

**Министерство образования Российской Федерации
Ульяновский государственный технический университет**

Васильев К.К.

Статистический анализ многомерных изображений

Ульяновск 2002 г.

УДК 621.391

Рецензенты: д.т.н., профессор Кумунжиев К.В.

д.т.н., профессор Семушин И.В.

Васильев К.К.

Статистический анализ многомерных изображений. – Ульяновск: УлГТУ, 2002.-156 с.

ISBN 5-8946-234-6

Представлены математические модели последовательностей многомерных изображений. Рассмотрены проблемы обнаружения и фильтрации. Особое внимание уделено рекуррентным процедурам обработки и применению адаптивной декорреляции случайных полей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-00531А.

© Васильев К.К., 2002

Содержание

Введение	4
1. Математические модели изображений	6
1.1 Тензорные стохастические разностные уравнения	6
1.2 Каузальные модели изображений	14
1.3 Авторегрессионные модели	29
2 Обнаружение аномалий на фоне мешающих изображений	49
2.1 Оптимальные алгоритмы обнаружения сигналов	49
2.2 Эффективность обнаружения аномалий	57
2.3 Адаптивные рекуррентные алгоритмы декорреляции случайных полей	63
3. Фильтрация многомерных изображений	83
3.1 Эффективность оптимальной фильтрации многомерных изображений	84
3.2 Тензорный фильтр Калмана	99
3.3 Рекуррентное оценивание многомерных изображений	106
3.4 Алгоритмы оценивания двумерных СП на основе моделей с кратными корнями характеристических уравнений	126
Заключение	134
Литература	135

Введение

В последние годы все более широкое применение находят системы извлечения информации, включающие пространственные апертуры датчиков для регистрации полезных сигналов. Важными классами таких систем являются аэрокосмические комплексы дистанционного исследования Земли, радио- и гидролокационные системы различного назначения [1-10]. Для названных систем естественным является описание сигналов и помех с помощью случайных функций нескольких переменных, т. е. случайных полей (СП). При этом пространственные переменные, учитывающие взаимное расположение датчиков, часто носят дискретный характер. Дополнительная дискретизация наблюдаемых сигналов по времени приводит к моделям СП, заданным на многомерных сетках [11-15]. Несмотря на многочисленные публикации, касающиеся проблем статистического синтеза и анализа сеточных СП, удовлетворительные решения получены лишь для двумерных сеток (статических плоских изображений).

Более сложные модели изменяющихся во времени СП на многомерных сетках рассматривались в весьма ограниченном числе работ [11-18]. Это объясняется большими методологическими и математическими трудностями построения теории СП, связанными с переходом к пространствам нескольких измерений. При этом формальное использование хорошо разработанных методов теории случайных процессов либо резко ограничивает класс возможных СП либо приводит к практически непреодолимым вычислительным проблемам реализации полученных алгоритмов.

В настоящей работе рассматриваются представление и методы статистического анализа важнейших для приложений СП, заданных в дискретном пространстве и времени, то есть на конечных или

бесконечных многомерных целочисленных сетках $J = \{\bar{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n) : j_l = \overline{1, M_l}, l = 1, 2, \dots, n\}$. Таким образом, СП представляется как семейство $X_{\bar{j}} = \{x_{\bar{j}}, \bar{j} \in J\}$ случайных величин $x_{\bar{j}}$, которые в свою очередь могут быть скалярными, векторными или более сложными. Если СП изменяется во времени, то данный случай можно свести к предыдущему, увеличив размерность J на единицу. Однако, чтобы подчеркнуть особый характер временной координаты, удобнее оставить J без изменений: и рассматривать СП на прямом произведении $J_t \otimes T$ где $T = \{t : t = 1, 2, \dots, k\}$ - конечное или счетное множество моментов дискретного времени (рис .1). В подобных случаях будем использовать верