решений параметров СП, для которых возможна замена сложных выражений для дисперсии ошибки оптимальной фильтрации СП дискретного аргумента простыми соотношениями для СП непрерывного аргумента.

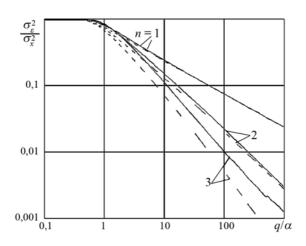


Рисунок 2.9
Графики зависимости дисперсий ошибок фильтрации СП непрерывного аргумента (пунктир) и дискретного аргумента (сплошные линии)

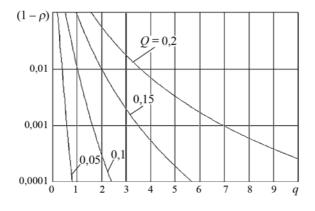


Рисунок 2.10 Области граничных значений параметров СП для различных допустимых ошибок аппроксимации Q

Итак, для приближенного анализа эффективности фильтрации СП на многомерных сетках с малыми ячейками достаточно найти спектральную плотность (2.45) информационного СП и произвести вычисления по формуле (2.44). При этом основные трудности обычно связаны с n-кратным интегрированием (2.45) и, особенно, (2.44). Эти трудности можно заметно снизить в случаях, когда СП $x(\overline{u})$ изотропно во всем пространстве R^n или на каких-либо подпространствах $\Omega_m \subset R^n$.

Действительно, после введения сферических координат в R^n формулы (2.44) и (2.45) для изотропных СП преобразуются к виду:

$$\frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{\sigma_{\theta}^{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} \Gamma(0,5n)} \int_{0}^{\infty} \frac{k^{n-1} f(k)}{\sigma_{\theta}^{2} + f(k)} dk , \qquad (2.47)$$

$$f(k) = (2\pi)^{n/2} \int_{0}^{\infty} B(\rho) \rho^{n-1} \frac{J_{0,5n-1}}{(k\rho)^{0,5n-1}} d\rho, \qquad (2.48)$$

где:

 $J_{\nu}(\cdot)- функция Бесселя порядка \ \nu \ ;$ $\Gamma(\cdot)- полная гамма-функция;$ $k=|\overline{\lambda}| \ ; \ \ \rho=|\overline{u}| \ .$

Для изотропных СП на пространствах с нечетным числом измерений функции Бесселя в (2.48) могут быть выражены через элементарные функции. В этих случаях расчеты по формулам (2.47), (2.48) выполняются достаточно просто. Например, для изотропных СП с

$$B(\rho) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha \rho), \ \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^n u_k^2}$$

получим

$$\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\theta}^2} = \frac{\gamma q}{(2\pi)^{n-1} \Gamma(0,5n)} \int_0^{\infty} \frac{v^{n-1} \Phi_n(v)}{\gamma + \Phi_n(v)} dv , \qquad (2.49)$$

где:

 $\gamma=lpha^n/q$; $q=\sigma_x^2/\sigma_\theta^2$ — отношение дисперсий информационного и мешающего СП;

$$\Phi_1(\nu)=2\,/\,(1+\nu^2), \qquad \qquad \Phi_3(\nu)=8\pi\,/\,(1+\nu^2)^2\,;$$

$$\Phi_5(\nu)=64\pi^2\big/(1+\nu^2)^3\,; \quad \Phi_7(\nu)=96\pi^3\big/(1+\nu^2)^4 \quad \text{и т.д.}$$

Для изотропных экспоненциально-коррелированных СП, заданных на пространствах с четным числом измерений n=2N, известно простое выражение для интеграла (2.48):

$$f(k) = (2\pi)^{M} \sigma_{x}^{2} k^{-2(M-1)} (-1)^{M} \frac{d^{M}}{d\alpha^{M}} \left(\frac{(\sqrt{\alpha^{2} + k^{2}} - \alpha)^{M-1}}{\sqrt{\alpha^{2} + k^{2}}} \right).$$

При этом минимальная дисперсия ошибки фильтрации также может быть представлена в виде формул

$$\Phi_2(\nu) = 2\pi / \sqrt{(1+\nu^2)^3}$$
; $\Phi_4(\nu) = 6\pi / \sqrt{(1+\nu^2)^5}$ и т.д.

К сожалению, для больших размерностей n однородных СП получаются довольно громоздкие соотношения, и при расчетах по формуле (2.49) целесообразно применять численные методы. Вместе с тем, как показывает анализ [17], при увеличении обобщенного параметра $\gamma = \alpha^n/q$ дисперсия ошибки оптимальной фильтрации рассмотренных изотропных СП асимптотически схолится к величине

$$\sigma_{\varepsilon}^{2}/\sigma_{x}^{2} = \beta_{n}^{n+1}\sqrt{\gamma} , \qquad (2.50)$$

где $\beta_1\cong 0,707;\ \beta_2\cong 0,66;\ \beta_3\cong 0,63;\ \beta_4\cong 0,606;\ \dots\beta_\infty\cong 0,58$.

Приведенные соотношения дают возможность получения довольно простых оценок потенциальной точности фильтрации СП на фоне помех. Кроме того, полученные граничные значения дисперсии фильтрации позволяют построить характеристики оптимальных алгоритмов обнаружения пространственных аномалий на фоне мешающих многомерных изображений.

Глава 3

ОБНАРУЖЕНИЕ АНОМАЛИЙ НА ФОНЕ МЕШАЮЩИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Во многих приложениях возникает задача обнаружения аномалий, которые могут появиться на очередном многомерном кадре последовательности изображений. Такими аномалиями могут быть, например, очаги лесных пожаров, патологические изменения на медицинских изображениях, новые объекты в охраняемой зоне и другие.

Показано, что существуют четыре эквивалентные формы записи оптимальных процедур, существенно отличающиеся вычислительной сложностью. Особое внимание уделено проблемам обнаружения аномалий с неизвестными параметрами.

3.1. ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Задача обнаружения формализуется следующим образом [9–17, 20–24]. Пусть производятся наблюдения

$$z_{\overline{j}}^{t} = x_{\overline{j}}^{t}(\overline{\chi}_{t}) + \theta_{\overline{j}}^{t}, \ \overline{j} \in J_{t}, \ t = 1...k,$$

$$(3.1)$$

СП $x_{\bar{j}}^t$ с пространственно-временными корреляционными связями и аддитивного СП помех $\theta_{\bar{j}}^t$, состоящего из независимых случайных величин (СВ) с нулевыми средними и дисперсиями V_{θ} . Вектор параметров $\bar{\chi}_t$ позволяет учесть, например, возможные взаимные пространственные смещения и повороты соседних кадров изображения.

Появление детерминированного сигнала приводит к изменению модели (3.1) лишь в области индексов $\overline{j} \in G \subset J$ (рис. 3.1). В частности, область G может быть частью последнего наблюдаемого кадра:

$$z_{\overline{i}}^{k} = s_{\overline{i}} + x_{\overline{i}}^{k}(\overline{x}_{t}) + \theta_{\overline{i}}^{k}, \ \overline{j} \in G,$$

$$(3.2)$$

где $\{s_{\overline{j}},\ \overline{j}\in G\}$ — отсчеты полезного (обнаруживаемого) сигнала.

В рассмотренных условиях необходимо найти правило проверки гипотезы H_0 об отсутствии аномалии в области G при альтернативном предположении H_1 о справедливости модели (3.2).



Рисунок 3.1 Область G действия сигнала; Q — дополнительная область

При заданных вероятностных характеристиках компонент моделей (3.1), (3.2) могут быть определены соответствующие условные ПРВ наблюдений $w(Z\,|\,H_0)$ и $w(Z\,|\,H_1)$. Поэтому для решения задачи обнаружения следует воспользоваться сравнением с пороговым уровнем Λ_0 ОП:

$$\Lambda = \frac{w(Z \mid H_1)}{w(Z \mid H_0)} \begin{cases} \geq \Lambda_0 - \text{сигнал есть,} \\ < \Lambda_0 - \text{сигнала нет.} \end{cases}$$
 (3.3)

Для упрощения вычислений представим условные ПРВ в виде произведений:

$$w(Z \mid H_{0,1}) = w(Z_0 \mid H_{0,1})w(Z_G \mid Z_0, H_{0,1}),$$

где:

 Z_G – совокупность наблюдений по области G;

 Z_0 — совокупность всех наблюдений, не принадлежащих области предполагаемого сигнала.

Поскольку $w(Z_0 \mid H_0) = w(Z_0 \mid H_1)$, ОП (3.3) перепишется в форме

$$\Lambda = \frac{w(Z_G \mid Z_0, H_1)}{w(Z_G \mid Z_0, H_0)}.$$
(3.4)

Будем аппроксимировать условные ПРВ, входящие в ОП (3.4), гауссовскими распределениями:

$$w(Z_G \mid Z_0, H_{0,1}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det V_{0,1}}} \exp(-0.5 \parallel z^k - m_{0,1} \parallel_{V_{0,1}^{-1}}^2),$$
(3.5)

где:

$$m_0 = \{m_{0\overline{j}}\}$$
 , $V_0 = \{V_{0\overline{l}\,\overline{j}}\}$ и $m_1 = \{m_{1\overline{j}}\}$, $V_1 = \{V_{1\,\overline{l}\,\overline{j}}\}$, \overline{l} , $\overline{j} \in G$, — условные математические ожидания и пространственные ковариационные матрицы наблюдений Z_G при отсутствии и наличии полезного сигнала соответственно.

С учетом моделей наблюдений (3.1), (3.2) нетрудно получить следующие формулы для условных средних:

$$m_{0\overline{j}} = \widehat{x}_{3\overline{j}}^k, \ m_{1\overline{j}} = s_{\overline{j}} + x_{3\overline{j}}^k, \ \overline{j} \in G,$$

где $\widehat{x}_{\widehat{\imath}\widehat{j}}^k=M\{x_{\widehat{j}}^k\mid Z_0\}$ — оптимальный прогноз значений СП $x_{\widehat{j}}^k,\ \overline{j}\in G$, построенный на основе всех имеющихся наблюдений Z_0 , не принадлежащих области сигнала.

Пространственные матрицы V_0 и V_1 оказываются одинаковыми: $V_0 = V_1 = V = P_3 + V_\theta$, где P_3 — ковариационная матрица ошибок оптимального прогноза. После подстановки приведенных соотношений в (3.4), (3.5) и логарифмирования находим следующий алгоритм обнаружения сигнала:

$$L = \sum_{\overline{l}, \overline{j} \in G} s_{\overline{j}} V_{\overline{l}}^{-1} (z_{\overline{j}}^{t} - \widehat{x}_{9\overline{j}}^{t}) \begin{cases} \geq \Lambda_{0} - \text{сигнал есть,} \\ < \Lambda_{0} - \text{сигнала нет,} \end{cases}$$
(3.6)

где $\lambda = \ln \Lambda_0 + 0.5 \left\| s_{\overline{j}} \right\|_{V^{-1}}^2 -$ порог обнаружения.

Таким образом, процедура обнаружения аномалий включает в себя компенсацию мешающих изображений с помощью вычитания из наблюдения $z_{\bar{j}}^k$ оптимального прогноза $\hat{x}_{3\bar{j}}^k$, найденного на основе всех наблюдений, не принадлежащих области G. Назовем этот вид прогноза прогнозом в область (рис. 3.2,a). После компенсации мешающих СП осуществляется линейное весовое суммирование остатков $z_{\bar{i}}^k - \hat{x}_{3\bar{i}}^k$.

Другая форма записи оптимальной процедуры обнаружения может быть получена в предположении, что полезный сигнал может занимать все имеющиеся кадры изображения, то есть область G включает в себя все многомерные сетки $J_1, J_2, ..., J_k$. Поскольку вне расширенной области G значений сигнала наблюде-

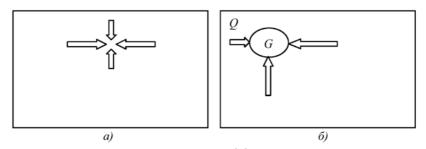


Рисунок 3.2 Прогноз: a – в область; δ – в точку

ния отсутствуют, то наилучшим будет прогноз $x_{9\overline{j}}^k \equiv 0, \ \overline{j} \in G$ с ковариационной матрицей ошибок P_9 равной ковариационной матрице помехи $V_x = M\left\{\overline{x}\,\overline{x}^T\right\}$. Таким образом, оптимальный алгоритм обнаружения (3.6) принимает следующий вид:

$$L = \sum_{\overline{l}, \overline{j} \in G} s_{\overline{l}} V_{\overline{l}, \overline{j}}^{-1} z_{\overline{j}}^{k} \begin{cases} \geq \Lambda_{0} - \text{сигнал есть,} \\ < \Lambda_{0} - \text{сигнала нет,} \end{cases}$$
(3.7)

где $V_{\overline{l}\ \overline{j}}=V_{x\overline{l}\ \overline{j}}+V_{\theta}E_{\overline{l}\ \overline{j}}$; $V_{x\overline{l}\ \overline{j}},\ \overline{l}\,,\overline{j}\in G$ — ковариационная матрица мешающего изображения.

Непосредственная реализация процедуры (3.7) затруднительна из-за большого числа вычислительных операций. Тем не менее, раскладывая пространственную симметрическую матрицу в произведение двух треугольных $V_{\overline{l}\ \overline{j}}^{-1}=A_{\overline{l}\,\overline{v}}A_{\overline{v}\,\overline{l}}$, \overline{l} , \overline{v} , $\overline{j}\in G$, можно представить (3.7) в форме

$$L = \sum_{\overline{l}, \overline{j}, \overline{\nu} \in G} s_{\overline{l}} A_{\overline{l}\overline{\nu}} A_{\overline{\nu}\overline{j}} z_{\overline{j}}^{t} \begin{cases} \geq \Lambda_{0} - \text{сигнал есть,} \\ < \Lambda_{0} - \text{сигнала нет.} \end{cases}$$
(3.8)

Такой алгоритм состоит из двух этапов. На первом осуществляется «выбеливание» наблюдений путем перемножения $z_{B\overline{v}}^k = A_{\overline{v},\overline{l}} z_{\overline{l}}^k$. Действительно,

$$M\left\{z_{B\overline{\nu}}^kz_{B\overline{q}}^k\right\}=M\left\{A_{\overline{\nu}\overline{j}}z_{\overline{j}}^kz_{\overline{l}}^kA_{\overline{l}\overline{q}}\right\}=A_{\overline{\nu}\overline{j}}(V_{x\overline{j}\overline{l}}+V_{\theta}E_{\overline{j}\overline{l}})A_{\overline{l}\overline{q}}=E_{\overline{\nu}\overline{q}}\;,$$

т.е. СП $z_{B\overline{\nu}}^k$ состоит из некоррелированных элементов с единичной дисперсией. На втором этапе выполняется стандартная обработка некоррелированных наблюдений с учетом искаженной за счет декорреляции формы сигнала $s_{\text{иск }\overline{\nu}} = s_{\overline{l}} A_{\overline{l}\overline{\nu}}$.

Рассмотренные алгоритмы обнаружения предполагают разделение операций выбеливания наблюдений и весового суммирования с учетом формы и временного положения сигнала. При этом построение выбеливающих фильтров составляет специальную задачу, которую во многих случаях приходится решать при изменяющихся корреляционных свойствах помех на основе фильтров с изменяющимися параметрами. Отдельная операция весового суммирования становится особенно важной

при неизвестном временном положении сигнала, когда необходимо формировать последовательность значений статистики λ для каждого из возможных положений полезного сигнала, т.е. обрабатывать декоррелированные наблюдения в скользящем окне.

Во многих случаях такой подход позволяет найти приемлемые для практики квазиоптимальные алгоритмы выбеливания [13]. При этом самостоятельное рассмотрение адаптивных рекурсивных фильтров, близких по свойствам к выбеливающим, является важным направлением поиска возможностей относительно простой технической или программной реализации системы обработки последовательностей изображений. Новым качеством, которым обладает алгоритм (3.8) по отношению к (3.6), является разделение трудоемкой операции выбеливания, не связанной с формой сигнала, и относительно простого весового суммирования, учитывающего вид полезного сигнала. Это позволяет достаточно просто решать как задачи обнаружения аномалий с неизвестными параметрами положения, так и более сложные проблемы многоальтернативного обнаружения (распознавания) нескольких видов сигналов.

Выведем еще одну форму записи решающего правила [24]. Рассмотрим преобразование $V^{-1}\overline{z}=V_{l\ \bar{j}}^{-1}z_{\bar{j}}^{k}$ в (3.7) и представим его в другом виде. Для этого разобьем вектор всех наблюдений $\overline{z}=z_{\bar{j}}^{k}$ на два: вектор некоторой части наблюдений $\overline{z}_{1}=\left(z_{1},...,z_{m}\right)^{T}$ и вектор остальных наблюдений $\overline{z}_{2}=\left(z_{m+1},...,z_{n}\right)^{T}$, а матрицу ковариаций мешающего изображения запишем в блочном виде

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

где $V_{ij}=M[\overline{z}_i\overline{z}_j^T]$ — матрица ковариаций компонент векторов \overline{z}_i и \overline{z}_j .

Применяя форму Фробениуса [33] обращения блочных матриц, получаем

$$V^{-1}\begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} & -T^{-1}V_{12} \\ -V_{22}^{-1}V_{21}T^{-1} & V_{22} + V_{22}^{-1}V_{21}T^{-1}V_{12}V_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

где
$$T = V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}$$
.

Первые m компонент вектора (3.9) запишутся в виде

$$T^{-1}(\overline{z}_1 - V_{12}V_{22}^{-1}\overline{z}_2). (3.10)$$

При этом $V_{12}V_{22}^{-1}\overline{z}_2 = M[\overline{z}_1 \mid \overline{z}_2] = \widetilde{\overline{z}}_1$ — оптимальный прогноз вектора \overline{z}_1 по наблюдениям \overline{z}_2 ; T — матрица ковариаций ошибок $\Delta = \overline{z}_1 - V_{12}V_{22}^{-1}\overline{z}_2 = \overline{z}_1 - \widetilde{\overline{z}}_1$ этого прогноза.

Если взять $\overline{z}_1 = (z_1)$, то есть вектор из единственного элемента z_1 , то (3.10) примет вид

$$\frac{z_1 - \tilde{z}_1}{\sigma_1^2},\tag{3.11}$$

где:

 $ilde{z}_1 = M[z_1 \, | \, (\overline{z} \setminus z_1)] \, -$ оптимальный линейный прогноз элемента z_1 , построенный при известных значениях всех остальных элементов из \overline{z} ;

 σ_1^2 – дисперсия ошибки $\Delta_1 = z_1 - \tilde{z}_1$ этого прогноза.

Поскольку при соответствующей нумерации первой компонентой z_1 вектора \overline{z} может быть любой его элемент, получаем равенство

$$V^{-1}\overline{z} = C^{-1}(\overline{z} - \tilde{\overline{z}}) = C^{-1}\Delta, \qquad (3.12)$$

где:

 $\frac{\tilde{z}}{z}$ — совокупность прогнозов элементов \overline{z} , каждый из которых построен по значениям всех остальных элементов;

C — диагональная матрица дисперсий ошибок $\Delta = \overline{z} - \tilde{\overline{z}}$ этих прогнозов. Будем называть этот тип прогноза прогнозом в точку (рис. 3.2, δ).

Отметим, что в (3.12) умножение на диагональную матрицу C^{-1} означает просто деление ошибок $\Delta = \overline{z} - \frac{\tilde{z}}{z}$ прогнозов в точку на их собственные дисперсии, как в (3.11). Поэтому (3.12) можно представить в виде

$$V^{-1}\overline{z} = \delta$$
.

где δ состоит из ошибок прогноза, нормированных собственными дисперсиями:

$$\delta_{\overline{j}} = \frac{z_{\overline{j}} - \tilde{z}_{\overline{j}}}{\sigma_{\overline{j}}^2} \,.$$

Таким образом, получаем еще одну форму статистики:

$$L = \sum_{\bar{j} \in G} s_{\bar{l}} \delta_{\bar{j}} = \sum_{\bar{j} \in G} s_{\bar{l}} \left(z_{\bar{j}}^k - \tilde{z}_{\bar{j}}^k \right) / \sigma_{\bar{j}}^2 \begin{cases} \geq \Lambda_0 - \text{сигнал есть,} \\ < \Lambda_0 - \text{сигнала нет,} \end{cases}$$
(3.13)

основанную на прогнозе в точку (рис. 3.2,6). При этом прогноз $\tilde{z}_{\bar{j}}^k = M[z_{\bar{j}}^k \mid (Z \setminus z_{\bar{j}}^k)]$ наблюдения по всем остальным наблюдениям из Z строится в предположении об отсутствии сигнала.

Отметим, что рассматриваемый прогноз

$$\tilde{z}_{j}^{k} = M[z_{j}^{k} \mid (Z \setminus z_{j}^{k})]$$

в точку \overline{j} есть прогноз именно наблюдения $z_{\overline{j}}^k$ в этой точке, а не значения $x_{\overline{j}}^k$ «чистого» изображения. При этом модель наблюдения, т.е. мешающего изображения «в целом», не обязательно должна иметь вид (3.1), например, помехи $\theta_{\overline{j}}^t$ могут оказаться коррелированными.

Как и в (3.7), величина δ вычисляется один раз, зависимость от места нахождения сигнала сказывается только на положении области весового суммирования, а форма сигнала влияет только на весовые коэффициенты.

Несмотря на равенство статистик (3.7) и (3.13), между ними есть принципиальное различие. В (3.7) прогноз и компенсация выполняются по наблюдениям, которые сигнала не содержат, поэтому при наличии сигнала в G он будет искажен только ошибками прогноза. Если эти ошибки малы, то остатки этой компенсации D будут близки к отсчетам обнаруживаемого S_G (визуально можно увидеть сигнал с небольшими искажениями).

В (3.13) при построении прогноза в точку используются все остальные наблюдения, в том числе и содержащие сигнал. Поэтому в остатках Δ_G этой компенсации каждый отсчет сигнала будет искажен не только ошибками прогноза мешающего изображения, но и остальными отсчетами сигнала. Даже при малых ошибках прогноза визуально будет наблюдаться сильно искаженный сигнал.

Форма статистики (3.13) имеет ряд преимуществ. В ней требуется только нормирование остатков компенсации их собственными дисперсиями, а не умножение на обратную ковариационную матрицу ошибок. При обнаружении сигнала его положение обычно неизвестно, поэтому обнаружение производится во всех возможных его положениях. Тогда и прогноз в область нужно выполнять для всех этих положений. Причем для каждой точки области G и для каждого ее положения на кадре прогноз выполняется индивидуальным образом.

Построение прогноза в точку выполняется более унифицированно: этот прогноз не зависит от формы и положения области G. Поэтому после вычисления величин δ уже несложно осуществить обнаружение сигналов любых форм и размеров. Значительно облегчается синтез квазиоптимальных алгоритмов, в которых при компенсации используется прогноз только части наблюдений.

Дисперсии ошибок прогнозов в точку для однородных изображений приблизительно равны между собой (по крайней мере, на некотором удалении от границ), поэтому (3.13) может быть аппроксимировано выражением

$$L = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{\overline{j} \in G} s_{\overline{l}} \left(z_{\overline{j}}^k - \tilde{z}_{\overline{j}}^k \right)$$

или даже заменено статистикой

$$L=\sum_{\overline{j}\in G}s_{\overline{l}}\left(z_{\overline{j}}^k- ilde{z}_{\overline{j}}^k
ight)$$
 с заменой порога Λ_0 на $\sigma^2\Lambda_0$,

где σ^2 — приближенное значение дисперсии ошибок прогноза в точку.

Существенным недостатком всех рассмотренных алгоритмов является достаточно сложный анализ эффективности обнаружения сигналов. В процессе поиска путей упрощения такого анализа удалось получить еще одну процедуру обнаружения протяженных сигналов. Для этого достаточно в (3.6) подставить известную связь между тензорами оценок

$$\hat{x}_{j}^{t} = \hat{x}_{\ni j}^{t} + P_{lj}^{t} V_{\theta}^{-1}(z_{l}^{t} - \hat{x}_{\ni l}^{t}) , \ (l, j) \in G_{0}^{t} \ , \ t = 1, ..., N \ ,$$

где:

 \hat{x}_j^t — оптимальная оценка СП в области $j \in G_0^t$, t=1,...,N, сделанная на основе всех наблюдений z_l^t , $l \in G_0^t$, t=1,...,N;

 P_{li}^{t} — ковариационная матрица ошибок фильтрации.

После элементарных преобразований с учетом того, что $P(E+V_{\theta}^{-1}P_3)=P_3$, $z-\hat{x}_3=(E+V_{\theta}^{-1}P_3)(z-\hat{x})$, находим следующую форму решающего правила [24]:

$$L = s_l^t V_{\theta l j}^{-1} (z_j^t - \hat{x}_j^t) \begin{cases} > \Lambda_0 - \text{сигнал есть,} \\ < \Lambda_0 - \text{сигнала нет,} \end{cases}$$
 (3.14)

содержащую оптимальные оценки \hat{x}_{j}^{t} .

Найденная процедура обнаружения предполагает при гауссовской аппроксимации распределений проведение оптимальной фильтрации СП, расчет ковариационной матрицы ошибок фильтрации и выполнение весового суммирования в соответствии с формулой (3.14). Поскольку алгоритм (3.14), в отличие от известных обнаружителей, не требует трудоемкого расчета ковариационных матриц ошибок прогнозирования, то его удобно использовать не только при реализации систем обработки изображений, но и для вероятностного анализа эффективности обнаружения.

Весьма важно, что общий объем вычислений, в соответствии с правилом (3.14), практически совпадает со случаем прогноза в точку (3.13) и может применяться как еще один вариант построения обнаружителя с малыми вычислительными затратами при неизвестном пространственном положении аномалий. Это хорошо видно, если воспользоваться связью между оценкой и прогнозом «в точку»:

$$x_{\overline{j}}^{t} = \tilde{z}_{\overline{j}}^{t} + \frac{P_{\overline{j}}^{t}}{\sigma_{\overline{j}}^{2}} (z_{\overline{j}}^{t} - \tilde{z}_{\overline{j}}^{t}) ,$$

где все компоненты формулы являются скалярами и отсутствует суммирование по одинаковым нижним индексам.

После подстановки этого соотношения в (3.14) получим (3.13).

Для того чтобы лучше понять особенности различных форм представления алгоритма оптимального обнаружения, рассмот-

рим простейший пример, когда области G и Q (рис. 3.1) содержат по одному элементу. В этом случае производится единственное обучающее наблюдение $z_0 = x_0 + n_0$ и единственное наблюдение z_1 , где может появиться полезный сигнал уровня s, и тогда $z_1 = s + x_1 + n_1$. Будем полагать отсчеты шума n_0, n_1 и значений СП x_0, x_1 гауссовскими с дисперсиями σ^2 и σ_x^2 соответственно и ковариацией элементов СП $M\{x_0, x_1\} = \sigma_x^2 \rho$.

Запишем для поставленной задачи эквивалентные по эффективности оптимальные правила обнаружения сигналов в трех различных формах (3.6), (3.8) и (3.14). Вначале конкретизируем алгоритм обнаружения (3.6), основанный на построении прогноза $\hat{x}_3 = \hat{x}_3(z_{\overline{j}}, \overline{j} \in Q) = \hat{x}_3(z_0)$ в область G:

$$\lambda = \frac{s}{P_9 + \sigma^2} (z_1 - \hat{x}_9) \begin{cases} > \lambda_0 - \text{сигнал есть,} \\ \le \lambda_0 - \text{сигнала нет.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что наилучший прогноз x_1 на основе наблюдения z_0 запишется в виде

$$\hat{x}_{3} = \alpha_{0} z_{0},$$

где:

 $lpha_0=
ho\,\sigma_x^2ig/(\sigma_x^2+\sigma^2)$, причем дисперсия ошибки такого прогноза

$$P_3 = M\{(\hat{x}_3 - x_1)^2\} = \sigma_x^2(\sigma_x^2(1 - \rho^2) + \sigma^2)/(\sigma_x^2 + \sigma^2).$$

Заметим, что процедуры обнаружения (3.6) и (3.13), основанные на прогнозе в область и в точку в рассматриваемом случае одноточечной области G совпадают.

Вторая форма (3.14) статистики λ , основанная на оценке $\hat{x}_1 = \hat{x}_1(z_0, z_1)$ мешающего изображения с помощью всех имеющихся наблюдений, имеет следующий вид:

$$\lambda = \frac{s}{\sigma^2} (z_1 - \hat{x}) .$$

Оптимальная оценка в данном случае находится по формуле

$$\hat{x} = \hat{x}_9 + (P/\sigma^2)(z_1 - \hat{x}_9), \ P = P_9\sigma^2/(P_9 + \sigma^2).$$

Еще раз подчеркнем, что только при отсутствии полезного сигнала это обычная линейная оценка с минимально достижимой дисперсией ошибки

$$P = M\left\{ (\hat{x} - x_1)^2 \right\}.$$

При наличии полезного сигнала оценка \hat{x} содержит слагаемое

$$(P/\sigma^2)z_1 = (P/\sigma^2)(s + x_1 + n_1)$$

и является псевдооценкой значения x_1 мешающего изображения. С помощью подстановки выражения для \hat{x} нетрудно убедиться в полном совпадении операций над наблюдениями z_0, z_1 для двух рассмотренных алгоритмов обнаружения.

Запишем еще одну форму алгоритма обнаружения сигналов (3.8) на основе декорреляции наблюдений. Для этого введем расширенный вектор значений сигнала и тогда наилучший прогноз в объединенную область $G \cup Q$ при отсутствии дополнительных наблюдений, очевидно, равен нулю:

$$\hat{\overline{x}}_{3} = (\hat{x}_{31}\hat{x}_{30})^{T} = (0 \ 0)^{T}$$

с ковариационной матрицей ошибок $P_{_{\! 9}},$ равной ковариационной матрице

$$V_{x} = M\left\{\overline{x}\,\overline{x}^{T}\right\} = \begin{pmatrix} \sigma_{x}^{2} & \rho\sigma_{x}^{2} \\ \rho\sigma_{x}^{2} & \sigma_{x}^{2} \end{pmatrix}$$

мешающего СП $\bar{x}=(x_0\,x_1)^T$. В этом случае алгоритм обработки наблюдений $\bar{z}_p=(z_1z_0)^T$ может быть записан в виде (3.8):

$$\lambda = \overline{s}_p^T (V_x + V)^{-1} \overline{z}_p = \overline{s}_p^T A A^T \overline{z}_p \,,$$

где $V = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$, а элементы верхнетреугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$$
 находятся с помощью разложения $(V_x + V)^{-1} = AA^T$:

$$a_1^2 + a_2^2 = (\sigma_x^2 + \sigma^2)/d$$
; $a_2 a_3 = -\rho \sigma_x^2/d$; $a_3^2 = (\sigma_x^2 + \sigma^2)/d$;
 $d = \det(V_x + V) = (\sigma_x^2 + \sigma^2)^2 - (\rho \sigma_x^2)^2$.

Раскрывая векторные обозначения, приходим к следующей структуре правила обработки наблюдений:

$$\lambda = (s \quad 0) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1 s \quad a_2 s) \begin{pmatrix} a_1 z_1 \\ a_2 z_1 + a_3 z_0 \end{pmatrix}.$$

Можно убедиться, что преобразованные наблюдения $z_{B1}=a_1z_1$ и $z_{B0}=a_2z_1+a_3z_0$ не коррелированы и содержат искаженные уровни сигнала $s_{\rm иск1}=a_1s$ и $s_{\rm иск0}=a_2s$.

Поставленная задача сводится к известной задаче обнаружения детерминированного сигнала, наблюдаемого на фоне белого гауссовского шума. Заметим также, что, несмотря на существенное внешнее отличие полученной процедуры с декорреляцией от алгоритмов с компенсацией помех, после подстановки элементов a_1,a_2,a_3 матрицы A получим те же весовые коэффициенты оптимальной обработки наблюдений z_0 и z_1 .

Приведенные результаты позволяют уточнить условия, при которых справедлива предложенная замена условных ПРВ нормальными распределениями. Прежде всего, это широкий класс с гауссовскими моделями (3.1), (3.2). В этих случаях процедуры (3.6)–(3.8), (3.13) и (3.14) строго оптимальны. При негауссовских компонентах моделей (3.1), (3.2) достаточным условием оптимальности служит возможность аппроксимации апостериорной ПРВ прогноза x_{3i}^k нормальным распределением.

Последнее условие выполняется и во многих прикладных задачах обработки СП со значительными пространственно-временными корреляционными связями и обычно эквивалентно условию высокой апостериорной точности прогнозирования.

3.2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ

На основе синтезированных оптимальных алгоритмов обнаружения аномалий могут быть построены относительно простые квазиоптимальные решающие правила, использующие только часть имеющихся наблюдений, различные методы прогнозирования или декоррелляции. В этих случаях, а также при исследовании потенциальных возможностей реальных систем обнаружения возникает задача расчета характеристик оптимальных алгоритмов.

При гауссовской аппроксимации условные распределения статистик (3.6)–(3.8) будут также гауссовскими. Поэтому для расчета эффективности обнаружения аномалий достаточно найти условные моменты статистики (3.6):

$$M\{L/H_{\circ}\} = 0; \ M\{L/H_{1}\} = S_{\overline{e}}V_{\overline{je}}^{-1}S_{\overline{j}}, \ \sigma_{L}^{2} = S_{\overline{e}}V_{\overline{je}}^{-1}S_{\overline{j}}.$$

Таким образом, при заданной квантили x_F уровня P_F нормального распределения может быть определен порог обнаружения $\lambda = x_F \sigma_L$ и вероятность правильного обнаружения

$$P_D = 0.5 + \Phi_{\circ}(\Delta_D - x_F),$$
 (3.15)

где
$$\Delta_D = \sqrt{S_{\overline{e}}V_{\overline{j}\overline{e}}^{-1}S_{\overline{j}}}, \quad \overline{j}, \overline{e} \in G; \quad \Phi_\circ(x) = (1/\sqrt{2\pi})\int\limits_0^x \exp(-z^2/2)dz.$$

Можно показать, что существует простая связь между пространственными ковариационными матрицами $P_{3\overline{j}\overline{e}}$ ошибок оптимального прогнозирования и $P_{\overline{j}\overline{e}}=M\{(x_{\overline{j}}^t-\widehat{x}_{\overline{j}}^t)(x_{\overline{e}}^t-\widehat{x}_{\overline{e}}^t)\}$ ошибок оптимального линейного оценивания $\hat{x}_{\overline{j}}^t=\hat{x}_{\overline{j}}^t(Z)$. Действительно, анализируя уравнения Винера—Хопфа для многомерного дискретного СП [14—20], получим следующее соотношение:

$$P_{\overline{\jmath}\overline{\varrho}}=(E_{\overline{\jmath}\overline{q}}-P_{\overline{\jmath}\overline{v}}V_{ heta\overline{q}}^{-1})^{-1}P_{\overline{q}\overline{e}}\,,$$
 где $V_{ heta\overline{v}\overline{q}}=\sigma_{ heta}^2E_{\overline{v}\overline{a}}\,.$

Подставляя найденную связь между матрицами в (3.15), находим полезную формулу для расчета эффективности обнаружения сигналов:

$$\Delta_D = \sqrt{S_{\overline{e}}V_{\theta}^{-1}(E_{\overline{e}\overline{j}} - V_{\theta}^{-1}P_{\overline{e}\overline{j}})S_{\overline{j}}}.$$
(3.16)

При отсутствии мешающих изображений $x_{\bar{j}}$ или точном их оценивании $P_{\bar{e}\bar{j}}=0$, и тогда эффективность обнаружения детерминированного сигнала на фоне белого шума определяется известным отношением сигнал/шум:

$$\Delta_D = \sqrt{\sum_{\bar{j} \in G} S_{\bar{j}}^2 / V_{\theta}} \ .$$

Появление помех $x_{\overline{j}}^t$ с пространственно-временной корреляцией приводит к снижению эффективности обнаружения, мерой которого служит ненулевая ковариационная матрица оптимального оценивания СП $x_{\overline{j}}^t$ на фоне белого шума $\theta_{\overline{j}}^t$, $\overline{j} \in J$.

Рассмотрим два важных примера расчета потенциальной эффективности обнаружения точечных аномалий.

Предположим, что осуществляется обнаружение точечного сигнала $s_{\overline{j}} = s_0$, занимающего один элемент G сетки J_t . В этом случае

$$\Delta_D = \sqrt{Q\left(1 - \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\theta^2\right)} ,$$

где:

$$Q = s_0^2 / \sigma_\theta^2$$
 — отношение сигнал/шум;

 σ_{ε}^2 — дисперсия ошибки при оптимальном оценивании одного элемента СП $x_{\overline{j}}^t$, $\overline{j} \in G$, на основе всех имеющихся наблюдений $z_{\overline{j}}^t$, $\overline{j} \in J_t$, $t \in T$. Дисперсия ошибки оценивания σ_{ε}^2 может быть найдена с помощью известных методов теории оптимального оценивания СП, наблюдаемых на фоне помех [14, 17]. Учитывая связь

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\vartheta}^2 / (1 + \sigma_{\vartheta}^2 / \sigma_{\theta}^2)$$

с дисперсией σ_9^2 ошибки прогнозирования, можно переписать выражение (3.16) в виде

$$\Delta_D = \sqrt{\frac{Q}{1 + \sigma_9^2 / \sigma_\theta^2}} = \sqrt{\frac{s_0^2}{\sigma_9^2 + \sigma_\theta^2}}.$$

Полученная формула имеет простое объяснение уменьшения отношения сигнал/шум вследствие сложения шума $\theta_{\overline{j}}^t$ с независимой от него погрешностью прогнозирования одного элемента $\hat{x}_{3\,\overline{j}}^t$ СП $x_{\overline{j}}^t$.

Рассмотрим теперь задачу обнаружения точечного объекта по результатам наблюдения совокупности M_3 изображений размером $M_1 \times M_2$ элементов (рис. 3.3). Такая задача возникает, в частности, при многозональных наблюдениях одного и того же объекта с помощью различных систем, функционирующих, например, в различных спектральных диапазонах [3–6, 15]. В этом случае модель наблюдений (3.1) запишется в виде

$$z_{\bar{j}} = x_{\bar{j}} + \theta_{\bar{j}}, \ \overline{j} = (j_1 j_2 j_3)^T; \ j_k = 1, 2, ..., M_k.$$

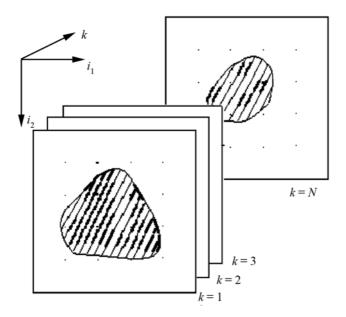


Рисунок 3.3 Кадры многозонального изображения

Предположим, что массивы данных $z_{\overline{j}}$, j_3 = 1,2,..., M_3 , пространственно совмещены, и поэтому появление полезного сигнала приводит к увеличению уровня СП на величину s_0 в одном и том же элементе с номером $\left(j_1^0 j_2^0\right)^T$ каждого кадра изображения (рис. 3.3). Ковариационную функцию мешающих изображений представим в форме

$$R_x(m_1,m_2,m_3) = M\left\{x_{j_1,j_2,j_3}x_{(j_1+m_1),(j_3+m_3),(j_3+m_3)}\right\} = R_1(m_1,m_2)\rho^{1(m_3)},$$

где:

 $R_1(m_1,m_2) = R_x(m_1,m_2,m_3=0)$ — одна и та же ковариационная функция каждого из M_3 кадров изображения;

$$1(m_3) = 1$$
, если $m_3 \neq 0$, $1(m_3 = 0) = 0$.

Заметим, что такое представление означает равенство корреляционных расстояний между любой парой из M_3 анализируемых кадров изображений. После несложных, но довольно трудоемких вычислений можно показать, что формула (3.16) для рассматриваемой задачи преобразуется к виду

$$\Delta_D = \sqrt{M_3} Q \sqrt{1 - F_R(\overline{0}) \left\{ \frac{\left(1 + \left(M_3 - 1\right)\rho\right) G_1\left(\omega_1, \omega_2\right)}{\sigma_\theta^2 + \left(1 + \left(M_3 - 1\right)\rho\right) G_1\left(\omega_1, \omega_2\right)} \right\}} \;,$$

где:

 $Q = s_0 / \sigma_\theta^2$; $G_1(\omega_1, \omega_2) = F\{R_1(\omega_1, \omega_2)\}$; $F(\omega_1, \omega_2)$ {·} и $F_R(m_1, m_2)$ {·} – прямое и обратное двумерное дискретное Фурьепреобразование;

$$F_R(\overline{0})\{\cdot\} = F_R(m_1 = 0, m_2 = 0)\{\cdot\}$$
.

Анализ полученного соотношения позволяет сделать следующие важные выводы относительно эффективности оптимального обнаружения точечных аномалий на произвольном числе одновременно обрабатываемых изображений.

При отсутствии межкадровой корреляции $(\rho = 0)$ совместная обработка M_3 кадров дает выигрыш в пороговом сигнале в

 $\sqrt{M_3}$ раз по отношению к случаю обнаружения сигнала на одном кадре изображения независимо от вида ковариационной функции $R_1(m_1,m_2)$ и размеров $M_1 \times M_2$ кадра.

Межкадровая корреляция $(\rho \neq 0)$ приводит к потерям в эффективности обнаружения, соответствующим дополнительному увеличению дисперсии σ_x^2 мешающих изображений в $\left(1+(M_3-1)\rho\right)$ раз.

Перечисленные свойства позволяют легко пересчитать характеристики обнаружения точечных аномалий на одном-единственном кадре изображения [14] для случая совместной обработки произвольного числа взаимно-коррелированных кадров изображений.

3.3. ОБНАРУЖЕНИЕ АНОМАЛИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ УРОВНЯМИ НА МНОГОЗОНАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Основной проблемой, возникающей при использовании обнаружителей (3.13) и (3.14) для решения практических задач, является априорная неизвестность отсчетов сигнала. Анализ большого числа экспериментальных данных показывает, что полезный сигнал на реальных изображениях, как правило, сохраняет свою форму и структуру, но меняет интенсивность. В этом случае протяженный в трехмерном пространстве полезный сигнал можно записать в виде

$$s_{ij}^k = s^k f_{ij}^k ,$$

где:

 s^k — неизвестные уровни сигнала на отдельных кадрах изображения;

 f_{ij}^k — известные значения относительных уровней сигнала, расположенного в области Ω_0^k на k-м кадре [15, 16].

Для синтеза решающего правила можно воспользоваться модифицированным ОП:

$$L = \frac{w(\{z_{ij}^k\} \mid H_1, \hat{s}^1, ..., \hat{s}^N)}{w(\{z_{ij}^k\} \mid H_0)},$$

где \hat{s}^k , k=1...N — оценки неизвестных уровней полезного сигнала, полученные, например, с помощью метода максимального правдоподобия.

Аппроксимируя условные ПРВ $w(\{z_{ij}^k\}|H_1,s^1,...,s^N)$ и $w(\{z_{ij}^k\}/H_0)$ гауссовскими, решающее правило оптимального обнаружения протяженных сигналов по совокупности наблюдений на N кадрах можно записать в виде

$$L = \sum_{k=1}^{N} \hat{s}^{k} f_{lvt} V_{lvtijk}^{-1} (z_{ijk} - \hat{x}_{\ni ijk}) \begin{cases} > L_{0} - \text{сигнал есть,} \\ < L_{0} - \text{сигнала нет,} \end{cases}$$
(3.17)

где:

 \hat{x}_{3ijk} — оптимальный (в смысле минимума дисперсии ошибки) прогноз случайного поля, сделанный на основе всех наблюдений Z_0 , в которых полезный сигнал заведомо отсутствует;

 $V_{lvtijk} = P_{9lvtijk} + \sigma_{\theta}^2 E_{lvtijk}$, $P_{9lvtijk}$ — ковариационная матрица ошибок при оптимальном прогнозировании.

Несложно показать, что в качестве решающего правила можно также использовать выражения (3.13) и (3.14) с соответствующими оценками СП.

Неизвестные оценки \hat{s}^k , k=1,2,...,N, можно определить из условия максимума $w\Big(\{z_{ij}^k,(i,j,k)\in\Omega_0\}\big/Z_0\,,H_1\Big)$ или минимума выражения $(z_{lvt}-m_{1lvt})V_{lvtijk}^{-1}(z_{ijk}-m_{1ijk})$. После дифференцирования квадратичной формы получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{N} (f_{lv}^{t} V^{-1tk}_{hij} f_{ij}^{k}) s^{k} = \sum_{k=1}^{N} f_{lv}^{t} V^{-1tk}_{hij} (z_{ij}^{k} - \hat{x}_{ij}^{k}), \ t = 1, 2, ..., N.$$
 (3.18)

Рассмотрим теперь ряд частных, но важных случаев обнаружения сигнала и поведение системы в этих случаях.

1. Для точечного сигнала система (3.18) принимает вид

$$\sum_{t=1}^{N} a^{kt} (s^t - \tilde{z}^t) = 0, k = 1, 2, ..., N.$$

Решениями этой системы будут известные оценки

$$\hat{s}^k = \tilde{z}^k_{ij} = z^k_{ij} - \hat{x}^t_{ij} ,$$

где:

$$k = 1, 2, ..., N$$
:

 \hat{x}_{ij}^k — прогноз в точку k -го кадра с координатами (i,j) по всем точкам \hat{x}_{lv}^t , t=1,...,N , $(l,v)\in\Omega$, l<>i , v<>j .

Выигрыш при совместном использовании последовательности коррелированных изображений по сравнению с обработкой отдельных кадров, составляющих многозональное изображение, достигается в этом случае исключительно вследствие более точного (за счет использования информации с других кадров) оценивания элементов изображения.

2. Если кадры многозонального сигнала не коррелированы между собой, то есть $a_{lvkijt}=0$ при k <> t, то (3.18) преобразуется к виду

$$f_{lvt}a_{lvtijk}(f_{ijk}s^k - \tilde{z}_{ijk}) = 0, k = 1, 2, ..., N,$$

и оценки неизвестных уровней принимают вид

$$\hat{s}^{k} = \frac{f_{lvk} a_{lvkijk} \tilde{z}_{ijk}}{f_{lvk} a_{lvkijk} f_{ijk}}, \ k = 1, 2,, N.$$
(3.19)

Подстановкой полученных оценок в решающее правило (3.17) в случае коррелированности входящих в многозональное изображение кадров можно получить квазиоптимальный обнаружитель, который будет незначительно проигрывать оптимальному алгоритму в эффективности обнаружения, но, в силу отсутствия необходимости решения системы (3.18), выигрывать по быстродействию.

3. В случае некоррелированности всех отсчетов мешающего изображения x_{ijk} легко получить следующее известное решающее правило:

$$L = (z_{ijk} - \hat{x}_{\ni ijk})(z_{ijk} - \hat{x}_{\ni ijk}) \begin{cases} > L_0 - \text{сигнал есть,} \\ < L_0 - \text{сигнала нет.} \end{cases}$$

4. Если в состав многозонального изображения входят одинаковые или полностью коррелированные кадры, то соответствующие уравнения в системе (3.18) будут подобными, а эти кадры можно использовать лишь для усреднения шума при оценивании изображения

Для обнаружения протяженных аномалий с неизвестными уровнями на многозональных изображениях необходимо рассчитать ковариационную матрицу ошибок прогнозирования, затем получить оценку неизвестных уровней с помощью системы (3.18) или выражений (3.19), подставить вычисленные значения в решающее правило (3.17) и сравнить полученную статистику с порогом.

3.4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ

Для упрощения последующих выкладок запишем полученный обнаружитель (3.17) в следующем виде:

$$L = (z_{ijk} - x_{ijk})c_{ijklvt}(z_{lvt} - x_{lvt}) \begin{cases} > L_0 - \text{сигнал есть,} \\ < L_0 - \text{сигнала нет,} \end{cases}$$
(3.20)

где c_{ijklvt} — коэффициенты, зависящие от ковариационных свойств многозонального изображения, параметров шума, формы и характера сигнала.

В силу наличия сложных ковариационных связей между остатками компенсации \tilde{z}_{lvt} и вида распределения случайной величины L, вероятностный анализ (3.20) сопряжен со значительными математическими трудностями. Однако с ростом числа точек в полезном сигнале и увеличением числа кадров в многозональном

изображении распределение L быстро стремится к нормальному. Параметры этого распределения [15]:

$$\begin{split} m(L\mid H_0) &= c_{ijklvt} P_{3ijklvt} \;,\; m(L\mid H_1) = c_{ijklvt} P_{3ijklvt} + s_{ijk} c_{ijklvt} s_{lvt} \;, \\ D(L\mid H_{0,1}) &= c_{ijklvt} m_{0,1\,jklvt\alpha\beta\kappa\gamma\delta\tau} c_{\alpha\beta\kappa\gamma\delta\tau} - m^2(L\mid H_{0,1}) \;, \end{split}$$

где:

 $P_{3iiklvt}$ – ковариационная матрица ошибок прогнозирования;

$$\begin{split} &m_{0,1jklvta\beta\kappa\gamma\delta\tau} = m(\tilde{z}_{ijk}^4 \mid H_{0,1})(b_{21}(b_{31} + b_{32}b_{21}) \times \\ &\times (b_{41} + b_{42}b_{21} + b_{43}(b_{31} + b_{32}b_{21})) + \\ &+ b_{32}b_{22}(b_{42} + b_{43}b_{32}) + b_{32}b_{33} + b_{44}); \\ &m(\tilde{z}_{ijk}^4 \mid H_1) = (\sigma_z^2 + (s_{ijk})^2)^2 + 2\Big[\sigma_z^4 + (f_{ijk})^2\sigma_z^6\Big]; \\ &m(\tilde{z}_{ijk}^4 \mid H_0) = 3\sigma_x^2; \\ &b_{gh} - \text{элементы матрицы } B = \chi(R_{\text{ч}}); \end{split}$$

g, h = 1,...,4; $\chi()$ – преобразование Хоттелинга;

 $R_0 - 4 \times 4$ -матрица, составленная из коэффициентов корреляции между случайными величинами \tilde{z}_{ijk} , \tilde{z}_{lvt} , $\tilde{z}_{\alpha\beta\kappa}$, $\tilde{z}_{\gamma\delta\tau}$.

На рис. 3.4 показана зависимость относительного проигрыша по величине порогового сигнала алгоритма с неизвестными уровнями обнаружителю с известными уровнями [15]. При этом вероятность ложной тревоги $P_F = 0,001$, вероятность обна- $P_d = 0.5$, коэффициент межкадровой корреляции R = 0.9.

Анализ этих графиков показывает, что с ростом числа кадров или увеличением дисперсии шума разница между обнаружителями возрастает. В то же время с ростом внутрикадровой корреляции или размера сигнала на каждом из кадров обнаружитель с неизвестными уровнями приближается к оптимальному алгоритму с известными параметрами. При этом увеличение относительной разницы между обнаружителями с ростом числа кадров можно объяснить увеличением числа оцениваемых параметров (относительных уровней на каждом кадре).

С увеличением размера сигнала, увеличением коррелированности поля или с уменьшением дисперсии шума дисперсия ошибки оценивания неизвестных уровней уменьшается. Поэтому относительная разница между эффективностями обнаружителей с известными и неизвестными уровнями уменьшается.

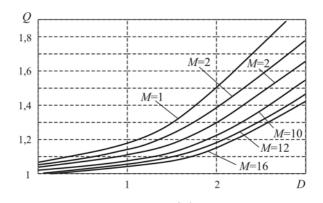
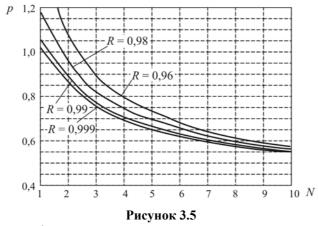


Рисунок 3.4
Графики зависимости относительного проигрыша алгоритма (3.17) обнаружителю (3.6) от дисперсии и размера сигнала на кадре

Проведенные исследования позволяют сделать вывод, что при известных уровнях сигнала на каждом кадре предлагаемый обнаружитель сравним по эффективности с алгоритмом, требующим априорного знания параметров полезного сигнала. Однако в большинстве практических задач уровни сигнала на каждом кадре неизвестны. В этих условиях обнаружитель сигналов с неизвестными уровнями обладает существенными преимуществами.

Для иллюстрации на рис. 3.5 показаны графики зависимости относительного проигрыша алгоритма (3.6), (3.14) обнаружителю (3.17) от количества кадров и коэффициента внутрикадровой корреляции в случае, если полезный сигнал ожидался на всех кадрах многозонального изображения, но появился только на одном. При этом вероятность ложной тревоги $P_F = 0,001$, вероятность обнаружения $P_d = 0,5$, коэффициент межкадровой корреляции R = 0,9, дисперсия шума $\sigma_\theta^2 = 1$, размер сигнала на каждом из кадров M = 4.



Графики зависимости относительного проигрыша алгоритма (3.6), (3.14) обнаружителю (3.17) от числа кадров

Анализ графиков, представленных на рис. 3.5, показывает, что уже при двух кадрах и внутрикадровой корреляции r > 0.98 обнаружитель, предназначенный для работы с известными уровнями сигнала, проигрывает найденному алгоритму. Понятно, что с ростом априорной неопределенности относительно параметров сигнала преимущество обнаружителя с неизвестными уровнями будет еще более явным. Это позволяет рекомендовать предлагаемый алгоритм для использования в системах обработки реальных изображений.

Глава 4

СОВМЕЩЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

При синтезе алгоритмов решения различных задач обработки последовательности кадров $z^1, z^2, ...$ обычно предполагается, что наблюдения $z_{\overline{i}}^1, z_{\overline{i}}^2, \ldots$ в узле \overline{j} сетки Ω соответствуют одной и той же точке пространства. В реальных же ситуациях движение приёмника, несовершенство его конструкции и другие факторы приводят к тому, что $z_{\overline{i}}^1, z_{\overline{i}}^2, \dots$ соответствуют различным точкам пространства. В результате на последовательности z^1, z^2, \ldots наблюдаемое изображение будет от кадра к кадру иметь различные межкадровые смещения, то есть межкадровые геометрические трансформации (МКГТ): сдвиги, повороты и т.д. Если подобные искажения не учитывать, то эффективность алгоритмов обработки может резко снизиться. Например, при компенсации мешающих изображений по формуле z_{j}^{t} – \hat{z}_{j}^{t} прогноз \hat{z}_{j}^{t} должен быть выполнен для точки, в которой сделано наблюдение $z^t_{\ ar{\it i}}$, а при наличии МКГТ прогноз может быть сделан в другую точку, поэтому точность прогноза может резко ухудшиться.

Другим примером, когда требуется совмещение, является обработка спектрозональных изображений в геологии. Аналогичные задачи возникают и в медицине, когда требуется совместить разнородные (рентгеновские, ультразвуковые и другие) изображения для диагностики.

Имеющиеся МКГТ могут быть не только мешающими факторами, но и нести в себе полезную информацию. Например, анализируя МКГТ кадров, полученных в разные моменты времени, можно отслеживать курс самолета или подводной лодки в условиях ограниченной видимости.

Совмещению изображений посвящено большое количество работ, например, [17–19, 23, 24, 43, 48–50, 53, 73, 92–95]. В этой главе будет рассмотрен ряд методов совмещения изображений.

4.1. ТЕНЗОРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СМЕЩЕНИЙ

Описанный в §2.2 тензорный фильтр Калмана оценки последовательности кадров, заданных тензорной моделью, можно обобщить применительно к совместной оценке кадров и межкадровых смещений этих кадров. Рассмотрим это обобщение.

Пусть последовательность *m*-мерных кадров задана линейным тензорным стохастическим уравнением

$$x^{t} = \rho^{t} x^{t-1} + \mathcal{G}^{t} \xi^{t}, \ t = 1, 2, \dots$$

и их наблюдения имеют вид

$$z^t = x^t(y^t) + \theta^t, \tag{4.1}$$

где:

 $y^{t} = (y_{1}^{t},...,y_{m}^{t})$ – вектор параметров МКГТ *t*-го кадра;

 $x^{t}(y^{t})$ — «чистое» наблюдение кадра x^{t} при параметрах y^{t} ;

 θ^t – белое гауссовское СП помех наблюдения.

При этом последовательность векторов смещений также описывается линейным стохастическим уравнением

$$y^{t} = \Im^{t} y^{t-1} + \Phi^{t} \eta^{t}, \quad t = 1, 2, ...,$$

где:

 $\mathfrak{F}^t, \Phi^t - (m \times n)$ -матрицы (тензоры ранга 2);

 $\eta^t = (\eta_1^t, ..., \eta_m^t)$ — белый гауссовский порождающий вектор молели смешений.

Требуется по наблюдениям (4.1) найти оценку очередного кадра x^t и оценку y^t при получении очередного наблюдения z^t . Воспользуемся уравнениями тензорной фильтрации типа (2.9), в которых в оцениваемый кадр x^t включим и сам кадр x^t , и параметры y^t . Это объединение представляет собой составной тензор, поэтому уравнения фильтрации несколько усложняются. Опуская промежуточные выкладки, приведём алгоритм рекуррентного оценивания СП и смещений [19, 21, 24]:

$$\hat{x}^{t} = \hat{x}_{9}^{t} + P_{x}^{t} (V_{\theta}^{t})^{-1} (z^{t} - \hat{x}_{9}^{t}) + P_{B}^{t} (V_{\theta}^{t})^{-1} \frac{d\hat{x}_{9}^{t}}{d\alpha^{t}} (z^{t} - \hat{x}_{9}^{t}),$$

$$\hat{y}^{t} = \hat{y}_{9}^{t} + P_{y}^{t} (V_{\theta}^{t})^{-1} \frac{d\hat{x}_{9}^{t}}{d\alpha^{t}} (z^{t} - \hat{x}_{9}^{t}) + (P_{9}^{t})^{T} (V_{\theta}^{t})^{-1} (z^{t} - \hat{x}_{9}^{t}),$$

$$(4.2)$$

где $\hat{x}_{2}^{t} = x^{t}(\hat{y}_{2}^{t}), \ \hat{y}_{2}^{t} = \Im^{t} \hat{y}^{t-1}$.

Рекуррентные соотношения между тензорными коэффициентами уравнений (4.2) имеют вид

$$P_{x}^{t} A_{x}^{t} + P_{B}^{t} A_{yx}^{t} = P_{3x}^{t}, \quad (P_{B}^{t})^{T} A_{x}^{t} + P_{y}^{t} A_{yx}^{t} = (P_{3B}^{t})^{T},$$

$$P_{x}^{t} A_{xy}^{t} + P_{B}^{t} A_{y}^{t} = P_{3B}^{t}, \quad (P_{B}^{t})^{T} A_{xy}^{t} + P_{y}^{t} A_{yx}^{t} = P_{3B}^{t},$$

$$(4.3)$$

где:

$$A_{x}^{t} = E + (V_{\theta}^{t})^{-1} P_{9x}^{t} + (V_{\theta}^{t})^{-1} \frac{dx^{t}}{dy^{t}} (P_{9B}^{t})^{T},$$

$$A_{y}^{t} = E - (V_{\theta}^{t})^{-1} \left(\frac{dx^{t}}{dy^{t}}\right)^{2} P_{9y}^{t} + (V_{\theta}^{t})^{-1} \frac{dx^{t}}{dy^{t}} P_{9B}^{t},$$

$$A_{xy}^{t} = -(V_{\theta}^{t})^{-1} \frac{dx^{t}}{dy^{t}} P_{9y}^{t} + (V_{\theta}^{t})^{-1} P_{9B}^{t},$$

$$A_{yx}^{t} = -(V_{\theta}^{t})^{-1} \frac{dx^{t}}{dy^{t}} P_{9x}^{t} + (V_{\theta}^{t})^{-1} \left(\frac{dx^{t}}{dy^{t}}\right)^{2} (P_{9B}^{t})^{T},$$

$$P_{9x}^{t} = \Re^{t} P_{x}^{t-1} (\Re^{t})^{T} + V_{x}^{t}, \quad P_{9B}^{t} = \Re^{t} P_{B}^{t-1} (\Im^{t})^{T},$$

$$P_{9B}^{t} = \Im^{t} P_{B}^{t-1} (\Im^{t})^{T} + V_{y}^{t}, \quad V_{y}^{t} = \Phi^{t} (\Phi^{t})^{T}.$$

$$(4.4)$$

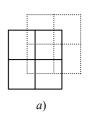
Отметим, что, хотя фильтр (4.3) – (4.4) и даёт решение поставленной задачи, воспользоваться им в реальных ситуациях довольно сложно. Это, помимо вычислительных трудностей, связано с конкретизацией модели (4.1), а именно, с определением функции $x^t(y^t)$, то есть того, как выглядит кадр x^t при параметрах МКГТ y^t .

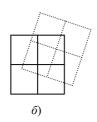
4.2. СОВМЕЩЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ МЕЖКАДРОВЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТРАНСФОРМАЦИЯХ

Изучим задачу совмещения СП, когда распределение параметров МКГТ не задано. Для этого рассмотрим сначала молель МКГТ.

Пусть СП $\dot{X}=\{x_{\overline{u}}^i:\overline{u}\in U,\ i=1,2,...\}$ в каждый момент времени i задано на некоторой непрерывной области U. Каждый кадр $x^i=\{x_{\overline{j}}^i:\overline{j}\in\Omega_i\}$ сеточного поля X является системой отсчётов кадра $x^i=\{x_{\overline{u}}^i:\overline{u}\in U\}$ по сетке $\Omega_i=\{\overline{j}:(j_1,\ldots j_n):j_k=\overline{1,M_k}\}$. При этом положение и форма сеток Ω_i могут изменяться со временем, а индексные размеры $M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$ остаются постоянными.

На рис. 4.1 показаны некоторые возможные положения плоских сеток Ω_{i-1} (сплошные линии) и Ω_i (пунктирные линии): вид 4.1,a — сетка Ω_i получена из прямоугольной сетки Ω_{i-1} параллельным сдвигом; вид $4.1,\delta$ — сдвигом и поворотом; вид $4.1,\epsilon$ — сетка Ω_i еще и искривлена; вид $4.1,\epsilon$ — обе сетки криволинейные.





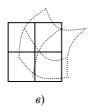




Рисунок 4.1

Положения сеток отсчётов двух последовательных кадров: a — параллельный сдвиг; δ — сдвиг и поворот; ϵ — одна сетка криволинейная; ϵ — обе сетки криволинейные

Каждая сетка Ω_i может рассматриваться как система координат, поэтому задачу совмещения СП можно сформулировать как задачу нахождения преобразования координат узлов сетки

 Ω_i в систему координат Ω_u области U. Иногда (например для компенсации помех) удобнее находить преобразования координат Ω_i в Ω_{i-1} , т.е. совмещать очередной кадр x^i с предыдущим кадром x^{i-1} .

Рассмотрим задачу совмещения двух кадров x^{i-1} и x^i . В общем случае (рис. 4.1, ε) требуется оценить форму сетки Ω_{i-1} и найти преобразование координат Ω_i в Ω_{i-1} .

Даже для стационарных полей \dot{X} оценка формы сетки Ω_{i-1} , то есть оценка взаимного расположения отсчётов $x_{\bar{j}}^{i-1}$, очень сложна и имеет низкую точность. Ограничимся случаем, когда Ω_{i-1} — прямоугольная сетка с единичным шагом (рис. 4.1,a–a). Это упрощение постановки задачи не является большим огрублением реальных ситуаций, так как обычно сетки отсчётов близки к прямоугольным (изображения, получаемые с помощью телекамер, сканирующих линеек и т.д.). Кроме того, сетки Ω_{i-1} и Ω_i для соседних кадров обычно отличаются друг от друга незначительно и при оценке преобразования Ω_i в Ω_{i-1} предположение о прямоугольности Ω_{i-1} не приводит к большим погрешностям.

Пусть модель наблюдений поля X имеет вид

$$z^{i} = x^{i} + \theta^{i}, i = 1, 2, ...,$$
 (4.5)

где $\theta = \{\theta_{\bar{j}}^i\}$ – поле независимых CB.

Тогда при стационарности СП \dot{X} может быть найдена условная совместная ПРВ

$$w(z^{i-1}, z^i | f)$$
,

где f – преобразование координат Ω_i в (прямоугольную) систему координат Ω_{i-1} .

Это позволяет применить различные статистические оценки для совмещения пары кадров x^{i-1} и x^i , например оценку ММП

$$f = \arg\max_{f} w(z^{i-1}, z^{i} \mid f). \tag{4.6}$$

В общем случае для преобразования f должны быть оценены координаты $f(\bar{j})$ всех отсчётов кадра x^i в системе Ω_{i-1} . Поэтому функция f в (4.6) содержит очень большое число параметров и оценка ММП чрезвычайно сложна для вычисления. В дальнейшем для преобразований f общего вида будут рассмотрены адаптивные методы совмещения.

Задача совмещения значительно упрощается, если задаться видом преобразования координат f, тогда нужно определить только его параметры $\bar{\alpha}$. Например, если имеется сдвиг и поворот (рис. $4.1,\delta$). В подобных случаях оценка (4.6) приобретает вид

$$\hat{\overline{\alpha}} = \arg\max_{\overline{\alpha}} w(z^{i-1}, z^i \mid \overline{\alpha})$$
 (4.7)

и содержит небольшое число параметров.

Оценка (4.7) может быть использована и в случае параметрической априорной неопределённости СП \dot{X} и модели наблюдений (4.5). Для этого вектор параметров $\overline{\alpha}$ нужно дополнить неизвестными параметрами СП \dot{X} и модели наблюдений.

4.3. СОВМЕЩЕНИЕ ДВУХ КАДРОВ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Пусть \dot{X} гауссовское, стационарное, имеет нулевое среднее и К Φ

$$V(i,\overline{u}) = M[\dot{x}_{v}^{l}\dot{x}_{\overline{v}+\overline{u}}^{l+i}] = \sigma_{x}^{2}\rho(|i|,|u_{1}|,...|u_{n}|), \qquad (4.8)$$

где $\rho(i,|u_1|,...|u_n|)$ — коэффициент корреляции поля \dot{X} на расстоянии |i| по времени и на расстоянии $|u_k|$ по k-й пространственной оси.

В модели наблюдений (4.5) шумы θ также будем предполагать гауссовскими с нулевым средним и постоянной дисперсией σ_{θ}^2 .

Пусть имеются наблюдения z^{i-1} кадра x^{i-1} в узлах прямоугольной сетки Ω_{i-1} с единичным шагом и наблюдения z^i кадра x^i в узлах некоторой сетки Ω_i . Требуется оценить параметры $\bar{\alpha}$ МКГТ кадров x^{i-1} и x^i , то есть найти оценку $\hat{\bar{\alpha}}$ параметров преобразования $f(\bar{j},\bar{\alpha})$ системы координат Ω_i в Ω_{i-1} .

Если для удобства взять i=1 и выбрать оси сетки Ω_1 совпадающими с осями координат, в которых задана КФ (4.8), то гауссовская совместная ПРВ кадра x^1 и его наблюдений может быть легко найдена из (4.5) и (4.8). При заданном векторе параметров $\overline{\alpha}$ положение сетки Ω_2 относительно Ω_1 становится определённым, поэтому возможно и нахождение совместной условной ПРВ наблюдений $Z=(z^1,z^2)$ при заданном $\overline{\alpha}$:

$$w(Z \mid \overline{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \det^{1/2}(V(\overline{\alpha}))} \exp\left(-\frac{1}{2}ZV^{-1}(\overline{\alpha})Z\right), \tag{4.9}$$

где:

 $V(\overline{\alpha})$ — ковариационная матрица наблюдений Z; k — число элементов в Z.

Оценка $\hat{\alpha}$ по ММП максимизирует (4.9) при заданных значениях наблюдений Z. Отметим, что нахождение максимума выражения (4.9) представляет собой трудоемкую вычислительную задачу и практически нереализуемо в системах реального времени.

В целях упрощения рассмотрим сначала оценку, получающуюся максимизацией только экспоненты в (4.9):

$$\hat{\overline{\alpha}} = \arg\min_{\overline{\alpha}} ZV^{-1}(\overline{\alpha})Z = \arg\min_{\overline{\alpha}} J(Z, \overline{\alpha}). \tag{4.10}$$

Функционал $J(Z,\overline{\alpha})$ является расстоянием Махаланобиса выборки Z от начала координат при ковариационной матрице $V(\overline{\alpha})$. Таким образом, оценка (4.10) минимизирует расстояние Махаланобиса наблюдаемых Z от начала координат.

Рассмотрим это расстояние подробнее. Из (5.12) следует, что имеет место представление

$$J(Z,\overline{\alpha}) = ZC^{-1}(\overline{\alpha})(Z - Z^*(\overline{\alpha})) = ZC^{-1}(\overline{\alpha})\Delta_Z^*(\overline{\alpha}), \tag{4.11}$$

где:

 $Z^*(\overline{\alpha})$ — оптимальный (в данном случае линейный) прогноз наблюдений Z в точку;

 $\Delta_Z^*(\overline{\alpha})$ — ошибки этого прогноза, то есть остатки компенсации в точку;

 $C(\overline{lpha})$ — диагональная матрица из дисперсий ошибок $\Delta_Z^*(\overline{lpha})$.

Если наблюдения z^1 и z^2 использовать дважды ($z^1 \to z^2$ и $z^2 \to z^1$), то из (5.13) можно получить представление

$$J(z^{1}, z^{2}, \overline{\alpha}) = z^{1} N_{1}^{-1}(\overline{\alpha})(z^{1} - \hat{z}^{1}(\overline{\alpha})) + z^{2} N_{2}^{-1}(\overline{\alpha})(z^{2} - \hat{z}^{2}(\overline{\alpha})) =$$

$$= z^{1} N_{1}^{-1}(\overline{\alpha}) \hat{\Delta}_{1}(\overline{\alpha}) + z^{2} N_{2}^{-1}(\overline{\alpha}) \hat{\Delta}_{2}(\overline{\alpha}), \tag{4.12}$$

где:

 $\hat{z}^1(\overline{\alpha})$ — прогноз наблюдений z^1 по z^2 , т.е. прогноз в область;

 $\hat{\Delta}_1(\overline{\alpha})$ – ошибки этого прогноза;

 $N_1(\bar{\alpha})$ – ковариации ошибок $\hat{\Delta}_1(\bar{\alpha})$;

 $\hat{z}^2(\overline{\alpha})$ – прогноз z^2 по z^1 ;

 $N_2(\overline{\alpha})$ – ковариации ошибок $\hat{\Delta}_2(\overline{\alpha})$ этого прогноза.

Оценку ММП можно несколько видоизменить, представив условную ПРВ в виде произведения

$$w(z^1, z^2 \mid \overline{\alpha}) = w(z^1 \mid \overline{\alpha})w(z^2 \mid z^1, \overline{\alpha}).$$

Поскольку $w(z^1 | \overline{\alpha}) = w(z^1)$ от $\overline{\alpha}$ не зависит, достаточно максимизировать условную ПРВ

$$w(z^{2} \mid z^{1}, \overline{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/4} \det^{1/2}(N_{2}(\overline{\alpha}))} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(z^{2} - \hat{z}^{2}(\overline{\alpha}))ZN_{2}^{-1}(\overline{\alpha})(z^{2} - \hat{z}^{2}(\overline{\alpha}))\right),$$

где $\hat{z}^2(\bar{\alpha})$ и $N_2(\bar{\alpha})$ те же, что и в (4.12).

Отсюда можно также получить упрощённую оценку, минимизируя функционал

$$J(z^{1}, z^{2}, \overline{\alpha}) = [z^{2} - \hat{z}^{2}(\overline{\alpha})]N_{2}^{-1}(\overline{\alpha})[z^{2} - \hat{z}^{2}(\overline{\alpha})], \qquad (4.13)$$

являющийся расстоянием Махаланобиса между наблюдениями z^2 и их прогнозами $\hat{z}^2(\overline{\alpha})$ по наблюдениям z^1 .

Экспериментальные исследования показывают плохое качество оценок по расстоянию Махаланобиса. Это объясняется тем, что в (4.11)–(4.13) перемножаются остатки компенсации и матрицы, обратные к $C(\overline{\alpha})$ или к $N_i(\overline{\alpha})$. При этом остатки компенсации могут уменьшаться по $\overline{\alpha}$ только до некоторого предела, поэтому минимизация указанных выражений может неоправданно происходить, в основном, за счет увеличения элементов матриц $C(\overline{\alpha})$ или $N_i(\overline{\alpha})$. Это не происходит при использовании оценки ММП, так как ПРВ (4.9) обратно пропорциональна корню из детерминанта ковариационной матрицы $V(\overline{\alpha})$.

Гораздо лучшие оценки МКГТ можно получить, минимизируя остатки компенсации $\Delta_Z^*(\bar{\alpha})$, $\hat{\Delta}_1(\bar{\alpha})$ или $\hat{\Delta}_2(\bar{\alpha})$. Удобнее всего минимизировать остатки

$$\hat{\Delta}_2(\overline{\alpha}) = z^2 - \hat{z}^2(\overline{\alpha}),$$

так как при этом определяется оптимальная компенсация очередного кадра z^2 по предыдущему кадру z^1 , что часто бывает основной задачей совмещения. Применяя этот подход, можно получить оценки

$$\hat{\overline{a}} = \arg\min_{\overline{\alpha}} M \left[\sum_{\overline{j}} \left| z_{\overline{j}}^2 - \hat{z}_{\overline{j}}^2(\overline{\alpha}) \right| \right], \tag{4.14}$$

$$\hat{\overline{a}} = \arg\min_{\overline{\alpha}} M \left[\sum_{\overline{j}} (z_{\overline{j}}^2 - \hat{z}_{\overline{j}}^2(\overline{\alpha}))^2 \right], \tag{4.15}$$

а также ряд других оценок, зависящих от используемой метрики. Дальнейшее разнообразие оценок достигается применением различных прогнозов $\hat{z}_{\bar{j}}^2(\overline{\alpha})$, например, оптимальный прогноз или различные интерполяции наблюдений z^1 , изначально заданных только на сетке Ω_1 .

Компенсационные оценки (4.14) и (4.15), вообще говоря, являются смещёнными. Они оценивают не сами параметры $\overline{\alpha}$ МКГТ, а только оп-

тимизируют выбранную компенсацию в смысле некоторой метрики, например, минимизируя средний квадрат остатков. Поэтому и совмещение кадров z^1 и z^2 при оцененных таким образом параметрах $\overline{\alpha}$ является псевдосовмещением в смысле наилучшей компенсации выбранного типа. Однако при хорошем выборе функции прогноза часто обеспечивается и достаточно эффективное совмещение.

4.4. СОВМЕЩЕНИЕ БИНАРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для совмещения бинарных изображений, например отпечатков пальцев, описанные выше алгоритмы неприменимы, так как интерполяция этих изображений теряет смысл.

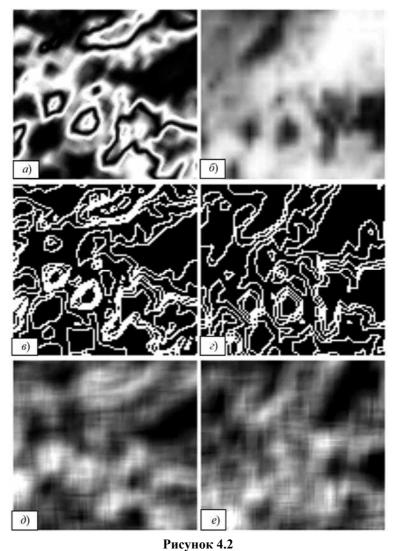
Это затруднение можно преодолеть, если бинарные изображения предварительно преобразовать в полутоновые путем сглаживания, то есть усреднения в скользящем окне. На рис. 4.2 показан пример такого преобразования бинарных изображений (рис. $4.2, 6, \epsilon$) в полутоновые (рис. $4.2, 6, \epsilon$).

К полученным полутоновым изображениям можно применить, например, компенсационные оценки параметров МКГТ. Полученные при этом оценки параметров МКГТ считаются оценками параметров МКГТ исходных бинарных изображений.

4.5. СОВМЕЩЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ СО ЗНАЧИТЕЛЬНЫМИ ЯРКОСТНЫМИ ИСКАЖЕНИЯМИ

При синтезе компенсационных алгоритмов совмещения изображений предполагалось, что искажения яркостей совмещаемых изображений отсутствуют или невелики, поэтому критерий качества совмещения по минимуму межкадровых разностей был работоспособен. Однако нередко встречаются ситуации, когда совмещаемые изображения имеют значительные яркостные искажения, возникающие из-за различных условий регист-

рации, например, из-за различных условий освещения или применения различных технических средств. В подобных случаях малость межкадровых разностей уже не может быть использована как критерий качества совмещения, поэтому нужны другие критерии (функционалы) качества совмещения.



Использование формы изображений при совмещении: a, δ – исходные изображения; e, ε – бинаризация; e, ε – сглаживание

4.5.1. Корреляционно-экстремальные алгоритмы

Предположим, что искажения яркостей двух изображений могут быть аппроксимированы линейной функцией. В этом случае должен быть высок коэффициент корреляции между этими изображениями. Поэтому в качестве критерия качества совмещения может быть взят часто применяемый максимум выборочного коэффициента корреляции. То есть ищется такая подвижка одного изображения относительно другого, при которой между ними достигается максимальный коэффициент корреляции.

4.5.2. Использование морфологического анализа (формы)

Предположим, что в некотором приближении различие в яркостях изображений X и Y может быть описано парой неизвестных преобразований x=f(u) и y=p(u), т.е. X и Y- две различные регистрации некоторого изображения (сцены) U. При этом, кроме различий в яркостях, имеются еще и МКГТ.

В таких условиях обычные критерии качества совмещения (по минимуму средних квадратов разностей или по максимуму коэффициента корреляции) не могут быть применены, так как даже пара несмещённых изображений с такими яркостными искажениями может иметь большой средний квадрат разностей или малый коэффициент корреляции.

Однако человек такие изображения совмещает без особого труда, поскольку учитывает при этом форму изображений [24, 63, 76]. Поэтому при синтезе алгоритмов совмещения следует использовать форму совмещаемых изображений. Понятие формы изображений определено в [63] как система индикаторных множеств, то есть множеств пикселей постоянной яркости.

Истинная форма изображения обычно не наблюдаема, но имеющиеся изображения дают некоторые ее приближения, поэтому могут быть по форме близки между собой, что и можно использовать при совмещении изображений. Непосредственное использование формы для совмещения трудно формализуется и приводит к физически нереализуемым переборным алгоритмам. Поэтому было бы полезно как-то преобразовать подобие формы

изображений в подобие их яркостей, чтобы стало возможным применение малозатратных алгоритмов. Для этого применим следующие преобразования [23, 24, 43].

Функциональные преобразования яркостей при отсутствии шумов сохраняют линии постоянной яркости истинной формы изображения U, то есть на X и Y эти линии могут только объединяться (происходит упрощение формы). Для формы конкретное значение яркости на этих линиях никакого значения не имеет. Поэтому изображения X и Y можно превратить в бинарные, квантуя их по яркости через один, например, четные значения яркости — ноль, а нечетные — единица. После такой бинаризации изображения X и Y обычно становятся похожими между собой по общему рисунку линий, что дает возможность их совмещения. Для этого они сначала сглаживаются, после чего применяется псевдоградиентный алгоритм по максимуму коэффициента корреляции, как это описано выше.

Для примера на рис. $4.2, a, \delta$ показаны два изображения, яркость которых отличается синусоидальным преобразованием. Одно изображение относительно другого смещено на -5,4 пкс по вертикали, на 4,3 пкс по горизонтали и повернуто на 0,5 рад.

Эти два изображения визуально кажутся совершенно разными, только при внимательном рассмотрении можно заметить некое подобие формы отдельных образований, но при совершенно другой яркости. Аналогией этих изображений могут служить две одинаковые картинки для раскрашивания, которые два ребенка раскрасили каждый по-своему.

Результат бинаризации этих изображений показан на рис. 4.2, ϵ , ϵ . Полученные изображения имеют большее сходство, чем исходные, так как соответствующие друг другу характерные участки визуально легко находятся. Еще более схожи между собой сглаженные изображения, показанные на рис. 4.2, δ , ϵ . При совмещении последних двух изображений были получены оценки: сдвиг по вертикали -4,91, по горизонтали 5,51 и угол 0,48 рад, что следует признать хорошим результатом, учитывая вид исходных изображений.

4.6. МЕТОД НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ПРИ СОВМЕЩЕНИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Многие методы совмещения изображений и оценивания параметров МКГТ имеют малые рабочие зоны, то есть работоспособны только при небольших значениях оцениваемых параметров. Например для того чтобы псевдоградиентный алгоритм сходился к точным значениям оцениваемых параметров, нужна достаточная близость первоначального приближения к этим точным значениям. В противном случае алгоритм может сойтись к точке локального экстремума целевой функции. Рассмотрим метод оценивания параметров МКГТ, имеющий большую рабочую зону. Однако точность этого метода невелика, поэтому его можно применить для получения первоначального приближения параметров, которое далее используется в более точном методе оценивания с небольшой рабочей зоной.

4.6.1. Метод неподвижной точки отображения

Пусть дано отображение $F:W\to W$ множества W в себя. Неподвижной точкой (НТ) отображения F называется любой элемент $w\in W$, для которого F(w)=w. То есть при отображении F такая точка не изменяется и переходит сама в себя. Это понятие используется, например, при решении алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений. Отображение F метрического пространства с метрикой ρ в себя называется сжимающим, если существует такая константа C<1, что для любых элементов v и w из F выполняется неравенство

$$\rho(F(v), F(w)) \leq C\rho(v, w)$$

т.е. такое отображение «сближает» элементы множества *W*. Известно, что сжимающее отображение имеет единственную HT. Применим понятие HT для оценивания параметров МКГТ изображений [48–50, 92–94].

Рассмотрим два изображения x(W) и y(J), заданные на целочисленных m-мерных сетках $W = \{w\} = \{(w_1,...,w_m)\}$ и

 $J = \{j\} = \{(j_1,...,j_m)\}$. Пусть известен вид МКГТ, связывающей координаты точек этих изображений:

$$w = F(j; \overline{\alpha}),$$

где $\bar{\alpha}$ — неизвестные параметры МКГТ, подлежащие оцениванию.

Выполнив вспомогательную МКГТ P изображения y(J), получим изображение z(J), связанное с x(W) сложным преобразованием

$$w = P(F(j; \overline{\alpha})) = H(j; \overline{\alpha}).$$

Предположим, что это преобразование имеет единственную HT ν :

$$v = H(v; \overline{\alpha}), \tag{4.16}$$

тогда (4.16) превращается в систему m уравнений относительно параметров $\bar{\alpha}$. Если число параметров МКГТ равно размерности изображений, то из (4.16) эти параметры определяются. Если же МКГТ имеет большее число параметров, то можно выполнить К вспомогательных преобразований P_k , найти НТ v_k каждого из сложных преобразований H_k и получить систему K уравнений

$$v_k = H_k(v_k; \overline{\alpha}), k = 1,...,K,$$

из которой находятся оценки всех параметров $\overline{\alpha}$ преобразования F.

На рис. 4.3 иллюстрируется наличие НТ после вспомогательного преобразования. На изображении 4.3,a находится смайлик. При параллельном сдвиге этого изображения вправо на α_1 и этот смайлик смещается на α_1 (рис. 4.3, δ). Очевидно, что НТ при параллельном сдвиге нет. Выполним вспомогательную МКГТ — разворот изображения 4.2, δ на угол π относительно центра. В результате получается изображение 4.3, ϵ . На рис. 4.3, ϵ показано наложение рис. 4.3, ϵ на рис. 4.3, ϵ . Видно, что помеченная стрелкой точка на этом рисунке расположена одинаково на обоих смайликах, это и есть НТ преобразования изображения 4.3, ϵ в изображение 4.3, ϵ .

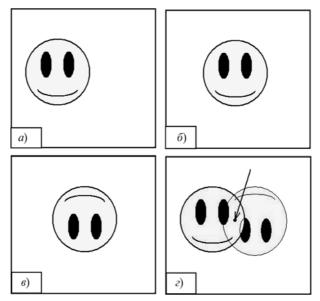


Рисунок 4.3

Неподвижная точка сложного преобразования перенос-поворот: $a, \, \delta$ – исходные изображения; s – поворот изображения δ ; s – наложение изображений a и s друг на друга

Существенно, что величина оцениваемых параметров $\overline{\alpha}$ никак не сказывается на структуре предлагаемого алгоритма. Необходимо только, чтобы можно было найти HT сложного преобразования. Для этого нужно, чтобы общая часть изображений x(W) и z(J) была не слишком малой и содержала в себе HT сложной МКГТ, то есть ограничения на величину параметров $\overline{\alpha}$ не очень сильные. В результате, как показано далее, рабочая зона алгоритмов составляет примерно треть от площади (или объёма) совмещаемых изображений.

Точность оценивания параметров $\overline{\alpha}$, естественно, зависит от погрешности оценки координат HT, которая имеет пиксельный порядок, что приводит к ошибкам оценки параметров $\overline{\alpha}$ для рассматриваемых видов МКГТ. Для уточнения оценивания $\overline{\alpha}$ предлагается использовать оценку, полученную с помощью HT, в качестве начального приближения в более точном алгоритме, обладающем высоким быстродействием, но с малой рабочей зоной, например, в ПГ алгоритме. В целом исполь-

зование такой пары алгоритмов позволяет существенно повысить быстродействие в системах реального времени, связанных с извлечением полезной информации из последовательностей изображений.

4.6.2. Метод неподвижной точки для двумерных изображений

Рассмотрим применение метода неподвижной точки для оценивания параметров МКГТ двумерных изображений. Обобщение этого метода на изображения большей размерности приводит только к техническим усложнениям [92–94].

Пусть x(u,v) и y(i,j) — два двумерных изображения с известным видом МКГТ (f,g), связывающей координаты точек этих изображений:

$$u = f(i, j; \overline{\alpha}), \quad v = g(i, j; \overline{\alpha}), \tag{4.17}$$

где $\bar{\alpha}$ – параметры, подлежащие оцениванию.

Выполнив вспомогательное преобразование (p,q) изображения y(i,j), получим изображение z(i,j), связанное с x(u,v) сложным преобразованием

$$k = f(p(i, j), q(i, j); \overline{\alpha}) = F(i, j; \overline{\alpha}),$$

$$l = g(p(i, j), q(i, j); \overline{\alpha}) = G(i, j; \overline{\alpha}).$$

Предположим, что это преобразование имеет единственную HT (u,v):

$$u = F(u, v; \overline{\alpha}), \ v = G(u, v; \overline{\alpha}).$$
 (4.18)

Если эту НТ удастся найти (хотя бы приближённо), то (4.18) превращается в систему уравнений относительно параметров $\bar{\alpha}$. Если МКГТ имеет только два параметра (например, при параллельном сдвиге или при изменении масштаба и повороте относительно известной точки), то из системы (4.18) эти параметры определяются. Если же МКГТ имеет более двух параметров, то можно выполнить K вспомогательных преобразований, найти их НТ и получить систему уравнений

$$u_k = F_k(u_k, v_k; \overline{\alpha}), \ v_k = G_m(u_k, v_k; \overline{\alpha}), \ k = 1, ..., K,$$

из которой находятся оценки всех параметров МКГТ.

Основная трудность применения этого метода состоит в нахождении НТ. Необходимым условием выполнения системы уравнений (4.19), т.е. неподвижности (u,v), является

$$x(F(u,v;\overline{\alpha}),G(u,v;\overline{\alpha}))=z(u,v)$$
.

Но это условие не является достаточным, так как на изображении x(u,v) могут быть и другие точки со значением z(i,j), а HT — только одна из них. Поэтому для каждого конкретного вида МКГТ нужно подобрать своё вспомогательное преобразование и найти достаточные признаки неподвижности точки.

4.6.3. Оценка сдвига двумерных изображений при малых поворотах и изменениях масштаба

Рассмотрим следующий, часто встречающийся вид МКГТ: поворот на угол α вокруг центра изображения, изменение масштаба с коэффициентом s и параллельный сдвиг на вектор (a,b). Оба изображения x(u,v) и y(i,j) заданы на целочисленной сетке. Расположим начало координат (0,0) в центре сетки. Таким образом, преобразование координат (i,j) изображения y(i,j) в координаты (u,v) изображения x(u,v) имеет вид

$$u = a + s(i\cos\alpha - j\sin\alpha),$$

$$v = b + s(i\sin\alpha + j\cos\alpha).$$
(4.19)

Координаты (u,v) могут оказаться дробными, тогда для вычисления значений x(u,v) может потребоваться интерполяция сеточного изображения x(u,v). По заданным изображениям x(u,v) и y(i,j) требуется оценить параметры МКГТ (4.19). Возьмём в качестве вспомогательного преобразования поворот изображения y(i,j) вокруг его центра на угол π , что даёт изображение z(i,j)=y(-i,-j). В преобразовании (4.19) этот поворот эквивалентен увеличению α на π , поэтому система (4.17) принимает вид

$$u = a - s(u\cos\alpha - v\sin\alpha),$$

$$v = b - s(u\sin\alpha + v\cos\alpha).$$

Она имеет единственное решение

$$u = [a(1 + s\cos\alpha) + bs\sin\alpha] / [(1 + s\cos\alpha)^2 + (s\sin\alpha)^2],$$

$$v = [b(1 + s\cos\alpha) - as\sin\alpha] / [(1 + s\cos\alpha)^2 + (s\sin\alpha)^2].$$
(4.20)

При значениях параметров $\alpha \approx 0$, $s \approx 1$ из (4.20) получаем $u \approx a/2, v \approx b/2$, т.е.

$$a \approx 2u, \ b \approx 2v$$
. (4.21)

Таким образом, оценив положение (u,v) НТ преобразования изображения x(u,v) в изображение z(i,j), мы из уравнений (4.21) оценим параметры сдвига (a,b).

Перейдём теперь к нахождению НТ. Для этого рассмотрим изображение $\Delta(i,j)=|z(i,j)-x(i,j)|$. Значения изображений x(u,v) и z(u,v) в НТ (u,v) совпадают, поэтому $\Delta(u,v)=0$. Но могут быть и другие точки, в которых $\Delta(u,v)=0$ просто из-за случайного совпадения значений x(i,j) и z(i,j). Пусть сначала в (4.24) $\alpha=0$ и s=1, тогда очевидно, что изображение $\Delta(i,j)$ переходит само в себя при повороте на угол π вокруг НТ. То есть это изображение имеет центральную симметрию относительно НТ (u,v). Поэтому

$$\varepsilon(u,v;m,n) = |\Delta(u+m,v+n) - \Delta(u-m,v-n)| = 0$$

при любых m и n. Однако снова могут быть и другие точки, в которых $\varepsilon(u,v;m,n)=0$ при некоторых значениях m и n. Но маловероятно, что $\varepsilon(u,v;m,n)=0$ сразу для многих значений m и n, если (i,j) не является НТ. Поэтому значения статистики

$$\varepsilon(i,j) = \sum_{m=0}^{r} \sum_{n=-r}^{r} \varepsilon(i,j;m,n)$$
(4.22)

с большей вероятностью малы, когда точка (i, j) находится вблизи НТ. Таким образом, за оценку координат НТ (u, v) можно принять координаты точки минимума (i, j) статистики (4.22).

Для иллюстрации этих выкладок приведен рис. 4.4. Байтовые спутниковые изображения облачности показаны на рис. $4.4,a,\delta$ смещены относительно друг друга на (a,b) = (22,-38) без поворота и изменения масштаба.

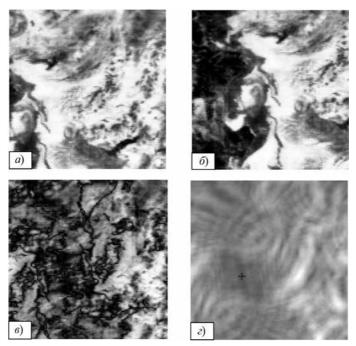


Рисунок 4.4
Нахождение неподвижной точки при параллельном сдвиге изображений: a, δ – исходные изображения; ε – изображение $\mathcal{L}(i,j)$; ε – изображение $\mathcal{L}(i,j)$

На рис. 4.4, ϵ показано изображение $\Delta(i,j)$. Визуально заметна его центральная симметрия относительно НТ с координатами (u,v)=(a/2,b/2)=(22/2,-38/2)=(11,-19). На рис. 4.4, ϵ показано изображение $\epsilon(i,j)$, при этом $\epsilon(11,-19)=0$, а остальные значения статистики $\epsilon(i,j)$ положительны.

При наличии поворота и изменения масштаба, когда $\alpha \neq 0, \ s \neq 1,$ центральная симметрия изображения $\Delta(i,j)$ наруша-

ется. Если угол поворота и изменение масштаба невелики, то искажения симметрии будут небольшими. Поэтому и точка минимума статистики (4.22) незначительно отклонится от искомой НТ, т.е. появится небольшая ошибка в определении её координат. Добавочную ошибку могут внести также взаимные яркостные искажения изображений x(i,j) и z(i,j), например их зашумление. При суммировании в (4.22) происходит сглаживание, поэтому влияние шума несколько ослабевает.

Дополнительное ослабление влияния шума можно получить, если учесть приблизительную центральную симметрию изображения $\varepsilon(i,j)$ и взять статистику, аналогичную (4.22):

$$\delta(i,j) = \sum_{m=0}^{r} \sum_{n=-r}^{r} |\varepsilon(i+m,j+n) - \varepsilon(i-m,j-n)|.$$
 (4.23)

На рис. 4.6 приведен пример применения этого метода. Изображения на этом рисунке имеют то же происхождение, что и на рис. 4.5. Изображения на рис. 4.6,a, δ имеют параметры МКГТ a=43,2; b=-38,7; $\alpha=0,1$ рад, s=0,9. Изображения на рисунках искажены сильным аддитивным белым шумом с СКО $\sigma=30$, поэтому картина облачности на них просматривается не так ясно, как на рис. 4.5. На рис. 4.6,s— δ показаны соответственно изображения $\Delta(i,j)$, $\varepsilon(i,j)$ и $\delta(i,j)$. Точки минимума изображений $\varepsilon(i,j)$ и $\delta(i,j)$ помечены крестиками, их координаты равны (3,-11) и (23,-19). Соответствующие оценки сдвига, полученные по статистикам $\varepsilon(i,j)$ и $\delta(i,j)$, есть соответственно (6,-22) и (46,-38). Учитывается вторая из них, которую следует признать хорошим результатом для таких тяжелых условий оценивания.

Проведенные испытания описанного алгоритма показали, что при $|\alpha| \le 0,1$ рад, $|s-1| \le 0,1$ и белом шуме с $\sigma \le 30$ ошибка оценки даже больших значений параметров сдвига (десятки пикселей) байтовых имитированных и реальных изображений, как правило, не превышала 4...6 пкс.

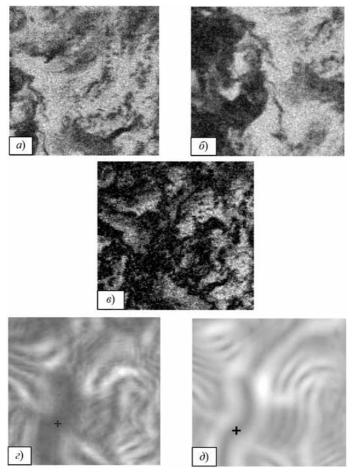


Рисунок 4.5 Нахождение неподвижной точки при сдвиге, повороте, изменении масштаба и зашумлении: a, δ – исходные изображения; s – изображение $\Delta(i, j)$; ε – изображение $\varepsilon(i, j)$; δ – изображение $\delta(i, j)$

4.6.4. Оценка параметров при больших углах поворота и изменениях масштаба

Если условия $\alpha \approx 0$, $s \approx 1$ не выполняются, то изображение $\Delta(i,j)$ не имеет центральную симметрию. Если при этом известно, что значения этих параметров находятся в небольшом диапазоне, то для поиска НТ можно выполнить несколько пробных поворотов и изменений масштаба изображения y(i,j) так, чтобы при одной из этих комбинаций полученное изображение $y_k(i,j)$ удовлетворяло условию $\alpha \approx 0$, $s \approx 1$ относительно x(u,v). Такие пробные повороты выполняются с уменьшающимся шагом для уточнения оценки.

Если же диапазон угла поворота и масштаба велик или неизвестен, то можно использовать следующий метод нахождения HT. Применим к изображению y(i,j) вспомогательное преобразование вида (4.19):

$$k = a_1 + s_1 (u \cos \alpha_1 - v \sin \alpha_1),$$

$$l = b_1 + s_1 (u \sin \alpha_1 + v \cos \alpha_1),$$
(4.24)

где a_1, b_1, s_1, α_1 – известные параметры.

Преобразование (4.24) есть параллельный сдвиг на вектор (a_1,b_1) , поворот на угол α_1 вокруг точки (a_1,b_1) и масштабирование с коэффициентом s_1 . Для различных значений этих параметров имеется соответствующая НТ (u,v) с координатами

$$u = \frac{c(1 - ss_1p) - dss_1q}{(1 - ss_1p)^2 + (ss_1q)^2}, \quad v = \frac{d(1 - ss_1p) + css_1q}{(1 - ss_1p)^2 + (ss_1q)^2},$$
(4.25)

где:

$$c = a + s(a_1 \cos \alpha - b_1 \sin \alpha), \quad p = \cos(\alpha + \alpha_1),$$

$$d = b + s(a_1 \sin \alpha + b_1 \cos \alpha), \quad q = \sin(\alpha + \alpha_1).$$

Пусть параметры (a_1,b_1) в (4.25) изменяются, тогда соответствующая НТ будет перемещаться. Если точки (a_1,b_1) двигать по прямой линии:

$$a_1(t) = m + nt$$
, $b_1(t) = g + ht$,

то НТ также будет двигаться вдоль прямой, описываемой уравнениями:

$$u(t) = \frac{AB_0 - BB_1}{A^2 + B^2} t + \frac{AH_0 - BH_1}{A^2 + B^2},$$

$$v(t) = \frac{AB_1 + BB_0}{A^2 + B^2} t + \frac{AH_1 + BH_0}{A^2 + B^2},$$
(4.26)

где:

$$A = 1 - ss_1 p, B = ss_1 q,$$

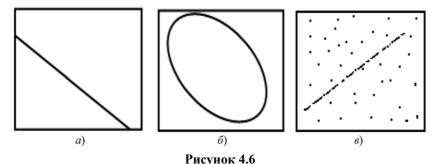
$$B_0 = s(n\cos\alpha + h\sin\alpha),$$

$$B_1 = s(n\sin\alpha - h\cos\alpha),$$

$$H_0 = a + s(m\cos\alpha - g\sin\alpha),$$

$$H_1 = b + s(m\sin\alpha + g\cos\alpha).$$

Пример такой траектории показан на рис. 4.6,a. Если в (4.24)–(4.26) изменять только угол поворота α_1 или только коэффициент масштаба, оставляя остальные параметры постоянными, то траектория соответствующей НТ будет эллиптической (рис. $4.6,\delta$). Однако на изображении $\Delta(i,j)$, кроме НТ, могут быть и другие точки, где $\Delta(i,j)=0$ из-за случайного совпадения величин x(i,j) и z(i,j) (рис. $4.6,\epsilon$). Поэтому возникает задача отыскания траектории НТ среди множества других случайных точек.



Траектории движения неподвижных точек: a – прямолинейная; δ – эллиптическая; ϵ – прямолинейная среди посторонних точек

На бинарном изображении, состоящем из точек, в которых $\Delta(i,j)=0$ хотя бы при одном из вспомогательных преобразований, следует обнаружить эллипс или прямую линию и определить параметры этой линии.

Мы отдадим предпочтение прямым, так как их легче обнаруживать. Исходя из этого, будем выполнять вспомогательные преобразования (4.24), изменяя в них только точку поворота (a_1,b_1) .

Пусть истинная прямолинейная траектория u(t) = Pt + D, v(t) = Qt + E найдена. Возьмём на ней две HT и подставим их координаты в уравнения (2.26). Решая полученную систему из четырех уравнений относительно неизвестных a,b,s,α численными методами, получим искомые оценки параметров МКГТ.

Следует отметить, что из-за ошибок интерполяции изображений и возможной их зашумленности равенство $\Delta(i,j)=0$ может не выполняться даже в HT. Поэтому будем в качестве индикатора применять неравенство $\Delta(i,j) \leq \lambda$, где λ — некоторый порог. В связи с этим возрастает количество случайных точек, «подозрительных» на неподвижность. При этом возрастает и количество ложных ПТ, что увеличивает дальнейший перебор при выборе истинной траектории.

Для уменьшения перебора следует, кроме близости значений изображений, принять во внимание другие признаки неподвижности точек. Такими признаками могут быть локальные особенности изображений. Рассмотрим для этой цели квадрат градиента и лапласиан изображений x(k,l) и z(i,j). Нетрудно показать, что

$$|\nabla z(i,j)|^2 = (ss_1)^2 |\nabla x(k(i,j),l(i,j))|^2,$$

$$\Delta z(i,j) = (ss_1)^2 \Delta x(k(i,j),l(i,j)).$$

Эти равенства в HT (u,v) принимают вид:

$$|\nabla z(u,v)|^2 = (ss_1)^2 |\nabla x(u,v)|^2,$$

$$\Delta z(u,v) = (ss_1)^2 \Delta x(u,v),$$
(4.27)

где коэффициент $(ss_1)^2$ неизвестен из-за неизвестности s .

Выполним преобразование

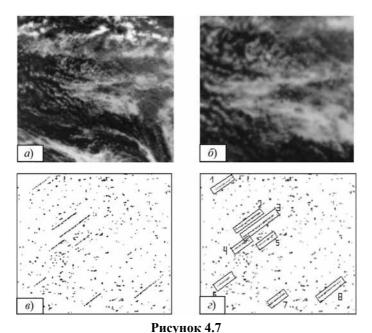
$$x'(i,j) = |\nabla x(i,j)|^2 \Delta z(i,j),$$

$$z'(i,j) = |\nabla z(i,j)|^2 \Delta x(i,j)$$
(4.28)

изображений x(k,l) и z(i,j). В силу (4.27) значения (4.28) в НТ точке (u,v) совпадают:

$$x'(u,v) = z'(u,v)$$
.

Кроме того, как и ранее, в этой точке, хотя бы приближенно, должно выполняться равенство $\Delta(u,v)=0$. На рис. 4.7 представлен пример применения описанной методики.

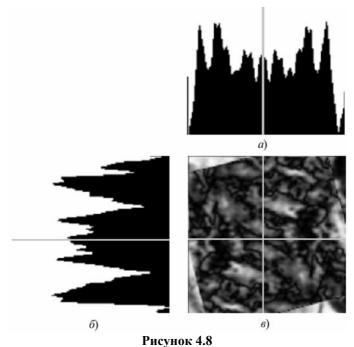


Нахождение траектории неподвижных точек: a, δ — исходные изображения; s — прямолинейные траектории среди посторонних точек; c — найденные прямолинейные траектории

4.6.5. Нахождение центра симметрии изображения по проекциям

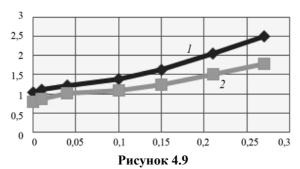
Нахождение НТ с помощью вычисления статистики (4.22) или (4.23) по множеству точек требует больших временных затрат. Для сокращения этих затрат в [48] был предложен следующий способ нахождения НТ по проекциям изображения $\Delta(i,j)$. Строятся две проекции изображения $\Delta(i,j)$, например, горизонтальная и вертикальная (рис. 4.8), как сумма яркостей в каждом столбце или строке соответственно. Очевидно, что при наличии центральной симметрии на двумерном изображении, симметрия также будет и на двух его проекциях. Поэтому координаты НТ (по горизонтали и вертикали) оцениваются каждая на своей проекции раздельно, что значительно ускоряет поиск в силу меньшей размерности.

Таким образом, при отсутствии поворота в МКГТ, время работы алгоритма пропорционально площади изображения wh.



Нахождение точки центральной симметрии по двум проекциям: $a, \, \delta$ – проекции изображения ϵ

На верхнем графике (рис. 4.9) показана зависимость среднего модуля ошибки оценки смещения изображений в пикселях от отношения шум/сигнал (в СКО), когда координаты НТ оцениваются описанным способом по двум проекциям. При этом угол поворота экспериментальных изображений выбирался случайно с равномерным распределением на $(-\pi/2; \pi/2)$, а смещения по обеим координатам – равномерно на интервале (-30; 30).



Графики зависимости среднего модуля ошибки оценивания смещения изображений от уровня шума: I — по двум проекциям; 2 — по четырем проекциям

Для повышения точности оценивания параметров МКГТ можно использовать большее количество проекций на оси различных направлений. Однако возникает необходимость интерполяции изображений, так как изображения заданы только на целочисленной сетке. Для проекций на рис. 4.8 интерполяция не требуется, так как вертикальные и горизонтальные линии проектирования проходят точно по узлам сетки. Это справедливо для двух диагональных проекций под углами $\pm \pi/4$ (рис. 4.10 и 4.11).

Естественно, что при наличии центральной симметрии на двумерном изображении, симметрия также будет и на диагональных проекциях. Поэтому координаты HT изображений оцениваются на своей диагональной проекции раздельно.

Далее полученные координаты HT пересчитываются в основные координаты и усредняются с ранее полученными координатами HT.

На нижнем графике (рис. 4.9) показана зависимость среднего модуля ошибки оценки смещения изображений в пикселях от отношения шум/сигнал (в СКО), когда координаты HT оценивают-

ся описанным способом по четырем проекциям. Сравнение с верхним графиком этого рисунка показывает, что добавлением двух проекций было достигнуто увеличение точности измерения сдвига приблизительно на 40%.

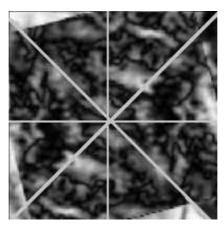


Рисунок 4.10 Нахождение неподвижной точки по четырем проекциям

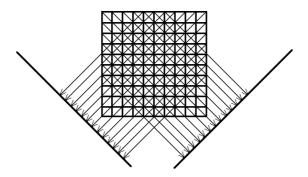


Рисунок 4.11 Схема диагональных проекций

Отметим интересную особенность диагональных проекций. Ряды (столбцы) пикселей этих проекций находятся на расстоянии $\sqrt{0.5}\approx0.7$ (рис. 4.11). При пересчете в старую систему координат достигается дискретность в половину пикселя. Таким образом, на диагональных проекциях может быть достигнута субпиксельная точность нахождения НТ, что, очевидно, также повлияло на существенное повышение точности при увеличении числа проекций.

Глава 5

АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассмотренные ранее алгоритмы обработки изображений синтезировались, в основном, при предположении, что полностью заданы модели самих изображений, помех и наблюдений. На практике же обычно эти модели известны лишь частично, т.е. имеется та или иная априорная неопределенность задания модели изображений, поэтому возникает потребность в синтезе адаптивных алгоритмов обработки. По адаптивным алгоритмам обработки различных данных, в частности, сигналов и изображений, имеется очень большое количество работ, например [2, 13, 20, 23, 24, 31, 41, 43, 44, 56, 58, 61, 65, 74, 75, 83, 95]. В этой главе рассмотрены адаптивные алгоритмы для решения ряда задач обработки изображений. При этом предпочтение отдается псевдоградиентным алгоритмам адаптации.

5.1. КЛАССИФИКАЦИЯ АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ

5.1.1. Аргументные и критериальные задачи

По цели обработки данных адаптивные алгоритмы можно разделить на аргументные и критериальные. Исходной посылкой для синтеза алгоритмов является минимизация средних потерь, формально выражающихся функционалом качества, $R(\bar{\alpha},Z)=J(\bar{\alpha})$, т.е. критерием, который нужно минимизировать по некоторым параметрам $\bar{\alpha}$. Однако требования к этой минимизации могут быть различными.

В аргументных задачах целью является возможно более точное отыскание точки минимума $\overline{\alpha}^*$ (возможно, переменной). К этому типу относятся задачи измерения параметров, фильтрации, прогноза и т.д. Сам критерий $J(\overline{\alpha})$ может вводиться искусственно и играет роль меры рассогласования между оценкой и точным значением параметра. При этом алгоритм обработки часто оказывается одинаковым для широкого класса функций потерь.

В критериальных задачах целью является приближение $J(\overline{\alpha})$ к его минимальному значению $J^* = J(\overline{\alpha}^*)$, а сами параметры $\overline{\alpha}$ интерес не представляют и, вообще говоря, могут значительно отличаться от $\overline{\alpha}^*$.

Пусть, например, $\overline{\alpha}$ — весовой вектор линейной оценки $\hat{x} = \overline{\alpha}^T \overline{Z}$ гауссовского параметра x по гауссовским наблюдениям \overline{Z} и $J(\overline{\alpha})$ — средний квадрат ошибки этой оценки. Тогда поверхности $J(\overline{\alpha}) = c$ являются эллипсоидами с центром в $\overline{\alpha}^*$ (рис. 5.1). При этом более близким к центру эллипсоидам соответствуют меньшие значения $J(\overline{\alpha})$.

Может оказаться, что $J(\bar{\alpha}_1) < J(\bar{\alpha}_2)$, хотя и $\bar{\alpha}_1$ находится от $\bar{\alpha}^*$ дальше, чем $\bar{\alpha}_2$. Другими словами, «потребительские» каче-

ства вектора $\overline{\alpha}_1$ выше, чем у $\overline{\alpha}_2$, несмотря на то, что $\overline{\alpha}_1$ находится дальше от оптимума, чем $\overline{\alpha}_2$.

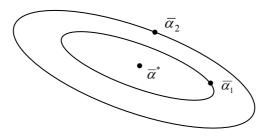


Рисунок 5.1 Изолинии функционала

5.1.2. Идентификационная и безыдентификационная адаптация

По методу нахождения оптимальных параметров $\overline{\alpha}^*$ адаптивные алгоритмы можно разбить на идентификационные и безыдентификационные.

В идентификационных алгоритмах сначала по всем имеющимся данным оцениваются все недостающие неизвестные характеристики γ . Затем полученные оценки $\hat{\gamma}$ используются как точные. В результате получаем параметры для алгоритма в виде $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\hat{\gamma})$. В этом суть многочисленных модифицированных байесовых решающих правил.

При всех своих положительных качествах идентификационные алгоритмы имеют следующие серьезные недостатки, особенно при обработке многомерных данных.

- **1.** Зависимость данных от γ может быть очень сложной и даже неизвестной (например, зависимость изображений от меж-кадровых смещений), поэтому даже при известных γ определение $\overline{\alpha}(\gamma)$ представляет сложную задачу.
- **2.** Получение оценок $\hat{\gamma}$ требует дополнительных вычислений и делает обработку двухэтапной: сначала находятся оценки, а потом производится собственно обработка, что требует дополнительных линий задержки данных.

- **3.** Дальнейшие вычисления, в которых используются оценки $\hat{\gamma}$, могут быть неустойчивы к ошибкам этих оценок, например, матрицы выборочных корреляций зачастую плохо обусловлены (их детерминанты близки к нулю).
- **4.** Даже точное значение $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\gamma)$ может отличаться от оптимальных значений параметров алгоритма, так как обрабатываемые данные могут отличаться от используемой для их описания модели.

В алгоритмах *без идентификации* минимизация критерия $J(\overline{\alpha})$ производится по регулируемым параметрам $\overline{\alpha}$ без промежуточных оценок каких-либо характеристик γ исходных данных. При этом $\overline{\alpha}$ могут подбираться итерационно в процессе текущей обработки по наблюдениям за текущими значениями $J(\overline{\alpha})$. Для иллюстрации можно привести пример ручной настройки телевизора во время просмотра телепрограммы.

Для реализации таких алгоритмов необходима оценка текущего значения $J(\overline{\alpha})$, т.е. критерий должен быть наблюдаемым, что является ограничением на область применения этого подхода. Иногда выход может быть найден с помощью замены $J(\overline{\alpha})$ на другой, наблюдаемый критерий $J_1(\overline{\alpha})$, от которого требуется только, чтобы точки минимума $J(\overline{\alpha})$ и $J(\overline{\alpha})$ совпадали в аргументных задачах, а в критериальных — чтобы $J(\overline{\alpha})$ приближалось к $J^* = J(\overline{\alpha}^*)$, когда $J(\overline{\alpha})$ приближается к $J_1^* = J_1(\overline{\alpha}_1^*)$. Эта методика не означает отход от адаптивного байесова принципа, поскольку $J(\overline{\alpha})$ по-прежнему минимизируется.

Между этими двумя классами алгоритмов есть много общего. В безыдентификационном алгоритме можно найти признаки идентификации. Действительно, поскольку имеется зависимость $\overline{\alpha}=\overline{\alpha}(\gamma)$, то по найденному $\overline{\alpha}$ можно иногда оценить и γ . Тем не менее, это существенно разные классы алгоритмов.

5.1.3. Квазиоптимальные алгоритмы

Даже при полном описании данных не всегда удается найти оптимальное решающее правило из-за математических трудностей. Если его и удается найти, оно часто оказывается не-

допустимо трудоемким. Кроме того, используемая при синтезе модель исходных данных обычно лишь приближенно описывает реальность. В силу этих причин в реальных ситуациях часто не удается найти и применить оптимальное решающее правило.

Поэтому приходится применять *квазиоптимальные*, реализуемые правила, по возможности с меньшим проигрышем в качестве обработки. Для поиска таких правил можно использовать упрощенные модели данных, описывающие лишь их принципиальные свойства. Полученные правила (алгоритмы) содержат некоторые неопределенные параметры $\bar{\alpha}$, которые необходимо выбрать так, чтобы этот алгоритм давал наилучший результат на конкретных обрабатываемых данных.

Итак, к реальным данным адаптируется готовый алгоритм с неизменной структурой, изменяться могут только его подстраиваемые параметры $\bar{\alpha}$. Такой подход к адаптации называется *аппроксимацией решающего правила*. Этот прием применяется, например, когда какая-то готовая аппаратура используется для обработки имеющегося класса данных. Другой пример — поиск оптимального алгоритма в классе линейных алгоритмов (хотя оптимальный алгоритм может быть и нелинейным).

5.2. ПСЕВДОГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ АДАПТАЦИИ

Из 5.1 можно сделать вывод, что для обработки больших объемов данных (в частности, изображений и их последовательностей) целесообразно использовать безыдентификационные алгоритмы, учитывая требования простоты и работоспособности при значительных вариациях реальной ситуации. В значительной степени этим требованиям удовлетворяют псевдоградиентные (ПГ) адаптивные алгоритмы.

5.2.1. Структура и общие свойства

Пусть структура процедуры обработки определена, а критерий качества решения задачи сформулирован в терминах минимизации функционала $J(\overline{\alpha})$, который прямо или косвенно

отражает средние потери, когда обработка выполняется с параметрами $\bar{\alpha}$. Ввиду априорной неопределенности описания данных нет возможности заранее определить оптимальные параметры $\bar{\alpha}^*$. Поэтому необходима некоторая процедура адаптации, составляющая вместе с процедурой обработки адаптивный алгоритм, в котором параметры $\bar{\alpha}$ определяются на основании конкретной реализации (наблюдения) Z объекта обработки.

Таким образом, задача адаптации формулируется в виде задачи минимизации функции $J(\bar{\alpha}) = J(\bar{\alpha}, Z)$ для конкретной реализации Z, и речь идет об аппроксимации решающего правила, т.е. выбранной процедуры обработки. Применим для решения этой задачи безыдентификационную адаптацию.

Существует ряд численных методов поиска экстремумов. Наиболее распространенными являются различные модификации градиентного алгоритма

$$\overline{\alpha}_n = \overline{\alpha}_{n-1} - \mu_n \nabla J(\overline{\alpha}_{n-1}), \tag{5.1}$$

где:

 $\overline{\alpha}_n$ – следующее за $\overline{\alpha}_{n-1}$ приближение к точке минимума;

 μ_n — положительная числовая последовательность, определяющая длину шагов;

$$\nabla J(\overline{\alpha})$$
 – градиент функции $J(\overline{\alpha})$.

Каждый шаг в (5.1) делается в направлении скорейшего убывания $J(\bar{\alpha})$. Хотя и при выполнении некоторых условий сходимость $\bar{\alpha}_n \to \bar{\alpha}^*$ имеет место, она может оказаться очень медленной. Для ее ускорения выбираются направления, отличные от антиградиента (методы Ньютона, сопряженных градиентов и т.д.).

Применению этих методов в обработке изображений препятствует необходимость многократных и громоздких вычислений $\nabla J(\overline{\alpha}_{n-1},Z)$, каждое из которых обычно включает в себя всю процедуру обработки Z при параметрах $\overline{\alpha}_{n-1}$. Значительно сократить объем вычислений можно, если вместо $\nabla J(\overline{\alpha}_{n-1},Z)$ взять усечение $\nabla Q(\overline{\alpha}_{n-1}) = \nabla J(\overline{\alpha}_{n-1},Z_n)$, т.е. вычислять градиент не по всей реализации Z, а только по некоторой ее части Z_n , например в скользящем окне на МИ. Но тогда в (5.1) вместо точного значе-

ния градиента будет использоваться его значение со случайной ошибкой $\overline{\delta_n}$, и получается алгоритм

$$\overline{\alpha}_n = \overline{\alpha}_{n-1} - \mu_n(\nabla J(\overline{\alpha}_{n-1}, Z) + \overline{\gamma}_n) = \overline{\alpha}_{n-1} - \mu_n \nabla Q(\overline{\alpha}_{n-1}). \tag{5.2}$$

Последовательность $\overline{\alpha}_n$ становится случайной, поэтому случаен и сам факт ее сходимости к $\bar{\alpha}^*$.

Случайные ошибки $\overline{\delta}_n$ в (5.2), вообще говоря, не являются серьезным препятствием для сходимости $\overline{\alpha}_n \to \overline{\alpha}^*$. Существует большой класс методов стохастической аппроксимации, основанных на том факте, что при центрированности ошибки $(M[\overline{\delta_n}] = 0)$ процедура (5.2) сходится к $\overline{\alpha}^*$, как и процедура (5.1). Применяются и методы случайного поиска, в которых ошибка $\overline{\delta_n}$ вводится искусственно. Интересно, что наличие случайной ошибки $\overline{\delta_n}$ может даже ускорять сходимость процедуры.

Смысл центрированности $\overline{\delta_n}$ состоит в том, что шаги процедуры (5.2) в среднем выполняются точно по антиградиенту (в среднем в правильном направлении). Оказывается, что это условие можно существенно ослабить.

Рассмотрим пример, показанный на рис. 5.2, для которого

 $J(\overline{\alpha})$ есть расстояние между точкой $\overline{\alpha}$ и фиксированной точкой \overline{lpha}^* . Тогда антиградиент $-\nabla J(\overline{lpha})$ направлен по прямой от \overline{lpha} к $\bar{\alpha}^*$. Если вместо этого направления все время двигаться под углом, например, 89° к нему, то движущаяся точка $\bar{\alpha}$ по спирали будет стремиться к $\bar{\alpha}^*$. Таким образом, для сходимости (5.2) к $\bar{\alpha}^*$ совсем не обязательно, чтобы $M[\overline{\delta_n}] = 0$. Однако, если в нашем примере взять угол 91° , точка $\bar{\alpha}$ будет удаляться от $\bar{\alpha}^*$ по спирали.

В работе [61] было введено понятие псевдоградиента (ПГ), на основе которого разработан единый подход к анализу и

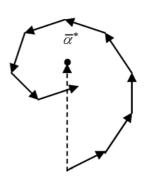


Рисунок 5.2 Движение по спирали

синтезу алгоритмов стохастической минимизации функционалов. Класс ПГ алгоритмов очень широк и включает в себя все (или почти все) алгоритмы адаптации и обучения. Эти алгоритмы основаны на процедуре

$$\bar{\alpha}_n = \bar{\alpha}_{n-1} - \mu_n \bar{\beta}_n \,, \tag{5.3}$$

где $\overline{\beta}_n$ — случайное (в частности, детерминированное) направление, вообще говоря, зависящее от предыдущих значений $\overline{\alpha}_i$ и от номера шага n.

Направление $\overline{\beta}_n$ называется *псевдоградиентом функциона-ла* $J(\overline{\alpha})$ в точке $\overline{\alpha}_{n-1}$, если выполнено условие псевдоградиентности

$$[J(\overline{\alpha}_{n-1})]^T M[\overline{\beta}_n] \ge 0, \tag{5.4}$$

где левая часть есть скалярное произведение, поэтому $\Pi\Gamma$ в среднем составляет острый угол с точным значением градиента (рис. 5.3).

Алгоритм (5.3) называется *псевдоградиентным*, если $\overline{\beta}_n$ является ПГ на каждом шаге. В этом случае шаги в (5.3) будут производиться в среднем в сторону уменьшения $J(\overline{\alpha})$ и можно надеяться на сходимость $\overline{\alpha}_n \to \overline{\alpha}^*$ при $n \to \infty$ (рис. 5.4), хотя и некоторые шаги могут быть сделаны в сторону увеличения $J(\overline{\alpha})$. И действительно, выполнение относительно слабых условий оказывается достаточным для сходимости с вероятностью единица при любом начальном приближении $\overline{\alpha}_0$ [61].

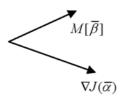


Рисунок 5.3 Градиент и псевдоградиент

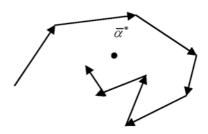


Рисунок 5.4 Движение по псевдоградиенту

Достаточными условиями сходимости являются:

- 1) строгое неравенство в (5.4) при $\bar{\alpha}_{n-1} \neq \bar{\alpha}^*$;
- 2) единственность точки минимума;
- 3) $\sum \mu_n = \infty$ (обеспечивает возможность дойти из любой точки до $\bar{\alpha}^*$) и $\sum \mu_n^2 < \infty$ (обеспечивает возможность асимптотического уменьшения дисперсии колебаний последовательности $\bar{\alpha}_n$).

Условию 3 удовлетворяют, например, последовательности вида $\mu_n = 1/\left(a + bn\right)$.

Как уже отмечалось, не всегда целью является приближение $\overline{\alpha}_n$ к $\overline{\alpha}^*$. В критериальных задачах требуется, чтобы $J(\overline{\alpha}_n) \to J(\overline{\alpha}^*)$. Условия такой сходимости даже слабее условий аргументной сходимости.

Скорость сходимости для обоих классов задач имеет обычный для статистических алгоритмов порядок $O(1/\sqrt{n})$, хотя для критериальных задач она иногда выше, чем для аргументных.

Отметим, что алгоритм (5.3) является существенно более общим, чем (5.2), так как в (5.3) не предполагается возможность вычисления $J(\bar{\alpha})$ или $\nabla J(\bar{\alpha})$, хотя бы и со случайной ошибкой, т.е. функционал $J(\bar{\alpha})$ может быть и ненаблюдаемым. Необходимо только наличие наблюдаемого ПГ. В частности, в качестве $\bar{\beta}_n$ может быть выбрано (даже зашумленное) значение градиента другого функционала $J_1(\bar{\alpha})$, у которого та же точка минимума, что и у $J(\bar{\alpha})$.

Допустимость зависимости $\overline{\beta}_n$ от предыдущих значений $\overline{\alpha}_i$ дает возможность применения ПГ алгоритмов для обработки не только одномерных данных, но и многомерных в порядке некоторой их развертки. До сих пор предполагалось, что задачей является нахождение точки минимума $\overline{\alpha}^*$ функционала $J(\overline{\alpha}, Z)$, единой для всей реализации Z. Такая точка $\overline{\alpha}^*$ существует, но обработка будет оптимальной, если данные Z однородны. Для сходимости $\overline{\alpha}_n \to \overline{\alpha}^*$ при этом требуется сходимость $\mu_n \to 0$. Если же, начиная с некоторого момента, ограничить μ_n снизу (например, взять постоянные $\mu_n = \mu$), то дисперсии ошибок оценок

 $\overline{\alpha}_n$ параметров $\overline{\alpha}^*$ перестанут уменьшаться и будут иметь порядок μ^2 , а сами $\overline{\alpha}_n$ будут колебаться около $\overline{\alpha}^*$.

Таким образом, если обработку однородных данных производить одновременно с оценкой $\overline{\alpha}^*$ (и, например, при $\mu_n = \mu$), то по достижении установившегося режима будет осуществляться некоторая квазиоптимальная обработка.

Если произойдет скачкообразное изменение характеристик Z или переход к обработке других данных, то могут измениться и значения требуемых оптимальных параметров $\overline{\alpha}_n^*$. Если обработка будет просто продолжена, то непосредственно после этого скачка возможно значительное ухудшение качества обработки, после чего постепенно снова будут достигнуты квазиоптимальные результаты.

При плавном изменении характеристик наблюдений Z (точнее, при плавном изменении оптимальных значений параметров $\overline{\alpha}^*$), соизмеримом со скоростью переходного процесса процедуры (5.3), появляется возможность применения ПГ алгоритмов к обработке неоднородных данных без их сегментации на участки относительно однородной структуры.

В такой постановке алгоритм (5.3) используется для текущей оценки переменных параметров $\overline{\alpha}_n^*$. Вопрос об асимптотической сходимости снимается. Вместо этого требуется как можно более точное приближение $\overline{\alpha}_n$ к изменяющемуся $\overline{\alpha}_n^*$ (или же $J(\overline{\alpha}_n)$ к $J(\overline{\alpha}^*)$). При этом возникает проблема компромисса в выборе μ_n : для уменьшения дисперсии ошибки нужно уменьшить μ_n , а для избежания нежелательного запаздывания оценки следует увеличить μ_n .

ПГ алгоритмы просты в реализации, применимы к очень широкому классу однородных и неоднородных данных (причём в случае однородных данных сходятся к оптимальным алгоритмам). Адаптация может выполняться непосредственно в процессе обработки, поэтому не требуется линий задержки данных.

Отмеченные положительные качества ПГ адаптивных алгоритмов делают их привлекательными для применения в обработке МИ, а также других больших массивов данных [13, 17, 20, 21, 24, 43, 51, 73, 95].

5.2.2. Выбор псевдоградиента

Главным в синтезе ПГ алгоритмов вида (5.3) является нахождение ПГ $\bar{\beta}_n$ функционала качества $J(\bar{\alpha},Z)$. Рассмотрим два важнейших случая.

Случай 1. В большинстве статистических задач (в частности, в обработке изображений) функционал качества выражается через среднее значение некоторой функции $g(\overline{\alpha}, Z)$:

$$J(\bar{\alpha}, Z) = M[g(\bar{\alpha}, Z)], \tag{5.5}$$

например через средний квадрат ошибки оценки параметра θ . Тогда

$$g(\bar{\alpha}, Z) = [f(\bar{\alpha}, Z) - \theta]^2 = \Delta^2(\bar{\alpha}, Z), \qquad (5.6)$$

где:

 θ – точное значение параметра;

$$f(\overline{\alpha}, Z) = \hat{\theta}$$
 – его оценка.

К (5.5) приводят задачи прогноза, фильтрации и т.д. Если реализации $g(\overline{\alpha},Z)$ наблюдаемы (например, при прогнозе), то можно взять в качестве ПГ $\overline{\beta}_n = \nabla g(\overline{\alpha}_{n-1},Z)$ или его сужение

$$\overline{\beta}_n = \nabla g(\overline{\alpha}_{n-1}, Z_n) \tag{5.7}$$

на часть данных Z_n (например, на скользящее окно на изображении). Если возможно дифференцирование под знаком математического ожидания, то для направления (5.7) условие псевдоградиентности (5.4) выполняется тривиально:

$$(\nabla M[g])^T M[\overline{\beta}] = (\nabla M[g])^T M[\nabla g] =$$

$$= (M[\nabla g])^T M[\nabla g] = |M[\nabla g]|^2 > 0.$$

Если же реализации функции (5.5) не наблюдаемы, то следует ввести вспомогательный наблюдаемый функционал качества J_1 , выраженный через среднее значение некоторой функции.

Например, при оценке математического ожидания α случайной величины Z можно взять $J_1(\alpha,Z)=M[(Z-\alpha)^2]$, тогда

$$\overline{\beta}_n = -(z_n - \alpha_{n-1}) \text{ M } \alpha_n = \alpha_{n-1} + \mu_n(z_n - \alpha_{n-1}),$$

где z_n – очередное наблюдение Z.

При оценивании среднего квадрата случайной величины Z можно взять $J_1(\alpha, Z) = M[(Z^2 - \alpha)^2]$, тогда

$$\overline{\beta}_n = -(z_n^2 - \alpha_{n-1}), \quad \alpha_n = \alpha_{n-1} + \mu_n(z_n^2 - \alpha_{n-1}).$$

При оценивании коэффициента корреляции центрированных случайных величин Z и Y с одинаковыми дисперсиями можно взять $J_1(\alpha, Z, Y) = M[(\alpha Z - Y)^2]$, тогда

$$\overline{\beta}_n = (\alpha_{n-1}z_n - y_n)z_n$$
, $\alpha_n = \alpha_{n-1} - \mu_n(\alpha_{n-1}z_n - y_n)z_n$.

При оптимизации линейной оценки $Y = \overline{\alpha}^T \overline{Z}$ (например, оптимизации линейного прогноза) можно использовать функционал $J_1(\overline{\alpha}, \overline{Z}, Y) = M[(\overline{\alpha}^T \overline{Z} - Y)^2]$, тогда

$$\overline{\beta}_n = (\overline{\alpha}_{n-1}^T \overline{z}_n - y_n) \overline{z}_n , \quad \overline{\alpha}_n = \overline{\alpha}_{n-1} - \mu_n (\overline{\alpha}_{n-1}^T \overline{z}_n - y_n) \overline{z}_n .$$

Оценка квантилей случайных величин также может быть выполнена с помощью ПГ алгоритмов. Этот способ рассмотрен в §5.8.

Случай 2. Иногда критерий качества выражается через вероятность события A, например, через вероятность правильного обнаружения. Этот случай можно свести к предыдущему, так как вероятность может быть выражена через математическое ожидание: $P(A) = M[\chi_A]$, где χ_A — индикатор события A ($\chi_A = 1$, если A произошло, и $\chi_A = 0$, если A не произошло). Тогда реализациями являются оценки вероятности P(A) по частоте события A в каждом отдельном испытании (0 или 1). Для улучшения оценок можно использовать относительные частоты в группах из нескольких испытаний. При ненаблюдаемости события A иногда удается ввести вспомогательный функционал, выражаемый через параметры, влияющие на P(A). Например, через отношение сигнал/шум, которое оказывает влияние на характеристики алгоритма обнаружения объектов на фоне мешающих изображений.

Отметим, что вместо ПГ (5.6) часто можно взять

$$\overline{\beta}_n = \varphi(\nabla g(\overline{\alpha}_{n-1}, Z_n)),$$

где $\, \varphi \,$ – векторная функция той же размерности, что и $\, \nabla g \,$.

При этом φ может выбираться из широкого класса функций, но требуется, чтобы условие псевдоградиентности сохранялось. Очень простые и в то же время хорошо сходящиеся алгоритмы получаются при знаковой функции

$$\varphi(\overline{\alpha}) = \varphi(\alpha_1, ..., \alpha_m) = = \operatorname{sign}(\alpha_1, ..., \alpha_m) = (\operatorname{sign}(\alpha_1), ..., \operatorname{sign}(\alpha_m))^T,$$
(5.8)

при которой на каждом шаге компоненты $\bar{\alpha}_n$ в (5.3) отличаются от компонент $\bar{\alpha}_{n-1}$ на $\pm \mu_n$. Однако при функции (5.8) может нарушиться условие псевдоградиентности. Например, если применить (5.8) к (5.6), то вместо математического ожидания в функционале качества (5.5) будет использоваться медиана функции $g(\bar{\alpha}, Z)$.

5.3. ПСЕВДОГРАДИЕНТНЫЕ АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРОГНОЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

При решении ряда проблем обработки изображений часто возникает вспомогательная задача их прогноза, т.е. задача построения оценки $x_{\overline{i}}^*$ элемента изображения $x_{\overline{i}}$ по некоторой совокупности (шаблону) наблюдений $Z_{\overline{i}}$, не включающей в себя сам прогнозируемый элемент. В частности, в фильтрах Калмана экстраполированная оценка есть именно прогноз.

В большинстве практических ситуаций точность прогноза возрастает с расширением шаблона, но при этом существенно возрастают вычислительные затраты.

Будем считать прогноз оптимальным, если достигается минимум среднего квадрата ошибки $M[\left(x_i^*-x_i\right)^2]=M[\Delta_i^2]$ прогноза. При этом оптимальным прогнозом будет условное математи-

ческое ожидание $M[x_{\overline{i}} \mid Z_{\overline{i}}]$, одним из возможных вариантов которого является беровская функция $f(Z_{\overline{i}})$ от случайных величин $Z_{\overline{i}}$. Тип функции f зависит от вида распределений элементов изображения, т.е. от его модели. Поэтому оптимальный прогноз может быть представлен как

$$x_{\overline{i}}^* = f(\overline{\alpha}_{\overline{i}}, Z_{\overline{i}}),$$

где $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ – параметры функции прогноза, зависящие от $\bar{\gamma}$.

Например, в случае гауссовских изображений с нулевым средним оптимальный прогноз линеен:

$$x_{\overline{i}}^* = \overline{\alpha}_{\overline{i}}^T Z_{\overline{i}}$$
.

Если вид функции прогноза определен, то задача сводится к его оптимизации, т.е. к нахождению оптимальных значений $\overline{\alpha}_{\overline{i}}^*$ параметров $\overline{\alpha}_{\overline{i}}$, при которых достигается минимум квадрата ошибки

$$J(\bar{\alpha}_{\bar{i}}) = M[(f(\bar{\alpha}_{\bar{i}}, Z_{\bar{i}}) - x_{\bar{i}})^{2}]. \tag{5.9}$$

Построим ПГ алгоритм, минимизирующий этот функционал. Для ПГ алгоритма нужен наблюдаемый псевдоградиент $\overline{\beta}_n$, который нельзя получить как реализацию градиента ненаблюдаемого функционала (5.9). Однако у нас имеются наблюдения $z_{\overline{i}}=x_{\overline{i}}+\theta_{\overline{i}}$, оптимальный прогноз которых в силу независимости и центрированности шумов совпадает с оптимальным прогнозом элементов истинного МИ. Поэтому функционал (5.9) можно заменить вспомогательным функционалом

$$J^*\left(\overline{\alpha}_{\overline{i}}\right) = M[\left(f\left(\overline{\alpha}_{\overline{i}}, Z_{\overline{i}}\right) - z_{\overline{i}}\right)^2],$$

наблюдаемым ПГ которого можно взять

$$\overline{\beta}_n = \nabla \left(f\left(\overline{\alpha}_n, Z_n\right) - y_n \right)^2 = 2\Delta_n \frac{\partial f\left(\overline{\alpha}_n, Z_n\right)}{\partial \overline{\alpha}_n}$$
 (5.10)

Нахождение градиента в (5.10) затруднений не вызывает, так как функция прогноза f задана. Например, при линейном прогнозе $\partial f(\overline{\alpha}_n, Z_n)/\partial \overline{\alpha}_n = Z_n$.

Описанные алгоритмы прогноза очень экономичны в вычислительном отношении, что позволяет реализовать их в реальном времени. Например, при линейном прогнозе на один элемент изображения требуется около 4N арифметических операций, где N – число элементов в Z_n . Обработка осуществляется за один проход изображения, поэтому не требуется больших резервов памяти.

При обработке изображений с плавной неоднородностью алгоритмы дают результаты, сравнимые с потенциально достижимыми. Например, если коэффициент корреляции между соседними элементами в левом верхнем углу изображения размеров 128×128 равен 0,8, а в правом нижнем углу изображения равен 0,95, то СКО ошибки прогноза всего на 5...10% больше по сравнению с оптимальным прогнозом при известных коэффициентах корреляции.

В случае изображений с выраженной неоднородностью для улучшения прогноза можно применить те же алгоритмы с особым способом обхода элементов. Например, обход с возвратами (три шага вперед, два назад). При таких обходах процедура дольше находится в одном месте, поэтому параметры прогноза успевают лучше подстроиться к локальным особенностям изображения. Однако при этом возрастают вычислительные затраты.

На рис. 5.5 показан пример алгоритма для линейного прогноза однородного гауссовского изображения, имеющего разделимую экспоненциальную КФ. Прогноз элемента изображения осуществляется в виде взвешенной суммы его восьми ближайших соседей. На рис. 5.5,a показано исходное изображение, на рис. 5.5,b – его оптимальный прогноз, на рис. 5.5,b – его ошибки. Рис. 5.5,b соответствует адаптивному псевдоградиентному прогнозу, рис. 5.5,b – его ошибкам. Визуально рис. 5.5,b одинаковы, так как адаптивный прогноз близок к оптимальному. Тем не менее, ошибки прогноза (увеличенные для визуализации) на рис. 5.5,b,b различаются между собой.

В нескольких первых (верхних) строках адаптивного прогноза (рис. 5.5, θ) ошибки относительно большие, так как идет процесс подстройки параметров прогноза. Этот процесс быстро устанавливается. На рис. 5.5, θ показаны ошибки прогноза при втором проходе изображения, который начат со значений параметров прогноза, установившихся к концу первого прохода. Анализ рис. 5.5, θ , θ позволяет сделать вывод об отсутствии какой-

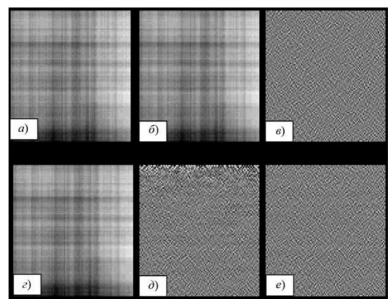


Рисунок 5.5

Адаптивный прогноз изображения:

- a исходное изображение; δ оптимальный прогноз;
- e ошибки оптимального прогноза; z псевдоградиентный прогноз;
 - ∂ ошибки псевдоградиентного прогноза при первом проходе;
 - е ошибки псевдоградиентного прогноза при втором проходе

либо разницы между ними, что говорит о том, что адаптивный псевдоградиентный прогноз практически сошелся к оптимальному прогнозу.

С помощью адаптивных ПГ алгоритмов можно получать хорошее качество прогноза изображений при небольших вычислительных затратах.

5.4. Адаптивные

ПСЕВДОГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Методы ПГ адаптации могут быть с успехом применены и к задачам фильтрации изображений. Основная возникающая при этом трудность состоит в ненаблюдаемости качества фильт-

рации, поскольку не наблюдаема ее ошибка. Поэтому качество фильтрации приходится оценивать с помощью вспомогательного наблюдаемого функционала, от которого требуется только, чтобы его точка минимума по параметрам процедуры фильтрации совпадала с точкой минимума основного функционала качества. Продемонстрируем эту методику на примере фильтрации плоского изображения.

Пусть наблюдаемое изображение $Z=\{z_{ij}\}$ представляет собой аддитивную смесь информативного сигнала $X=\{x_{ij}\}$, определяемого авторегрессионной моделью Хабиби

$$x_{ij} = \rho_{ij} x_{i,j-1} + r_{ij} x_{i-1,j} - \rho_{ij} r_{ij} x_{i-1,j-1} + \sqrt{(1 - \rho_{ij}^2)(1 - r_{ij}^2)} \sigma_x \xi_{ij},$$
(5.11)

и белого гауссовского шума $\Theta = \{\theta_{ij}\}$:

$$z_{ij} = x_{ij} + \theta_{ij}. agenum{5.12}$$

При этом параметры модели сообщения (5.11) и дисперсия шума $\sigma_{\theta_{ij}}^2$ в модели наблюдения (5.12) неизвестны и, возможно, варьируются по полю кадра. В последнем случае вариация предполагается достаточно плавной.

Требуется по наблюдениям Z оценить информативное изображение X. Применим для решения этой задачи так называемый адаптивный псевдоградиентный аппроксимированный фильтр Калмана, являющийся адаптивным вариантом аппроксимированного фильтра Калмана [43].

Рассмотрим сначала неадаптивный фильтр, когда параметры моделей (5.11) и (5.12) известны и постоянны. Оценки X находятся построчно.

Первая строка $x_1 = \{x_{1,j} : j = 1...N\}$ оценивается по первой строке наблюдений $z_1 = \{z_{1,j} : j = 1...N\}$ с помощью уравнения фильтра Калмана в установившемся режиме:

$$\tilde{x}_{1j} = a\tilde{x}_{1,j-1} + b(z_{1j} - a\tilde{x}_{1,j-1}) = c\tilde{x}_{1,j-1} + bz_{1j}, \ c = a(1-b).$$
 (5.13)

Далее производится сглаживание обратным ходом:

$$\hat{x}_{1j} = \tilde{x}_{1j} + b(\hat{x}_{1,j+1} - a\tilde{x}_{1j}). \tag{5.14}$$

Процедуры (5.13) и (5.14) отличаются от оптимальных постоянством коэффициентов, что приводит к ухудшению оценок в начале строки.

Пусть уже получена оценка \hat{x}_{i-1} строки с номером i-1. Следующая i-я строка представляется в виде

$$x_{i} = (x_{i} - rx_{i-1}) + rx_{i-1} = y_{i} + rx_{i-1}, (5.15)$$

где $r = r_{ij}$ — (постоянный) параметр модели (5.12) — коэффициент корреляции между соседними строками.

Оценка

$$\widehat{x}_i = \widehat{y}_i + r\widehat{x}_{i-1} \tag{5.16}$$

находится по наблюдениям

$$z_i' = z_i - r\hat{x}_{i-1}, (5.17)$$

полученным вычитанием прогноза $r\hat{x}_{i-1}$ строки x_i из наблюдений z_i этой строки. Сглаженные оценки \hat{y}_i формируются с помощью процедур, аналогичных (5.13) и (5.14).

Описанный фильтр является приближенным, аппроксимированным вариантом векторного фильтра Калмана, когда изображение рассматривается как последовательность векторов (строк). Использование установившегося варианта приводит, помимо ухудшения оценок в начале строк, еще и к ухудшению оценок первых строк изображения.

Рассмотрим теперь адаптивный вариант описанного выше алгоритма для ситуации, когда параметры моделей (5.11) и (5.12) неизвестны. Этот алгоритм включает в себя процедуры (5.13)–(5.16) с переменными коэффициентами a,b,c,r и процедуру подстройки этих параметров непосредственно в процессе обработки.

Рассмотрим сначала процедуру (5.16). Она включает в себя формирование прогнозов $x_{ij}^* = r\widehat{x}_{i-1,j}$ элементов x_{ij} по уже полученным сглаженным оценкам $\widehat{x}_{i-1,j}$ предыдущей строки. Прогнозы эти должны быть оптимальными в смысле минимума дисперсии ошибок прогноза $s_{ij} = x_{ij} - x_{ij}^*$.

Наблюдения $z_{ij} = x_{ij} + \theta_{ij}$ отличаются от x_{ij} некоррелированным с x_{ii} аддитивным шумом θ_{ii} , поэтому оптимальный прогноз

 $rx_{i-1,j}$ минимизирует не только дисперсию остатков s_{ij} , но и дисперсию остатков (5.16) прогноза наблюдений z_{ij} . Эти остатки наблюдаемы, что позволяет применить адаптивные псевдоградиентные методы подстройки коэффициента прогноза r.

Построение адаптивного варианта процедуры (5.15) основано на том, что если вектор параметров $\overline{\alpha} = (a,b)^T$ оптимален в смысле минимума средних квадратов ошибок оценок x_{ij} , то он же оптимален и в смысле минимума средних квадратов ошибок прогнозов

$$\Delta_{ij} = z_{ij} - a\tilde{x}_{i,j-1},\tag{5.17}$$

и наоборот. Поэтому подстройка $\bar{\alpha}$ может быть осуществлена по наблюдаемым Δ_{ij} . Остатки в (5.17) зависят от параметра b через $\hat{x}_{i,j-1}$:

$$\Delta_{ij+1} = z_{i,j+1} - a^2 \tilde{x}_{i,j-1} - ab\Delta_{ij}. \tag{5.18}$$

Для минимизации остатков (5.18) применяется алгоритм ПГ адаптации. Рассчитанные на очередном шаге коэффициенты $a_{i,j+1}$ и $b_{i,j+1}$ используются для вычисления очередного прогноза $\tilde{x}_{i,j+1}$ и уточнения значения $\Delta_{i,j+1}$. Например, можно использовать знаковые варианты ПГ процедур для подстройки коэффициентов $a_{i,j+1}$ и $b_{i,j+1}$:

$$\begin{split} a_{i,j+1} &= a_{ij} + \lambda_j \mathrm{sign}((2x'_{ij} + b_{ij}\Delta_{ij}))\Delta_{i,j+1}), \\ b_{i,j+1} &= b_{ij} + \lambda_j \mathrm{sign}(a_{ij}\Delta_{ij}\Delta_{i,j+1}). \end{split}$$

Отметим, что в случае неоднородных изображений может быть скачок характеристик изображения при переходе к обработке очередной строки, так как конец предыдущей строки находится на большом расстоянии от начала очередной. Это обстоятельство требует резкого изменения параметров фильтра, что в алгоритме не предусмотрено.

Сгладить это явление позволяет треугольная развертка изображения — смена направления обработки на противоположное при переходе к очередной строке. При такой развертке очередная

обрабатываемая точка всегда находится рядом с предыдущей, поэтому резких скачков характеристик изображения (при сделанном предположении о их плавном изменении) не происходит.

Для более точного подбора параметров алгоритма фильтрации целесообразно использовать повторные прохождения пикселей, когда описанная ПГ процедура делает m шагов вперед, n шагов назад, m шагов вперед и так до конца строки (рис. 5.6). При такой развертке процедура продолжительное время находится в области портрета приблизительно с одинаковыми свойствами, поэтому параметры процедуры успевают лучше подстроится к изменяющимся особенностям изображения.

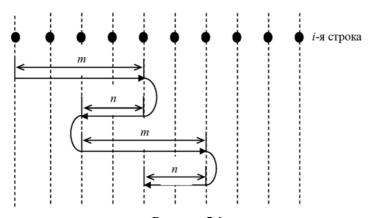


Рисунок 5.6 Развертка с повторами

На рис. 5.7 приведен пример применения этого алгоритма. На рис. 5.7,a находится неискаженное изображение девочки. Оно искажено аддитивным белым шумом, часть которого показана на рис. 5.7,a. Часть отфильтрованного изображения показана на рис. 5.7,a. Заметно значительное улучшение изображения после фильтрации.

Отфильтрованное изображение несколько хуже оригинала – оно как бы расфокусированное. В этом проявление неизбежных ошибок фильтрации, и многочисленные усилия исследователей направлены на улучшение качества фильтрации.



Рисунок 5.7 Адаптивная псевдоградиентная фильтрация изображения: a – исходное изображение; ϵ – зашумленное изображение; ϵ – результат фильтрации

5.5. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ К ФИЛЬТРАЦИИ РЕЧЕВЫХ И ДРУГИХ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Свойство квазипериодичности различных сигналов (в частности, речевых) может быть использовано для улучшения их фильтрации посредством их предварительного преобразования в изображения с дальнейшим применением методов фильтрации изображений [46]. Рассмотрим этот подход.

На рис. 5.8 изображен график оцифрованного звука a. На этом графике ярко выражена квазипериодичность сигнала. Разо-

бьем этот сигнал на отрезки, которые соответствуют отдельным квазипериодам. Каждый отрезок представим в виде строки изображения (рис. 5.9), в котором большим значениям сигнала соответствуют большие яркости изображения.

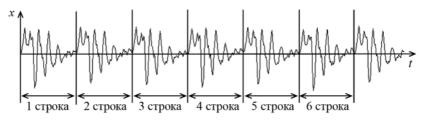


Рисунок 5.8 Разбиение звука a на квазипериоды

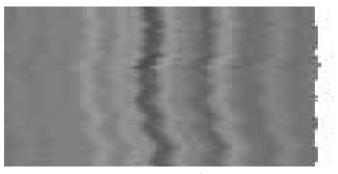


Рисунок 5.9 Портрет звука *а*

В результате получается изображение, которое назовем портретом данного сигнала.

При таком представлении сигнала элементы столбцов изображения соответствуют элементам сигнала, отстоящим на квазипериод. Поэтому в изображении, кроме внутристрочной корреляции между соседними отсчётами сигнала, будет и межстрочная, которая визуально проявляется в наличии приблизительно вертикальных полос.

Существенная межстрочная корреляция портретов дает возможность применять методы фильтрации изображений к фильтрации сигналов. При этом вертикальная корреляция даже сильнее горизонтальной, поэтому её учет должен существенно повысить качество фильтрации по сравнению с обычной последовательной

фильтрацией. Отсюда возникает задача представления сигналов в виде изображений. Для этого требуется определение длин последовательных квазипериодов.

Строки одинаковой длины на портрете получаются в случае равенства длин квазипериодов. Реальные сигналы могут иметь квазипериоды разной длины. В этом случае разбиение сигнала на квазипериоды дает строки различной длины (рис. 5.9, 5.10).





Рисунок 5.10 Выравнивание портрета слова *крыло*

Для фильтрации изображений удобнее применять изображения прямоугольной формы. Отсюда возникает задача выравнивания, т.е. приведения изображения к прямоугольному виду. В выровненном изображении должны сохраниться межстрочные корреляционные связи, т.е. на портрете по возможности должна быть сохранена структура вертикальных полос. На рис. 5.9 дан пример выравнивания портрета. В [46] предложено несколько способов такого выравнивания.

Полученное таким образом прямоугольное изображение подвергается фильтрации. После фильтрации изображение разворачивается в последовательность, которая и является отфильтрованным сигналом.

Проведённые исследования показывают, что корреляционные функции портретов квазипериодических сигналов близки к факторизуемым, т.е. портреты по своим свойствам подобны СП, описываемым моделью Хабиби. Однако параметры этой модели заранее неизвестны и непостоянны. Поэтому при фильтрации приходится применять адаптивные алгоритмы. В частности, хорошие результаты показывает адаптивный аппроксимированный ПГ фильтр, описанный в §5.4.

5.6. ПСЕВДОГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ СОВМЕЩЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Оценка ММП параметров МКГТ исключительно сложна и может быть практически реализована только в самых простых ситуациях. Кроме того, оценка ММП очень неустойчива к отклонениям реальных СП от применяемых моделей. Если, например, при оценке смещения между авторегрессионными изображениями использовать значения коэффициентов корреляции, незначительно отклоняющиеся от точных, то оценка ММП резко ухудшится. Положение можно исправить, если применить одновременную оценку ММП смещения и параметров изображений, но это значительно усложняет вычисления. Оценка ММП еще более ухудшается при отклонении вида корреляционной функции от используемой в модели СП.

Даже слабое зашумление совмещаемых изображений существенно ухудшает оценку, если в ней не введена коррекция на наличие шума. Таким образом, сложность и неустойчивость оценки ММП делают ее малопригодной для практического применения в задачах совмещения СП.

Значительно большую устойчивость имеют компенсационные оценки, минимизирующие остатки некоторой компенсации. Из других методов отметим корреляционно-экстремальный и применение Фурье-преобразования. Первый из этих методов требует очень большого объема вычислений, связанных с перебором всех возможных значений параметров МКГТ. Методы, основанные на Фурье-преобразовании, могут быть реализованы за приемлемое время с помощью применения быстрых Фурье-преобразований, но часто имеют относительно невысокую точность из-за граничных эффектов.

В особо сложных случаях совмещения плоских изображений, существенно отличающихся друг от друга (например, спектрозональных изображений), применяются методы, основанные на совмещении реперных точек с последующей интерполяцией смещений между ними.

5.6.1. Совмещение изображений при заданной модели трансформации

Если известен вид МКГТ, то задача совмещения кадров z^1 и z^2 существенно упрощается и при компенсационном подходе может быть сформулирована как задача минимизации функционала

$$J(\overline{\alpha}) = M\left[\sum_{j} \left(z_{j}^{2} - \hat{z}_{j}^{2}(\overline{\alpha})\right)^{2}\right], \tag{5.19}$$

где:

 $\bar{\alpha}$ – параметры модели трансформации;

 $\hat{z}_{\bar{j}}^2(\overline{\alpha})$ — прогноз в точку $z_{\bar{j}}^2$ по наблюдениям кадра z^1 .

Вместо суммы квадратов в (5.19) может быть использована другая мера рассогласования, например сумма модулей.

В качестве прогноза $\hat{z}_j^2(\overline{\alpha})$ в задачах совмещения обычно используют различные интерполяции сеточного кадра z^1 . Набор параметров $\overline{\alpha}^*$, на котором достигается минимум (5.19), является оценкой параметров МКГТ. Искомое смещение кадров z^1 и z^2 получается подстановкой $\overline{\alpha}^*$ в заданное моделью МКГТ преобразование $f(\overline{j},\overline{\alpha})$ системы координат сетки Ω_1 , на которой определен кадр z^1 , в систему координат сетки Ω_2 кадра z^2 .

Отметим еще раз, что в рассматриваемой постановке задача совмещения изображений фактически заменена оптимизацией параметров компенсации кадра z^2 по кадру z^1 . При этом параметры компенсации выбраны как параметры МКГТ. Оптимальные параметры $\overline{\alpha}^*$ зависят от вида прогноза, т. е. от вида интерполяции кадра z^1 , поэтому точка минимума $\overline{\alpha}^*$ функционала (5.19) является только псевдосмещением, т.е. в самом критерии (5.19) может быть заложена смещенность оценки параметров МКГТ.

После введения функционала качества (5.19) задача совмещения сводится к его минимизации для конкретных реализаций кадров z^1 и z^2 . Если для этих целей применять ПГ методы, то их можно рассматривать как псевдоградиентные методы совмещения. Рассматривая при этом различные модели МКГТ, можно получать

соответствующие алгоритмы оценки сдвигов, поворотов и более сложных МКГТ, описываемых совокупностью параметров $\overline{\alpha}$.

Выполнение ПГ оценки параметров МКГТ осуществляется в порядке некоторой развертки кадра z^2 , в процессе которой формируется последовательность оценок α_1,α_2,\ldots параметров МКГТ. Последняя из них принимается за окончательную. Если размеры кадров малы, то для достижения большей точности возможно использование нескольких последовательных проходов этих кадров.

Описанная методика была испытана на широком классе имитированных и реальных МИ. Полученные результаты сравнимы с потенциально достижимыми в смысле критерия качества (5.19).

На рис. 5.11 приведены результаты совмещения изображений, имитированных с помощью волновой модели (см. §1.5).

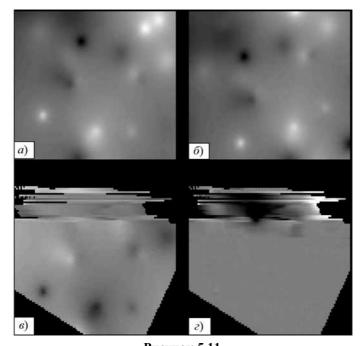


Рисунок 5.11 Совмещение волновых изображений: a, δ – совмещаемые изображения; ϵ – результат совмещения; ϵ – ошибки компенсации

Изображения на рис. 5.11,a, δ сдвинуты одно относительно другого на 1,2 пкс по вертикали, 3,4 пкс по горизонтали и повернуты на 0,5 рад. Для совмещения был применен знаковый ПГ алгоритм с билинейной интерполяцией значений кадра при дробных значениях координат его элементов. На рис. 5.11, ϵ показан результат совмещения. Естественно, что совмещенными оказались только общие части изображений. На рис. 5.11, ϵ показаны остатки компенсации в растянутом диапазоне. В верхней части последних двух изображений заметны плохие результаты обработки, так как в начале работы алгоритма были взяты нулевые значения параметров МКГТ. По мере продвижения вниз шел процесс адаптации, параметры МКГТ оценивались все точнее. На волновых изображениях размером 64×64 сдвиг оценивался с точностью до 0,001 пкс, а поворот — до 0,0001 рад.

5.6.2. Совмещение изображений при незаданной модели трансформации

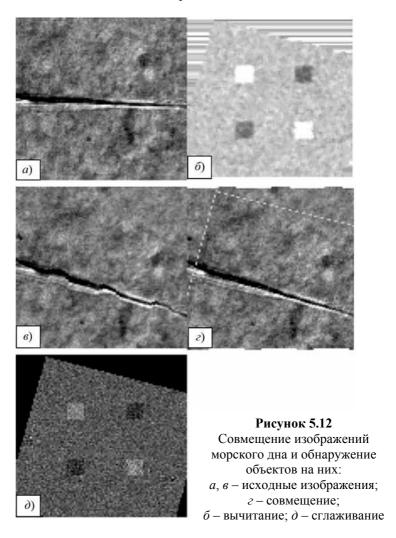
Как уже отмечалось, более сложными являются задачи совмещения для неизвестных видов МКГТ. В таких случаях можно задаваться некоторым типом преобразования $f(\bar{j},\bar{\alpha})$, считая параметры $\bar{\alpha}$ переменными.

Тогда задача совмещения может быть снова сформулирована как задача минимизации функционала (5.19), но с переменными параметрами $\bar{\alpha}$. Такие задачи минимизации уже рассматривались раньше, для их решения нужно брать в ПГ процедуре значения параметра μ_n , ограниченные снизу.

На рис. 5.12 приведены результаты применения описанной процедуры для совмещения изображений морского дна при поиске появляющихся предметов. На рис. 5.12,a показано эталонное изображение участка морского дна. На рис. 5.12,e — изображение того же участка со сдвигом, поворотом и другими МКГТ, в результате которых заметно искривление изображения. На изображение рис. 5.12,e аддитивно добавлены два светлых и два темных квадрата, имитирующие появление новых предметов за время между регистрациями этих двух изображений.

Визуально эти четыре квадрата не просматриваются. Вид МКГТ в алгоритм совмещения не был заложен, использовалась

модель (5.20) при билинейной интерполяции и треугольной развертке. Для наглядной оценки результата совмещения на рис. 5.12, г показана вставка искаженного изображения в эталонное. На рис. 5.12, б показано межкадровое вычитание совмещенных изображений. Малость разностей говорит о достаточно точном совмещении. При этом отчетливо оказались видны четыре квадрата (новые предметы). Они видны еще лучше после сглаживания остатков компенсации на рис. 5.12, д.



Желательно выбрать $f(\overline{j},\overline{\alpha})$ так, чтобы f хотя бы приблизительно описывало реальную МКГТ. Если о виде МКГТ нет никакой информации, то можно взять простейшую модель — считать, что имеется только переменный по кадру сдвиг, т.е.

$$f(\overline{\alpha}, \overline{j}) = \overline{j} - \overline{\alpha}(\overline{j}). \tag{5.20}$$

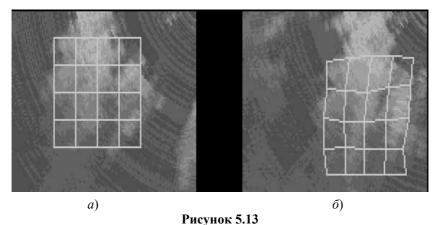
Таким способом можно описать любую МКГТ. Если функция $\overline{\alpha}(\overline{j})$ изменяется достаточно медленно при выбранном порядке просмотра изображения, то возможно достаточно точное совмещение.

5.6.3. Корреляционно-экстремальные псевдоградиентные алгоритмы совмещения

Предположим, что искажения яркостей двух изображений могут быть аппроксимированы линейной функцией. В этом случае должен быть высок коэффициент корреляции между этими изображениями. Поэтому в качестве критерия качества совмещения может быть взят максимум локального выборочного коэффициента корреляции. Этот функционал может быть использован и в ПГ алгоритмах.

На рис. 5.13 показан пример совмещения радиолокационных изображений облачности. Рис. 5.13, б получен с помощью радиолокатора через несколько минут после рис. 5.13, а. За это время картина облачности существенно изменилась — облака не только переместились, но и деформировались и изменили плотность. В результате их изображения имеют МКГТ общего вида и существенные яркостные искажения. Для иллюстрации результата совмещения на первое изображение условно нанесена прямоугольная сетка. На втором изображении показано ее оцененное положение (фактически — оцененное положение элементов первого изображения на втором изображении). Если сравнить фрагменты изображений в соответствующих клетках этих сеток, то можно сделать вывод, что совмещение достаточно точное.

По найденным смещениям элементов изображений можно оценить локальные скорости перемещения воздушных масс и построить поле скоростей ветра, что используется, например, для обеспечения безопасности полетов в окрестности аэропортов.



Совмещение радиолокационных изображений облаков: a, δ — совмещаемые изображения с условной сеткой на них

5.6.4. Псевдоградиентные морфологические алгоритмы совмещения

Если яркость совмещаемых изображений отличается друг от друга неизвестным функциональным искажением, то для их совмещения можно применить их морфологическое (использующее понятие формы) предварительное преобразование, которое делает их пригодным для применения, например, корреляционно-экстремальных ПГ алгоритмов совмещения (см. §4.5).

Пример такого преобразования показан на рис. 4.3. Одно изображение относительно другого смещено на -5,4 пкс по вертикали, на 4,3 пкс по горизонтали и повернуто на 0,5 рад. При оценке этих параметров ПГ алгоритмом были получены значения: -4,91; 5,51 и 0,48, что следует признать хорошим результатом, учитывая вид исходных изображений.

5.6.5. Гравитационный алгоритм совмещения бинарных изображений

Самые различные объекты могут быть представлены в виде бинарных изображений или групповых точечных объектов (ГТО), т.е. системы точек в двух- или трехмерном пространстве. Например, участки звездного неба, строй кораблей или самоле-

тов, дискретный набор характерных точек на плоском изображении детали или на поверхности трёхмерного тела и т.д. При оперировании с такими объектами в информационных системах часто возникает задача распознавания, для чего два ГТО предварительно нужно совместить, т.е. найти соответствие точек одного точкам второго.

В навигации и робототехнике представляет интерес определение параметров совмещения ГТО – их взаимных сдвигов, поворотов и т.д. Для описания и обработки ГТО оказалось продуктивным их представление в виде кватернионных сигналов (в частности, в виде проволочной модели, т.е. последовательности гиперкомплексных чисел или векторов [42]), однако при этом нужно элементы ГТО упорядочить, для чего применяется особая процедура, иногда имеющая неоднозначный результат.

Другой подход к совмещению ГТО основан на их преобразовании в полутоновые изображения, например путём сглаживания для поиска объектов заданного вида на изображении использовано вспомогательное преобразование полутоновых изображений в ГТО, которые сравниваются по совокупности центральных моментов. Для совмещения ГТО также можно использовать подобный приём.

Рассмотрим подход к совмещению ГТО, не требующий упорядочивания их элементов или преобразования в полутоновые [45]. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_N\}$ — два ГТО, т.е. две системы, состоящие из одинакового количества точек с заданными координатами в двух- или трехмерном пространстве (пространство может иметь и большую размерность). Требуется совместить A и B, т.е. сдвинуть и повернуть B так, чтобы он совпал с A. Отметим, что при этом не требуется одинаковость нумерации точек в A и B.

Для решения поставленной задачи совмещения будем считать элементы заданных ГТО материальными точками единичной массы, тогда каждый ГТО становится системой материальных точек. Каждую такую систему мы будем считать жестко связанной, т.е. расстояния между точками системы не изменяются, но система в целом может перемещаться и поворачиваться. Предположим сначала, что координатный шум отсутствует, т.е. координаты точек измерены точно, поэтому A и B отличаются друг от друга только переносом и поворотом и могут быть точно совме-

щены. При правильном совмещении A и B их центры масс, очевидно, совпадут, поэтому сразу же перенесем центр масс системы B в центр масс O системы A. Тогда для совмещения останется только повернуть B вокруг O, считая систему A неподвижной. Без ограничения общности можно считать, что O — начало координат, тогда пусть точки ГТО A и B имеют координаты $a_i(x_i^a,y_i^a,z_i^a)$ и $b_j(x_j^b,y_j^b,z_j^b)$, которые можно рассматривать как координаты соответствующих векторов \overline{a}_i и \overline{b}_j (в двумерном случае третья координата отсутствует).

Два ГТО представлены материальными точками единичной массы, пусть между этими массами действует гравитационное притяжение. Тогда на систему B будет действовать вращающий момент, под действием которого она будет поворачиваться относительно неподвижной системы A так, чтобы в целом потенциальная энергия гравитационного взаимодействия минимизировалась. Минимум этой энергии (ноль) достигается при точном совмещении A и B. Поэтому для совмещения ГТО достаточно смоделировать этот несложный физический процесс.

Взаимное притяжение точек a_i и b_j создает вращающий момент, действующий на B:

$$\overline{M}_{ij} = [\overline{b}_j, \overline{F}_{ij}],$$

где:

$$\overline{F}_{ij} = F_{ij} (\overline{a}_i - \overline{b}_j);$$

 F_{ii} — сила притяжения, которую можно считать равной

$$F_{ij} = 1/|\overline{a}_i - \overline{b}_j|^2 = 1/[(x_i^a - x_j^b)^2 + (y_i^a - y_j^b)^2 + (z_i^a - z_j^b)^2]. \quad (5.21)$$

Общий момент вращения, действующий на B, равен сумме всех этих парных моментов:

$$\overline{M} = \sum_{i,j} \overline{M}_{ij}. \tag{5.22}$$

Смоделируем процесс вращения объекта B вокруг центра масс под действием этого момента. На каждом шаге по времени B поворачивается на небольшой угол λ , в новом положении снова вычисляется вращающий момент и т.д. Процесс останавливается,

когда вращающий момент становится малым, а движение становится колебательным. Для повышения точности совмещения угол λ постепенно уменьшается. Данный процесс по сути является псевдоградиентным алгоритмом минимизации потенциальной энергии гравитационного взаимодействия.

Помимо правильного совмещения, могут существовать другие равновесные положения, когда вращающий момент равен нулю, например, два стержня при перпендикулярном их положении. Неправильность такого совмещения заметна по большому остатку потенциальной энергии, т.е. по большим расстояниям между точками А и В. Такие положения возникают при неблагоприятном начальном взаимном повороте ГТО. Поэтому приходится пробовать различные начальные взаимные повороты, например, помещая какую-нибудь точку вращающегося ГТО в различные квадранты (октанты).

Проведенные эксперименты показали работоспособность описанного алгоритма совмещения даже на больших ГТО порядка нескольких сотен точек.

В практических ситуациях обычно имеется координатный шум. На рис. 5.14 приведён график зависимости среднеквадратической ошибки (СКО) оценки угла поворота σ_{ε} (в радианах) от координатного шума. Оценка угла оказалась несмещённой. Эти данные получены обработкой оценок угла поворота описанным алгоритмом. Каждый из одного миллиона плоских ГТО имитировался случайно в виде 40 независимых точек, равномерно распределённых в круге радиусом R. Второй ГТО получался из первого добавлением нормально распределённого координатного шума с нулевым средним и СКО σ_n по каждой из двух координат. Очевидно, что в этом случае СКО ошибки зависит от отношения $q = \sigma_n / R$. Эта зависимость оказалась близкой к линейной. Результаты моделирования показывают, что данный алгоритм достаточно устойчив к довольно сильным координатным шумам.

При увеличении количества точек N в ГТО точность оценки повышается, как это следует из графика на рис. 5.15, где показатель интенсивности координатного шума ГТО имел значение q=0,1.

При обработке изображений (в том числе и ГТО) обычно имеется различие масштабов изображений. В этом случае даже при правильном повороте точки двух ГТО будут на значительных расстояниях, поэтому остаточная потенциальная энергия будет

большой, что препятствует решению задачи распознавания. Тогда целесообразно произвести выравнивание масштабов: один из ГТО масштабируется так, чтобы выровнялись их вторые моменты относительно центра масс. Но даже и без такого выравнивания описанный алгоритм успешно оценивал угол их взаимного поворота при расхождении масштабов в два раза.

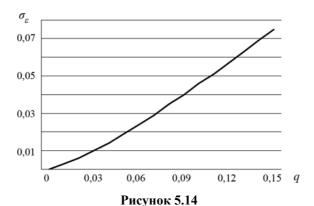


График зависимости СКО ошибки оценки угла от координатного шума

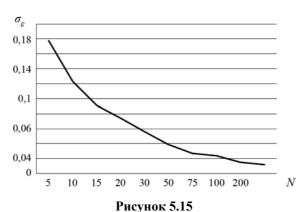


График зависимости СКО ошибки оценки угла от числа точек в ГТО

Из-за ошибок регистрации ГТО иногда они имеют разное количество точек. Это не является препятствием для применения описанного алгоритма, так как гравитационное взаимодействие

двух систем материальных точек проявляется «в целом», разворачивая их до минимума потенциальной энергии. На рис. 5.16 приведена зависимость СКО ошибки оценки угла, когда в одном ГТО 40 точек, а во втором их на dN больше. В этом эксперименте был показатель интенсивности координатного шума q=0,1.

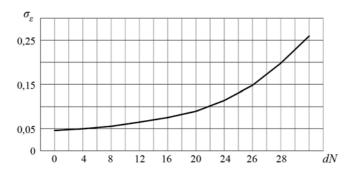


Рисунок 5.16 График зависимости СКО ошибки оценки угла от разности числа точек в ГТО

Объем вычислений возрастает пропорционально квадрату количества точек в ГТО, так как при вычислении полного вращающего момента (5.22) находится сила взаимодействия и вращающий момент каждой точки одного ГТО с каждой точкой другого. Этот объем вычислений можно довести почти до линейной пропорциональности, если учитывать только взаимодействие точек, находящихся на относительно небольших расстояниях, что вполне естественно, учитывая постановку задачи совмещения.

Под действием гравитации два ГТО стремятся занять положение, при котором вращающий момент равен нулю, т.е. когда совмещаются их главные оси инерции. Однако при этом не обязательно эти оси находятся в соответствии (например, наибольшая полуось эллипсоида инерции может совместиться с другой полуосью). Поэтому, если остаточная потенциальная энергия относительно велика, то следует перебрать небольшое количество комбинаций переименования осей, т.е. поворотов объекта B и выбрать тот, при котором эта энергия минимальна, т.е. объекты наилучшим образом совмещены.

Иногда ГТО могут состоять из элементов разных типов, например звезд разной яркости или разных классов кораблей.

В этом случае для улучшения совмещения будем считать, что притягиваются между собой только точки, соответствующие элементам одинакового типа.

Алгоритм легко модернизируется для ГТО в пространстве любой размерности, например, когда ГТО развивается во времени или, кроме координат, учитываются и другие признаки.

При решении задачи распознавания ГТО следует описанным способом совместить распознаваемый ГТО со всеми имеющимися эталонными ГТО, относя его к тому из эталонных, с которым получено наилучшее совмещение по критерию минимума остаточной потенциальной энергии.

Примененные здесь модели являются «псевдофизическими», т.е. при моделировании движения ГТО не требуется точного воспроизведения динамики физического процесса движения одного ГТО относительно другого. Достаточно, чтобы воспроизводилась только общая тенденция поворота одного из ГТО в сторону уменьшения потенциальной энергии гравитационного взаимодействия. Поэтому силы притяжения могут задаваться довольно произвольно, например, в (5.21) можно взять силы, обратно пропорциональные расстоянию. Не обязательно также учитывать инерционность поворачивающегося ГТО, можно моделировать его скачкообразные повороты на небольшой угол.

5.7. АДАПТИВНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЕКОРРЕЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В $\S 3.1$ был описан метод обнаружения сигналов на изображениях, основанный на их предварительной декорреляции или выбеливании. Рассмотрим адаптивный ПГ алгоритм выполнения этой операции.

Рассмотрим гауссовское случайное поле

$$\{x_{\overline{j}},\overline{j}=(j_1,...,j_n)\in\Omega\}\;,$$

заданное на n-мерной прямоугольной сетке $\Omega = \{\overline{j}, j_k = 1...M_k, k = 1...n\}$.

Пусть среднее значение поля $M[x_{\overline{j}}] = 0, \overline{j} \in \Omega$ }, а его КФ

$$R_X(\overline{r_1},\overline{r_2}) = M[x_{\overline{j}+\overline{r_1}}x_{\overline{j}+\overline{r_2}}]$$

априори неизвестна и может изменяться в процессе наблюдения. Необходимо построить адаптивное линейное рекуррентное преобразование

$$\xi_{\overline{i}} = L\{x_{\overline{i}}\},\,$$

обеспечивающее выполнение условия

$$R_{\xi}(\overline{r_1},\overline{r_2}) = M[x_{\overline{j}+\overline{r_1}}x_{\overline{j}+\overline{r_2}}] \to 0, \ \overline{r_1} \neq \overline{r_2}.$$

Предположим, что на сетке Ω определено правило линейного упорядочивания точек $\overline{j}\in\Omega$, на основе которого можно определить, что элемент \overline{j} предшествует элементу \overline{i} [23]. Такое правило позволяет установить вид развертки, т.е. вид преобразования массива данных $\{x_{\overline{j}}\}$ в последовательность чисел $x_{\overline{j}}$ при рекуррентной обработке многомерного изображения.

Для рекуррентной декорреляции СП $\{x_{\overline{j}}\}$ воспользуемся линейным оператором

$$\xi_{\overline{j}} = x_{\overline{j}} - \sum_{\substack{\overline{i} \in D_{\overline{j}}, \\ \overline{i} \neq \overline{j}}} c_{\overline{j}\overline{i}} x_{\overline{i}},$$

гле:

$$c_{\overline{i}\overline{i}} = c_{\overline{i}\overline{i}}(x_{\overline{i}})$$
 – весовые коэффициенты;

 $D_{\overline{j}}$ — область весового суммирования, перемещающаяся по сетке Ω в соответствии с принятой разверткой изображения.

Для однородного СП $\{x_{\overline{j}}\}$ можно подобрать постоянные коэффициенты $c_{\overline{j}i}=c_{\overline{i}}$, обеспечивающие при достаточно большом размере области D приемлемое качество декорреляции. При изменении вероятностных свойств СП $\{x_{\overline{j}}\}$ необходимо подстраивать значения $c_{\overline{j}\overline{i}}=c_{\overline{j}\overline{i}}(x_{\overline{i}},\overline{i}\in D_{\overline{j}})$ в соответствии с характеристиками СП. Для этого воспользуемся следующей рекуррентной псевдоградиентной процедурой [13, 61]:

$$c_{\overline{l}\overline{i}} = c_{\overline{j}\overline{i}} - \lambda_{\overline{j}} \varphi(\nabla Q(c_{\overline{j}\overline{i}})),$$

где:

 $abla Q(c_{\overline{ji}})$ — реализация градиента функционала качества алгоритма декорреляции, т.е. $abla Q(c_{\overline{ji}}) =
abla J(c_{\overline{ji}}) + \xi_{\overline{j}}$;

 $J(c_{\overline{i}\overline{i}})$ – функционал качества;

 $\xi_{\overline{j}}$ – ошибка наблюдения в точке \overline{j} ;

 $\varphi(*)$ – векторная функция от реализации градиента функционала качества;

 $\lambda_{\overline{i}}$ – скалярные коэффициенты;

 \overline{l} – следующее после \overline{j} значение индекса при развертке.

Для сходимости этой процедуры необходимо выполнение условия псевдоградиентности (5.4), т.е., что вектор $\varphi(\nabla Q(c_{\overline{ji}}))$ в среднем должен составлять острый угол с направлением вектора $\nabla J(c_{\overline{ii}})$.

При этом для реализации ПГ алгоритма функционал Q(*) (или его градиент) должен быть наблюдаемым. В рассматриваемой задаче декорреляции таким функционалом может быть, например, квадратичная форма

$$Q(c_{\overline{j}i}) = \sum_{\overline{k} \in G} \{ \xi_{\overline{j}} \cdot \xi_{\overline{j} + \overline{k}} \},\,$$

где G-n-мерная область декорреляции.

Реализация градиента этого функционала имеет вид

$$\nabla Q(c_{\overline{j}\overline{i}}) = \frac{\partial}{\partial c_{\overline{j}\overline{i}}} \left\{ \sum_{\overline{k} \in G} \left\{ \xi_{\overline{j}} \cdot \xi_{\overline{j} + \overline{k}} \right\}^2 \right\} = \nabla J(c_{\overline{j}\overline{i}}) + \xi_{\overline{j}}.$$

Анализ показывает, что в качестве функции градиента $\nabla Q(c_{ji})$ целесообразно выбрать знаковую функцию $\phi\{*\}=\text{sign}\{*\}$.

Отметим, что задача декорреляции относится к классу некорректно поставленных задач, и для ее решения необходимо использовать методы регуляризации. Для этого входные наблюдения представляются в виде суммы $x_{\overline{j}}=y_{\overline{j}}+\omega_{\overline{j}}$, где $\omega_{\overline{j}}$ – дополнительный гауссовский шум с дисперсией $\sigma_{\overline{j}}^2$.

5.8. АДАПТИВНАЯ ОЦЕНКА КВАНТИЛЕЙ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОРОГА ОБНАРУЖЕНИЯ

Решающее правило обнаружения сигналов имеет вид

$$\Lambda(Z) \leq > \lambda$$
,

где:

 $\Lambda(Z)$ – статистика правила;

 λ – порог обнаружения.

При использовании критерия Неймана—Пирсона порог определяется по заданной вероятности ложной тревоги (принятия решения о наличии сигнала, когда его нет) $p = P_F$ из соотношения

$$P(\Lambda \ge \lambda \mid H_0) = p$$

или

$$F(\lambda) = P(\Lambda < \lambda \mid H_0) = 1 - p = q, \qquad (5.23)$$

где $F(\lambda)$ – условная ΦP статистики Λ при отсутствии сигнала.

Во многих практических задачах обнаружения изображения бывают очень неоднородны, поэтому и порог решающего правила, обеспечивающий заданную вероятность ложной тревоги, может оказаться непостоянным для разных участков изображений. Отсюда возникает рассматриваемая в этом разделе задача адаптивного определения текущего значения порога, обеспечивающего заданную вероятность ложной тревоги.

Квантилью порядка q или q-квантилью СВ X с ФР $F_X(x) = P(X < x)$ является число x_q , удовлетворяющее условию $F_X(x_q) = q$. Таким образом, порог λ есть q-квантиль СВ Λ при отсутствии обнаруживаемого сигнала. Необходимость определения квантилей возникает не только в обнаружении сигналов, но и в других задачах, например, при выборе канала связи с минимальным уровнем помех. Поэтому будем рассматривать эту более общую задачу оценки квантилей [24].

Если условная $\Phi P F(x) = P(\Lambda < x \mid H_0)$ известна, то q-квантиль можно определить из уравнения (5.23). Однако при априорной неопределенности ΦP известна неточно или вообще неизвестна. Кроме того, на неоднородных данных она может изменяться. Отсюда возникает задача оценки q-квантили (в обнаружении — стабилизации порога, точнее — стабилизации вероятности ложной тревоги на заданном уровне).

Пусть имеется последовательность СВ Λ_1 , Λ_2 , ... Требуется последовательно определять оценку q-квантили λ_{qn} очередной СВ Λ_n .

Можно, например, построить следующую оценку. Если имеются n выборочных значений $\Lambda_1,...,\Lambda_n$ статистики Λ , то величина $\hat{\lambda}_n$, отсекающая qn наименьших из наблюдаемых $\Lambda_1,...,\Lambda_n$, является оценкой q-квантили по относительной частоте события $\Lambda < \hat{\lambda}_n$. Но для такой сортировки нужно хранить все предшествующие наблюдения. Если мешающие изображения неоднородны, то все обнаружения могут оказаться в области с большой дисперсией помех.

Рассмотрим другой подход к оценке квантилей, основанный на адаптивном $\Pi\Gamma$ алгоритме.

5.8.1. Одноконтурный алгоритм

Пусть сначала все Λ_i независимы и одинаково распределены с ΦP $F_\Lambda(x) = F(x)$ и ПРВ $w_\Lambda(x) = w(x)$. В этом случае квантиль постоянна (т.е. $\lambda_{qn} = \lambda_q$), удовлетворяет уравнению $F(\lambda) - q = 0$ и минимизирует функционал $J(x) = [F(x) - q]^2$. Сам функционал J(x) и его градиент (производная по x) $\nabla J(x) = 2[F(x) - q]w(x)$ ненаблюдаемы, так как ΦP F(x) и ПРВ w(x) неизвестны.

Для синтеза ПГ алгоритма нужно найти наблюдаемый ПГ функционала J(x). Для этого сначала заменим $\nabla J(x)$ на $\nabla J^*(x) = F(x) - q$. Это можно сделать, так как ПРВ w(x) неотрицательна. Представим $\nabla J^*(x)$ в виде математического ожидания:

$$\nabla J^*(x) = P(\Lambda < x) - q = P(0 < x - \Lambda) - q =$$

$$= M[\chi(x - \Lambda)] - q = M[\chi(x - \Lambda) - q],$$
(5.24)

где:

 $\chi(x)$ — функция Хевисайда ($\chi(x)=1$ при $x\geq 0$ и $\chi(x)=0$ в противном случае).

Очевидно, что реализации $\beta_n = \chi(\hat{\lambda}_n - \Lambda_n) - q$ градиента $\nabla J^*(x)$ наблюдаемы. Из (5.24) следует $M[\beta_n] = \nabla J^*(\hat{\lambda}_n)$, т.е. $\beta_n - \Pi \Gamma$ функционала $J^*(x)$ (и J(x)). Отсюда получаем $\Pi \Gamma$ алгоритм

$$\hat{\lambda}_{n+1} = \hat{\lambda}_n + \mu_n \begin{cases} q, & ecnu \ \Lambda_n \ge \hat{\lambda}_n, \\ -p, & ecnu \ \Lambda_n < \hat{\lambda}_n, \end{cases}$$
 (5.25)

где μ_n – положительная числовая последовательность.

В (5.25) следующая оценка $\hat{\lambda}_{n+1}$ увеличивается на $\mu_n q$, если Λ_n достигает порог $\hat{\lambda}_n$, в противном случае оценка уменьшается на $\mu_n p$.

Проанализируем действие алгоритма (5.25). Для этого найдем математическое ожидание приращения его оценок:

$$\begin{split} &M[h_n] = M[\hat{\lambda}_{n+1} - \hat{\lambda}_n] = \mu_n[qP(\Lambda_n \geq \hat{\lambda}_n) - pP(\Lambda_n < \hat{\lambda}_n)] = \\ &= \mu_n[q(1 - F_{\Lambda}(\hat{\lambda}_n)) - pF_{\Lambda}(\hat{\lambda}_n)] = \mu_n(q - F_{\Lambda}(\hat{\lambda}_n)). \end{split}$$

Если $\hat{\lambda}_n < \lambda_q$, то $F(\hat{\lambda}_n) < F(\lambda_q) = q$ и $M[h_n] > 0$, поэтому оценка будет в среднем повышаться. Если $\lambda_q < \hat{\lambda}_n$, то $q = F(\lambda_q) < F(\hat{\lambda}_n)$ и $M[h_n] < 0$, поэтому оценка будет в среднем понижаться. Если $\hat{\lambda}_n = \lambda_q$, то $M[h_n] = 0$. Следовательно, у оценок $\hat{\lambda}_n$ имеется тенденция двигаться к точной квантили λ_q . Если при этом $\mu_n \to 0$ (а также $\sum \mu_n = \infty$ и $\sum \mu_n^2 < \infty$), то $\hat{\lambda}_n \to \lambda_q$ с вероятностью 1.

Этот алгоритм очень прост в реализации, не требует задания $\Phi P \ F_{\Lambda}(x)$ и запоминания или сортировки наблюдаемых значений Λ_i .

В случае неоднородных данных ФР $F_{\Lambda_n}(x)$ величин Λ_n могут быть различны. Если при этом текущая квантиль λ_{qn} изменяется достаточно медленно, то алгоритм (5.25) может достаточно точно оценивать изменяющуюся квантиль, для этого нужно взять μ_n ограниченными снизу (например, μ_n = const). Таким образом, этот алгоритм применим и для оценки переменных квантилей, что очень важно в задачах обнаружения сигналов на неоднородных изображениях.

Однако этот алгоритм имеет и существенный недостаток. В задачах обнаружения характерны малые задаваемые значения ложной тревоги p (как правило, 0,001 и меньше), но тогда $q \approx 1$, т.е. нужно оценивать квантиль очень высокого порядка.

Алгоритм (5.25) имеет очень большую асимметрию: шаги «вверх» значительно больше, чем «вниз». Увеличение порога в этом алгоритме происходит и в случае обнаружения сигнала, хотя увеличивать порог в этом случае не следует. Если изображение существенно неоднородно и квантиль меняется очень быстро, то алгоритм не успевает ее отслеживать, особенно при уменьшении точной квантили. В результате в среднем порог оказывается «задранным».

Значительно лучше алгоритм (5.25) оценивает квантили, близкие к 1/2, когда отмеченная асимметрия невелика. Воспользуемся этим для улучшения оценок квантилей.

5.8.2. Двухконтурный алгоритм

Предположим, что статистика Λ_n представима в виде $\lambda_n = U_n K_n$, где распределения величин K_n постоянны или меняются очень медленно, а распределения величин U_n могут меняться относительно быстро. Такое представление применимо во многих приложениях. Например, когда тип распределения статистики Λ_n почти не меняется, а интенсивность помех, влияющая на U_n изменяется достаточно быстро.

Будем искать оценку квантили λ_{an} величины Λ_n в виде

$$\hat{\lambda}_n = \hat{U}_n \hat{K}_n \,,$$

где \hat{U}_n — оценка r-квантили величины Λ_n и 1/2 < r << q, воспользовавшись тем, что такие квантили хорошо оцениваются алгоритмом (5.25).

Тогда \hat{K}_n будет коэффициентом пропорциональности между λ_{rn} и λ_{qn} . Используем для нахождения оценок \hat{U}_n и \hat{K}_n две процедуры вида (5.25):

$$\begin{split} \hat{U}_{n+1} &= \hat{U}_n + \mu_n \begin{cases} r, \text{ если } \Lambda_n \geq \hat{U}_n, \\ -s, \text{ если } \Lambda_n < \hat{U}_n, \end{cases} \\ \hat{K}_{n+1} &= \hat{K}_n + \nu_n \begin{cases} q, \text{ если } \Lambda_n < \hat{U}_n \hat{K}_n, \\ -p, \text{ если } \Lambda_n \geq \hat{U}_n K_n, \end{cases} \end{split} \tag{5.26}$$

при этом выбирается $v_n << \mu_n$, так как распределение величин K_n меняется значительно медленнее, чем распределение величин U_n .

Как показали испытания, этот алгоритм хорошо отслеживает квантиль даже при быстром ее изменении. Например, при обнаружении сигналов на существенно неоднородных изображениях ложные тревоги распределялись достаточно равномерно по полю кадра, а их количество укладывалось в допустимые пределы.

На рис. 5.17 показан пример применения описанной методики к обнаружению точечных сигналов на спектрозональных изображениях поверхности Земли. На рис. 5.17, а и 5.13, б показаны изображения одного и того же участка земной поверхности в разных диапазонах. На эти изображения аддитивно добавлены точечные сигналы, расположенные на скошенной сетке. Добавленные сигналы имеют малую амплитуду, поэтому визуально заметны только на ровных участках изображений.

Эти изображения существенно неоднородны: имеются участки относительно гладкие и участки с быстро меняющимися яркостями. Если установить постоянный порог правила обнаружения с заданной вероятностью ложной тревоги, то большинство ложных тревог будет сосредоточено на негладких участках изображений. Поэтому требуется варьировать порог.

На рис. 5.17, в показана ПГ компенсация мешающих изображений в точку по восьми ближайшим элементам с каждого из двух изображений. На рис. 5.17, г показано сечение изображения на рис. 5.10, в порогом, определяемым с помощью двухконтурно-

го $\Pi\Gamma$ алгоритма. При достижении порога, т.е. при обнаружении, ставилась яркая точка, в противном случае – темная.

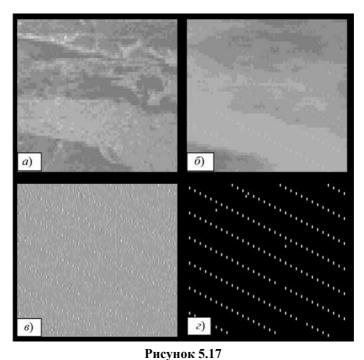


Рисунок 5.17Адаптивное определение порога обнаружения: a, δ — спектрозональные изображения с сигналами; ϵ — компенсация мешающих изображений; ϵ — обнаружение сигналов с адаптивнным

Несмотря на существенную неоднородность изображений, этот алгоритм достаточно точно определял требуемый порог, поэтому почти все сигналы оказались обнаруженными при трех ложных тревогах (три яркие точки вне сетки).

оцениванием порога решающего правила

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии затронуты основные задачи, возникающие при статистическом анализе многомерных массивов данных, которые часто могут быть связаны с изображениями или их последовательностями в различных информационных системах.

Прежде всего, это вопросы математического представления изображений. Учитывая цифровой формат изображений и дальнейшую их обработку на ЭВМ, в качестве основы принято описание в виде случайного поля, определенного на целочисленной сетке размерности два и выше. Проанализирован ряд известных и новых вероятностных моделей, что дает возможность адекватного описания широкого класса статических и изменяющихся изображений, включая рассмотренные в этой книге изображения, заданные на разнообразных поверхностях. Эти модели в дальнейшем использованы для формализации задач обработки изображений и синтеза соответствующих алгоритмов.

Подробно рассмотрены задачи фильтрации изображений, обнаружения точечных и протяженных аномалий на фоне помех с пространственной корреляцией, совмещения изображений и оценивания параметров их межкадровых геометрических трансформаций. Найдены оптимальные и квазиоптимальные алгоритмы для решения этих задач, исследованы эффективность и вычислительная сложность этих алгоритмов.

Особое внимание уделено адаптивным алгоритмам решения основных задач обработки изображений, когда имеется априорная неопределенность в описании обрабатываемых данных. При этом часто была использована псевдоградиентная адаптация.

Рассмотренные модели и методы статистического анализа были использованы авторами и их коллегами в разнообразных приложениях, например, в аэрокосмических системах глобального мониторинга, автоматизированного анализа медицинских изображений и распознавания речевых сигналов на фоне интенсивных помех. Мы надеемся, что представленные результаты окажутся полезными для широкого круга специалистов при решении разнообразных задач извлечения информации из последовательностей изменяющихся изображений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгоритмы оценивания случайных полей на основе моделей с кратными корнями характеристических уравнений

В §2.4 рассматривались оптимальный и близкий к оптимальному алгоритмы оценивания двумерных СП на основе модели с корнями характеристического уравнения кратности (1, 1). Для того чтобы применить эту методику для построения алгоритмов фильтрации СП с кратными корнями характеристических уравнений, прежде всего, необходимо сформулировать задачу фильтрации кадра в терминах пространства состояний. Для этого требуется решить задачу нахождения обобщенной векторной формы представления данного класса моделей.

Вначале рассмотрим случай корней кратности 2 по обеим осям. Модель в этом случае должна иметь следующий вид:

$$\overline{x}_k = A\overline{x}_{k-1} + B\overline{x}_{k-2} + V\overline{\xi}_k , \qquad (\Pi.1)$$

где:

 $\overline{x}_k = \left(x_{k1}\,x_{k2}\,...x_{kM_2}\right)^T$ — вектор, содержащий элементы k-й строки;

 $\overline{\xi}_k = (\xi_{k1} \, \xi_{k2} \, ... \xi_{kM_2})^T$ – порождающий вектор стандартных СВ;

A, B, V – матричные коэффициенты модели;

 $M_1 \times M_2$ — размер изображения.

Таким образом, необходимо определить матричные коэффициенты $A,\,B,\,V$ на основании соответствующей модели с кратными корнями, так, чтобы они стали эквивалентны.

Для определения элементов неизвестных матриц A, B, V домножим (П.1) на \overline{x}_{k-1}^T справа и найдем математическое ожидание:

$$\overline{x}_k \overline{x}_{k-1}^T = A \overline{x}_{k-1} \overline{x}_{k-1}^T + B \overline{x}_{k-2} \overline{x}_{k-1}^T + V \overline{\xi}_k \overline{x}_{k-1}^T,$$

$$M\left\{\overline{x}_{k}\overline{x}_{k-1}^{T}\right\} = AM\left\{\overline{x}_{k-1}\overline{x}_{k-1}^{T}\right\} + BM\left\{\overline{x}_{k-2}\overline{x}_{k-1}^{T}\right\} + VM\left\{\overline{\xi}_{k}\overline{x}_{k-1}^{T}\right\}. \tag{\Pi.2}$$

Пусть $V_{xi}=M\left\{\overline{x}_{k}\overline{x}_{k-i}^{T}\right\}$ — ковариационная матрица поля $\left\{\overline{x}_{k}\right\}$ на расстоянии i. Очевидно, $V_{xi}^{T}=M\left\{\overline{x}_{k-i}\overline{x}_{k}^{T}\right\}=M\left\{\overline{x}_{k}\overline{x}_{k-i}^{T}\right\}=V_{xi}$. Тогда формулы (П.2) принимают следующий вид:

$$V_{x1} = AV_{x0} + BV_{x1}, \quad AV_{x0} = (E - B)V_{x1}.$$
 (II.3)

Точно так же, после домножения (П.1) на \overline{x}_{k-2}^T , получим:

$$\overline{x}_k\overline{x}_{k-2}^T = A\overline{x}_{k-1}\overline{x}_{k-2}^T + B\overline{x}_{k-2}\overline{x}_{k-2}^T + V\overline{\xi}_k\overline{x}_{k-2}^T \;,\; V_{x2} = AV_{x1} + BV_{x0} \;.$$

Умножим теперь (2.42) на \overline{x}_{k}^{T} :

$$\overline{x}_{k}\overline{x}_{k}^{T} = \left(A\overline{x}_{k-1} + B\overline{x}_{k-2} + V\overline{\xi}_{k}\right)\left(A\overline{x}_{k-1} + B\overline{x}_{k-2} + V\overline{\xi}_{k}\right)^{T}$$

и найдем математическое ожидание

$$V_{x0} = M\left\{\overline{x}_{k}\overline{x}_{k}^{T}\right\} = AV_{x0}A^{T} + BV_{x1}A^{T} + AV_{x1}B^{T} + BV_{x0}B^{T} + VV_{\xi}V^{T}$$
(II.4)

Здесь $V_{\xi} = M\left\{\overline{\xi}_{k}\overline{\xi}_{k}^{T}\right\}$ — матрица дисперсии порождающего поля. Для стандартно распределенных СВ ξ_{ij} она становится единичной матрицей.

Рассмотрим структуру элементов матрицы V_{xi} :

$$V_{xi} = M\left\{\overline{x}_{k}\overline{x}_{k}^{T}\right\} = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \dots \\ x_{kM_{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{(k-1),1} & x_{(k-1),2} & \dots & x_{(k-1),M_{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{k,1}x_{(k-i),1} & x_{k,1}x_{(k-i),2} & \dots & x_{k,1}x_{(k-i),M_{2}} \\ x_{k,2}x_{(k-i),1} & x_{k,2}x_{(k-i),2} & \dots & x_{k,2}x_{(k-i),M_{2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{k,M_{2}}x_{(k-i),1} & x_{k,M_{2}}x_{(k-i),2} & \dots & x_{k,M_{2}}x_{(k-i),M_{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_x^2 \begin{pmatrix} R(i,0) & R(i,1) & \dots & R(i,M_2-1) \\ R(i,1) & R(i,0) & \dots & R(i,M_2-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(i,M_2-1) & R(i,M_2-2) & \dots & R(i,0) \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание разделимость модели по координатным осям, можем записать

$$V_{xi} = \sigma_x^2 R_y(i) \begin{pmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(M_2 - 1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M_2 - 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M_2 - 1) & R_x(M_2 - 2) & \dots & R_x(0) \end{pmatrix}.$$

Матрица в последнем выражении является ковариационной матрицей одномерной модели по строке, т.е. V_{x0} . С учетом этого, полученное выражение может быть переписано в следующем виде:

$$V_{xi} = \sigma_x^2 R_v(i) V_{x0} . {(II.5)}$$

Теперь, с учетом последнего выражения, найдем коэффициенты модели A, B, V. Решим систему матричных уравнений (П.3) относительно неизвестных A, B:

$$\begin{cases} V_{x1} = AV_{x0} + BV_{x1}, \\ AV_{x0} = (E - B)V_{x1}, \end{cases} \begin{cases} A = R_y (1) \frac{1 - R_y (2)}{1 - R_y (1)^2}, \\ B = \frac{R_y (2) - R_y (1)^2}{1 - R_y (1)^2}. \end{cases}$$

Подставив в полученные выражения значения КФ, получим окончательное решение $\begin{cases} A = 2\rho_y \\ B = -\rho_y^2 \end{cases}.$ Таким образом, коэффициен-

ты A и B векторной модели с кратными корнями порядка 2 по обеим осям являются скалярными величинами.

Для того чтобы полностью определить параметры модели $(\Pi.1)$, необходимо найти еще коэффициент V. Для этого подста-

вим полученные выражения A и B в формулу (П.4) и с учетом того, что $V_{\mathcal{E}} \equiv E$, получим:

$$\begin{split} V_{x0} &= A^2 V_{x0} + 2ABR_y \left(1 \right) V_{x0} + B^2 V_{x0} + VV^T \,, \\ VV^T &= \left(1 - A^2 - 2ABR_y \left(1 \right) - B^2 \right) V_{x0} \,. \end{split}$$

Явное выражение для V можно получить с использованием разложения Холесского [30].

Таким образом, все коэффициенты модели (Π .1) полностью определены. Теперь необходимо привести (Π .1) к виду

$$\overline{y}_l = S\overline{y}_{l-1} + W\zeta_l. \tag{\Pi.6}$$

Это может быть сделано следующим образом. Включим в вектор состояния \overline{y}_l две строки изображения – k-ю и (k-1)-ю: $\overline{y}_l = \left(x_{k1}\,x_{k2}\,\ldots\,x_{kN}\,x_{(k-1)1}\,x_{(k-1)2}\,\ldots\,x_{(k-1)N}\right)^T$. С учетом этого перепишем (П.1) в форме (П.6):

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_k \\ \overline{x}_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_{k-1} \\ \overline{x}_{k-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\xi}_k \\ \overline{\xi}_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, модель (П.1) полностью построена.

Полученное представление модели СП (П.6) дает возможность применить для фильтрации СП на основе моделей с корнями характеристических уравнений кратности (2,2) стандартную калмановскую процедуру фильтрации векторной случайной по-

следовательности
$$\overline{y}_l = S\overline{y}_{l-1} + \overline{\zeta}_l$$
. Здесь $\overline{y}_l = \begin{pmatrix} \overline{x}_k \\ \overline{x}_{k-1} \end{pmatrix}$ — вектор со-

стояния;
$$S = \left(\frac{A \mid B}{E \mid 0} \right)$$
 — переходная матрица системы; $\overline{\zeta}_l = \left(\frac{\overline{\xi}_k}{\overline{\xi}_{k-1}} \right)$ —

вектор некоррелированных стандартных СВ.

Модель наблюдения запишется следующим образом:

$$\overline{o}_k = H\overline{y}_k + \overline{g}_k$$
, $l = 1, 2, ..., M_1$,

где:

 $\overline{o}_k = \left(o_{k1}\,o_{k2}\,\dots\,o_{kM_2}\right)^T - \text{строка зашумленного изображения};$ $\overline{\mathcal{G}}_l = \left(\mathcal{G}_{k1}\,\mathcal{G}_{k2}\,\dots\,\mathcal{G}_{kM_2}\right)^T - \text{белый гауссовский шум с дисперсией }V_{\mathcal{G}}\,;$

$$H = (E \mid 0)$$
 — матрица наблюдения.

Соотношения (П.1) и (2.40) приводят к следующему алгоритму векторной калмановской фильтрации:

$$\begin{split} P_{l_{9}} &= SP_{l-1}S^{T} + WW^{T}, \\ K_{l} &= P_{l_{9}}H^{T} \left(HP_{l_{9}}H^{T} + V_{\theta} \right)^{-1}, \\ P_{l} &= \left(E - K_{l}H \right) P_{l_{9}}, \\ \widehat{y}_{l_{9}} &= S\widehat{y}_{l-1}, \quad \widehat{y}_{l} = \widehat{y}_{l_{9}} + K_{l} \left(\overline{z}_{l} - H\widehat{y}_{l_{9}} \right). \end{split}$$
 (II.7)

Вычислительная сложность алгоритма (П.7) существенно выше, чем у алгоритма (2.29) — (2.31). Тем не менее, далее будут высказаны предложения по сокращению вычислительной сложности подобных алгоритмов.

Дальнейший анализ приведенных выражений показывает, что возможно обобщение векторной модели (П.6) на случай корней характеристического уравнения любой кратности. Пусть заданы $\overline{n} = \left(n_y \, n_x\right)^T$ — кратность корней и $\overline{\rho} = \left(\rho_y \, \rho_x\right)^T$ — вектор параметров двумерной модели (2.28). Включим в вектор состояния $\overline{y}_l \, n_y$ строк изображения — с k -й по $(k-n_y+1)$ -ю:

$$\overline{y}_l = (x_{k1} \dots x_{kM_2} \dots x_{(k-n_y+1)1} \dots x_{(k-n_y+1)M_2})^T$$

и перепишем (2.26) в форме (2.32):

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_{k} \\ \overline{x}_{k-1} \\ \overline{x}_{k-2} \\ \cdots \\ \overline{x}_{k-n_{y}+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1} & A_{2} & \cdots & A_{n_{y}-1} & A_{n_{y}} \\ E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_{k-1} \\ \overline{x}_{k-2} \\ \overline{x}_{k-3} \\ \cdots \\ \overline{x}_{k-n_{y}} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} V & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\xi}_k \\ \overline{\xi}_{k-1} \\ \overline{\xi}_{k-2} \\ \cdots \\ \overline{\xi}_{k-n_y+1} \end{pmatrix},$$

где $A_i = \alpha_{yi} E$ — соответствующий коэффициент скалярной модели вдоль оси y.

Найдем теперь коэффициент V. Для этого перепишем (П.3) в векторном виде $\overline{x}_k = \sum_{i=1}^{n_y} A_i \overline{x}_{k-i} + V \overline{\xi}_k$, $k=1,2,...,M_1$, и домножим его справа на \overline{x}_k^T :

$$\overline{x}_{k}\overline{x}_{k}^{T} = \left(\sum_{i=1}^{n_{y}} A_{i}\overline{x}_{k-i} + V\overline{\xi}_{k}\right) \left(\sum_{j=1}^{n_{y}} A_{j}\overline{x}_{k-j} + V\overline{\xi}_{k}\right)^{T}.$$

Найдем математическое ожидание обеих частей:

$$\begin{split} M\left\{\,\overline{x}_{k}\overline{x}_{k}^{T}\right\} &= \sum_{i=1}^{n_{y}} \sum_{j=1}^{n_{y}} A_{i}A_{j}M\left\{\,\overline{x}_{k-i}\overline{x}_{k-j}^{T}\right\} + VM\left\{\,\overline{\xi}_{k}\overline{\xi}_{k}^{T}\right\}V^{T}\,,\\ V_{x0} &= \sum_{i=1}^{n_{y}} \sum_{j=1}^{n_{y}} A_{i}A_{j}V_{x0}R_{y}\left(i-j\right) + VV^{T}\,. \end{split}$$

Из последнего равенства получаем:

$$VV^{T} = \left(1 - \sum_{i=1}^{n_{y}} \sum_{j=1}^{n_{y}} A_{i} A_{j} R_{y} (i - j)\right) V_{x0}, \qquad (\Pi.8)$$

причем выражение в скобках есть скаляр. Общий вид коэффициента V может быть получен из (П.8) при помощи разложения Холесского.

Таким образом, обобщенный вид модели с кратными корнями для случая двух измерений полностью определен и мы можем применить для оценивания подобных СП процедуры векторной калмановской фильтрации в форме (П.7).

Увеличение размера вектора состояния влечет за собой увеличение объема вычислений. Тем не менее, можно заметить, что алгоритм (П.7) может быть значительно упрощен. Действительно, во-первых, переходная матрица системы S содержит в себе большое количество нулей, а во-вторых, на каждом шаге наблюдается, и оценивается лишь одна строка изображения. Кроме того, пересчет коэффициента усиления (П.7), в силу стационарности модели, может быть осуществлен заранее. Исходя из этих соображений, можно оценить вычислительную сложность алгоритма. Предварительный пересчет матричных коэффициентов фильтра в (П.7) требует $O\left(M_2^4 + (3n_y^2 + n_y)M_2^3\right)$ операций умножения, где M_2 — длина строки изображения. При условии предварительного пересчета (П.7) объем вычислений для оценки одной строки будет иметь порядок $O\left(n_y(n_y+1)M_2^2\right)$.

Рассмотрим теперь возможность сокращения числа арифметических операций в (П.7) и синтеза квазиоптимального скалярного алгоритма оценивания. Рассмотрим структуру матрицы усиления K_k . Она состоит из n_y матричных блоков размера $M_2 \times M_2$:

$$K_{k} = P_{k}H^{T}V_{\theta}^{-1} = V_{\theta}^{-1} \begin{bmatrix} P_{k,k} \\ -P_{k-1,k} \\ -N_{\theta} \end{bmatrix}, \\ P_{k-n_{y}+1,k} \end{bmatrix},$$

где $P_{i,j} = M\left\{\overline{\varepsilon}_i\overline{\varepsilon}_j^T\right\} = M\left\{\left(\overline{x}_i - \widehat{\overline{x}}_i\right)\left(\overline{x}_j - \widehat{\overline{x}}_j\right)^T\right\}$ — матрица ковариации ошибок оценивания i-й и j-й строк изображения.

Пусть пересчет установившегося значения коэффициента усиления (П.2) уже осуществлен. В этом случае

$$K = \lim_{k \to \infty} K_k = V_{\theta}^{-1} \begin{bmatrix} \lim_{k \to \infty} P_{k,k} \\ -\lim_{k \to \infty} P_{k-1,k} \\ -\lim_{k \to \infty} P_{k-1,k} \end{bmatrix} = V_{\theta}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{P}{P} \\ -\lim_{k \to \infty} P_{k-n_y+1,k} \end{bmatrix},$$

где:

P — установившееся значение матрицы ковариации ошибки оценивания одной строки изображения;

 V_{θ} – дисперсия шума наблюдения.

Поскольку на каждом шаге наблюдаются и, соответственно, оцениваются лишь первые M_2 элементов вектора \overline{y}_l , то для вычисления оценки используются лишь первые M_2 строк матрицы K.

Анализ данного выражения и формулы (П.7) показывает, что все соображения, использованные для синтеза квазиоптимального алгоритма фильтрации СП на основе моделей кратности 1, могут быть применены и в данном случае. Действительно, выделим ℓ -ю строку соотношения (П.7) и применим к ней вышеизложенные рассуждения. Очевидно, все коэффициенты, определяющие скалярную AP модель состояния и наблюдения для u_ℓ^k , будут верны и в данном случае.

Рассмотрим возможность использования для представления процесса изменения u_{ℓ}^k АР более высоких порядков. Допустим, что модель состояния u_{ℓ}^k записывается следующим образом:

$$u_{\ell} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{\ell i} u_{\ell - i} + \xi_{\ell}. \tag{\Pi.9}$$

Для каждого элемента u_ℓ необходимо определить неизвестные параметры $\gamma_{\ell i}$ и дисперсию порождающего шума $V_{\xi\ell}^2$. Для этого домножим (П.9) на u_{l-s} , s=1...m, и найдем математическое ожидание:

$$P_{3\ell,\ell-s} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{\ell i} P_{3\ell-i,\ell-s}, \ s = 1, 2, ..., m.$$

Полученное выражение представляет собой систему m линейных уравнений относительно неизвестных $\gamma_{\ell i}$. Возведя (П.9) в квадрат при известных $\gamma_{\ell i}$, получим уравнение для нахождения $V_{\mathcal{E}\ell}^2$:

$$V_{\xi\ell} = P_{\ni\ell,\ell} - \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^m \gamma_{\ell i} \gamma_{\ell j} P_{\ni\ell-i,\ell-j} \ .$$

Из приведенных рассуждений ясно, что вычислительная сложность квазиоптимального алгоритма в случае модели с корнями произвольной кратности имеет тот же порядок, что и в случае кратности 1. При использовании в модели (П.5) авторегрессий с большим числом членов вычислительная сложность вырастает пропорционально ее порядку.

Литература

- 1. Алексеев А.С., Пяткин В.П., Дементьев В.Н. и др. Автоматизированная обработка изображений природных комплексов Сибири. Новосибирск: Наука. 1988. 224 с.
- 2. Адаптивные методы обработки изображений: Сб. науч. трудов под ред. *В.И. Сифорова и Л.П. Ярославского*. М.: Наука. 1988, 244 с.
- 3. *Балакришнан А.В.* Теория фильтрации Калмана / Пер. с англ. М.: Мир. 1988. 168 с.
- 4. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов / Пер. с англ.; под ред. *В.Ф. Писаренко*. М.: Мир. 1974. Кн. 1. 406 с.
- 5. *Быков Р.Е., Гуревич С.Б.* Анализ и обработка цветных и объемных изображений. М.: Радио и связь. 1984. 248 с.
- 6. *Васильев К.К.* Прием сигналов при мультипликативных помехах. Саратов: СТУ. 1983. 128 с.
- 7. *Васильев К.К.* Рекуррентное оценивание случайных полей на многомерных сетках // Методы обработки сигналов и полей. Саратов, 1986. С. 18–33.
- 8. *Васильев К.К.* Байесовское различение и оценивание случайных последовательностей // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 3. С. 476–485.
- 9. Васильев К.К. Обнаружение сигнала на последовательности изображений // Математические и технические проблемы обработки визуальной информации. Новосибирск: ВЦ СО РАН. 1992. С. 49–64.
- 10. Васильев К.К. Применение статистических методов при проектировании корабельных систем связи и автоматического управления движением // Автоматизация процессов управления. 2011. № 1(23). С. 72–77.
- 11. *Васильев К.К.* Обнаружение протяженных аномалий на многомерных изображениях // Вестник УлГТУ. 2006. № 4. С. 31–33.
- 12. *Васильев К.К.* Авторегрессии с кратными корнями характеристических уравнений // Радиотехника. 2014. № 11. С. 74–76.
- 13. *Васильев К.К., Агеев С.А.* Применение адаптивной декорреляции при обработке изображений // Наукоемкие технологии. 2002. Т. 3. № 3. С. 4–24.

- 14. *Васильев К.К., Балабанов В.В.* Обнаружение точечных сигналов на фоне мешающих изображений // Радиотехника. 1991. № 10. С. 86–89.
- 15. *Васильев К.К., Дементьев В.Е.* Обнаружение аномалий на многозональных изображениях // Наукоемкие технологии. 2007. Т. 8. № 9. С. 4–13.
- 16. *Васильев К.К.*, *Дементьев В.Е.*, *Лучков Н.В.* Обнаружение протяженных сигналов на многозональных изображениях // Радиотехника. 2012. № 9. С. 35–41.
- 17. *Васильев К.К., Драган Я.П., Казаков В.А.* и др. Прикладная теория случайных процессов и полей / Под ред. К.К. Васильева, В.А. Омельченко. Ульяновск: УлГТУ. 1995. 256 с.
- 18. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Методы фильтрации многомерных случайных полей. Саратов: Изд-во Сарат. унта. 1990. 128 с.
- 19. Васильев К.К., Крашениников В.Р. Тензорная фильтрация случайных полей при марковских смещениях // Методы статистической обработки изображений и полей. Новосибирск: НЭТИ. 1986. С. 113–126.
- 20. *Васильев К.К.*, *Крашенинников В.Р.* Адаптивные алгоритмы обнаружения аномалий на последовательности многомерных изображений // Компьютерная оптика. 1995. Вып. 14–15. Ч. 1. С. 125–132.
- 21. *Васильев К.К., Крашенинников В.Р., Синицын И.Н., Синицын В.И.* Представление и быстрая обработка многомерных изображений // Наукоемкие технологии. 2002. Т. 3. С. 4–24.
- 22. Васильев К.К., Крашенинников В.Р., Ташлинский А.Г. Статистический анализ последовательностей многомерных изображений // Наукоемкие технологии. 2013. Т. 14. № 5. С. 5–11.
- 23. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Статистический анализ многомерных изображений. Ульяновск: УлГТУ. 2007. 172 с.
- 24. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Статистический анализ изображений. Ульяновск: УлГТУ. 2014. 214 с.
- 25. *Васильев К.К., Дементьев В.Е., Андриянов Н.А.* Оценивание параметров дважды стохастических случайных полей // Радиотехника. 2014. № 7. С. 103–106.
- 26. *Васильев К.К., Дементьев В.Е., Андриянов Н.А.* Анализ эффективности оценивания изменяющихся параметров дважды стохастической модели // Радиотехника. 2015. № 6. С. 12–15.

- 27. *Васильев К.К., Лучков Н.В.* Обнаружение протяженных сигналов на последовательности изображений // Цифровая обработка сигналов. 2011. № 3. С. 24–27.
- 28. Васильев К.К., Попов О.В. Авторегрессионные модели случайных полей с кратными корнями / Труды 4-й конф. «Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии». Новосибирск, 1998. Ч. 1. С. 258–260.
- 29. *Васильев К.К., Служивый М.Н.* Применение методов фильтрации случайных полей при проектировании многочастотных систем связи с OFDM // Наукоемкие технологии. 2013. Т. 14. С. 32–35.
- 30. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа. 2009. 840 с.
- 31. Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю., Бондаренко А.В., Осоков М.В., Моржин А.В. Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения. М.: Физматкнига. 2010. 672 с.
- 32. *Виттих В.А., Сергеев В.В., Сойфер В.А.* Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. М.: Наука. 1992. 214 с.
- 33. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. 1968. 576 с.
- 34. Гинзбург В.М. Формирование и обработка изображений в реальном времени. М.: Радио и связь. 1986. 232 с.
- 35. Гладких Е.А., Крашенинников В.Р. Расчет сил и моментов, действующих на морской подвижный объект, на основе авторегрессионной модели морского волнения // Автоматизация процессов управления. 2010. № 2(20). С. 97–101.
- 36. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера. 2005. 1070 с.
- 37. Грузман И.С., Киричук В.С., Косых В.П., Перетягин Г.И., Спектор А.А. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Новосибирск: НГТУ. 2000. 168 с.
- 38. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир. 1988. 488 с.
- 39. Джайн А.К. Успехи в области математических моделей для обработки изображений // ТИИЭР. 1981. Т. 69. № 5. С. 9–39.
- 40. Драган Я.П., Васильев К.К. и др. Состояние и перспективы развития вероятностных моделей случайных сигналов и полей. Харьков: ХИРЭ. 1993. 156 с.
- 41. *Касти Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике / Пер. с англ.; под ред. С.П. Чеботарева. М., 1976. 223 с.

- 42. Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов / Под ред. *Я.А. Фурмана*. М.: Физматлит. 2004. 456 с.
- 43. *Крашениников В.Р.* Основы теории обработки изображений. Ульяновск: УлГТУ. 2003. 151 с.
- 44. *Крашениников В.Р.* Статистические методы обработки изображений. Ульяновск: УлГТУ. 2015. 167 с.
- 45. *Крашенинников В.Р.* Псевдофизический подход к совмещению и распознаванию групповых точечных объектов // Автоматизация процессов управления. 2015. № 3(41). С. 64–68.
- 46. *Крашениников В.Р., Калинов Д.В.* Применение мультиэлайнмента в фильтрации речевых сигналов и других квазипериодических сигналов, преобразованных в изображение / Доклады 5-й Междунар. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». М., 2003. Т. 2. С. 359–362.
- 47. *Крашениников В.Р., Гладких Е.А.* Тест для проверки гипотез о ковариационной функции и спектральной плотности случайного процесса // Автоматизация процессов управления. 2014. № 1(35). С. 24–30.
- 48. *Крашениников В.Р., Кадеев А.Д.* Нахождение неподвижных точек преобразований координат при оценивании параметров геометрической трансформации изображений // Радиотехника. 2012. Вып. 175. № 9. С. 68–71.
- 49. *Крашениников В.Р., Кадеев А.Д.* Алгоритм оценивания сдвига и поворота изображений на основе метода неподвижной точки // Изв. Самарского научного центра РАН. 2013. Вып. 4(4). С. 931–935.
- 50. *Крашениников В.Р., Кадеев А.Д., Потапов М.А.* Совмещение изображений методом неподвижной точки // Наукоемкие технологии. 2013. Т. 14. № 5. С. 26–31.
- 51. *Крашениников В.Р., Капралов В.П.* Адаптивные алгоритмы прогноза однородных изображений // Техника телевидения. 1990. № 5. С. 53–61.
- 52. *Крашениников В.Р., Микеев Р.Р., Кузьмин М.В.* Модель и алгоритм имитации мегарельефа планет в виде изображения на поверхности // Радиотехника. 2012. Вып. 175. С. 65–67.
- 53. *Крашенинников В.Р., Потапов М.А.* Метод неподвижной точки для оценки параметров геометрической трансформации изображений / В сб. науч. трудов «Электронная техника»; под ред. *В.А. Сергеева*. Ульяновск: УлГТУ. 2008. С. 102–107.

- 54. *Кловский Д.Д., Сойфер В.А.* Обработка пространственновременных сигналов (в каналах передачи информации). М.: Связь. 1976. 208 с.
- 55. *Малышев В.А., Минлос Р.А.* Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. М.: Наука. 1988. 288 с.
- 56. Марковская теория оценивания в радиотехнике / Под ред. *М.С. Ярлыкова*. М.: Радиотехника. 2004. 504 с.
- 57. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. *В.А. Сойфера.* М.: Физматлит. 2001. 784 с.
- 58. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука. 1972. 304 с.
- 59. Обработка изображений и цифровая фильтрация / Под ред. *Т. Хуанга*. М.: Мир. 1979. 318 с.
- 60. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ. 1990. 128 с.
- 61. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения // Автоматика и телемеханика. 1973. N 3. С. 45–68.
- 62. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений / Пер. с англ. под ред. *Д.С. Лебедева*. М.: Мир. 1982. Кн. 1. 312 с.; Кн. 2. 480 с.
- 63. *Пытьев Ю.П.* Морфологический анализ изображений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. С. 1061–1064.
- 64. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. М.: Мир. 1978.
- 65. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Стохастический анализ при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио. 1977. 432 с.
- 66. Розанов Ю.А. Марковские случайные поля. М., 1981. 256 с.
- 67. Розанов Ю.А. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. М.: Физматлит. 1995. 256 с.
- 68. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука. 1966. 404 с.
- 69. *Савиных В.П., Цветков В.Я.* Геоинформационный анализ данных дистанционного зондирования. М.: Картоцентр Геодезиздат. 2001. 225 с.
- 70. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Пер. с англ.; под ред. проф. *Б.Р. Левина*. М.: Связь. 1976. 496 с.

- 71. Соколов Н.В. Введение в теорию многомерных матриц. Киев: Наукова думка. 1972. 176 с.
- 72. *Спектор А.А.* Многомерные дискретные марковские поля и их фильтрация при наличии некоррелированного шума // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 5. С. 965–972.
- 73. *Ташлинский А.Г.* Оценивание параметров пространственных деформаций последовательностей изображений. Ульяновск: УлГТУ. 1999. 132 с.
- 74. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь. 1982. 624 с.
- 75. *Уидроу Б., Стирнз С.* Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь. 1989. 440 с.
- 76. *Фурман Я.А*. О понятии формы плоского изображения // Автометрия. 1992. № 5. С. 113–120.
- 77. *Хабиби А*. Двумерная байесовская оценка изображений // ТИИЭР. 1972. Т. 60. № 7. С. 153–159.
- 78. Цифровая обработка изображений / Под ред. А.А. Спектора. Новосибирск: НГТУ. 2002. 350 с.
- 79. Шалыгин А.С., Палагин Ю.А. Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение. 1986. 320 с.
- 80. *Ярославский Л.П.* Введение в цифровую обработку изображений. М.: Радио и связь. 1979. 312 с.
- 81. *Ярославский Л.П*. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. М.: Радио и связь. 1987. 296 с.
- 82. *Bellman R*. Invariant Imbedding and Random Walk // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 251–254.
- 83. *Berger J.O.* Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Springer-Verlag. N.I. 1985. 320 p.
- 84. *Dudgeon D.E.* Multidimensional Digital Signal Processing. Prentice Hall. 1995. 406 p.
- 85. Computer Vision in Control Systems / *Jain L.C.* and *Favorskaya M.N.* editors / Intelligent Systems Reference Library. V. 75. Springer. 2015. 695 p.
- 86. *Dikshit S.S.* A Recursive Kalman Window Approach to Image Restoration // IEEE Trans. 1984. V. com-32. P. 125-139.
- 87. *Huang T.S.* (Ed.) Image Sequence Analysis. Berlin: Springer. 1981. 452 p.
- 88. *Jain A.K.* Fundamentals of Digital Image Processing. Prentice-Hall. 1989. 586 p.

- 89. *Krasheninnikov V.R.* Wave Image Models on the Surfaces / Proceedings of 8th Open German-Russian Workshop «Pattern Recognition and Image Understanding» OGRW-8-2011. Nizhny Novgorod. 2011. P. 154–157.
- 90. *Krasheninnikov V.R.* Correlation Analysis and Synthesis of Random Field Wave Models // Pattern Recognition and Image Analysis. 2015. V. 25. № 1. P. 41–46.
- 91. Krasheninnikov V.R., Kalinov D.V., Pankratov Yu.G. Spiral Autoregressive Model of a Quasi periodic Signal // Pattern Recognition and Image Analysis. 2001. V. 11. № 1. P. 211–213.
- 92. *Krasheninnikov V.R.*, *Potapov M.A*. Estimating Parameters of Interframe Geometric Transformation of an Image Sequence by the Fixed Point Method // Pattern Recognition and Image Analysis. 2010. V. 20. № 3. P. 316–323.
- 93. *Krasheninnikov V.R.*, *Potapov M.A*. A Way to Detect the Straight Line Trajectory of an Immovable Point for Estimating Parameters of Geometrical Transformation of 3D Images // Pattern Recognition and Image Analysis. 2011. V. 21. № 2. P. 280–284.
- 94. *Krasheninnikov V.R.*, *Potapov M.A*. Estimation of Parameters of Geometric Transformation of Images by Fixed Point Method // Pattern Recognition and Image Analysis. 2012. V. 22. № 2. P. 303–317.
- 95. *Tashlinskii A.G.* Pseudogradient Estimation of Digital Images Geometrical Deformations / In Vision Systems and Pattern Recognition. Vienna, Austria: I-Tech Education and Publishing. 2007. 563 p.
- 96. Vasilyev K.K. Statistical Analysis of Multidimensional Images // Pattern Recognition and Image Analysis. 1999. V. 9. № 4. P. 38–64
- 97. *Vasilyev K.K., Dementev V.E., Andriyanov N.A.* Doubly stochastic models of images // Pattern Recognition and Image Analysis. 2015. V. 25(1). P. 105–110.
- 98. Vasilyev K.K., Dementev V.E., Andriyanov N.A. Application of mixed models for solving the problem on restoring and estimating image parameters // Pattern Recognition and Image Analysis. 2016. V. 26(1). P. 240–247.
- 99. *Vasiliev K.K., Dementev V.E., Luchkov N.V.* Analysis of Efficiency of Detecting Extended signals on Multidimensional Greeds // Pattern Recognition and Image Analysis. 2012. V. 22(2). P. 400–408.

- 100. *Vasiliev K.K.*, *Luchkov N.V*. Imitazione immagini disomogeneo // Italian Science Review. 2014. № 5(14). P. 74–77.
- 101. *Woods J.W.* Two-dimensional Kalman filtering // Topics in Applied Physics, Berlin. 1981. V. 42. P. 155–208.

Константин Константинович Васильев Виктор Ростиславович Крашенинников

СТАТИСТИЧЕСКЙ АНАЛИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Монография

Редактор Г.Н. Чернышева

Изд. № 17. Сдано в набор 01.07.2017. Подписано в печать 3.08.2017. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Печ. л. 15,5. Тираж 300 экз. Зак. №

Издательство «Радиотехника»
107031, Москва, К-31, Кузнецкий мост, д. 20/6
Тел./факс: (495)621-48-37; 625-78-72, 625-92-41
E-mail: info@radiotec.ru

www.radiotec.ru

Отпечатано в типографии



Васильев Константин Константинович

Доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки и техники РФ, заведующий кафедрой «Телекоммуникации» Ульяновского государственного технического университета. Имеет монографии и статьи в области синтеза и анализа информационных систем.



Крашенинников Виктор Ростиславович

Доктор технических наук, профессор, Почетный работник высшего профессионального образования РФ, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» Ульяновского государственного технического университета. Имеет монографии и статьи в области анализа и синтеза информационных систем.

Рассматриваются вопросы построения математических моделей и статистического анализа последовательностей изображений, заданных на многомерных сетках. Описываются оптимальные и квазиоптимальные решения основных задач обработки изображений (фильтрация и сглаживание, обнаружение объектов, оценивание деформаций многомерной сетки). Особое внимание уделяется построению и анализу реализуемых в реальном времени алгоритмам параметрической адаптации.

Для специалистов в области извлечения полезной информации из многомерных массивов данных при дистанционном исследовании Земли, в медицине, радиолокации и других приложениях. Может быть полезна студентам старших курсов и аспирантам.

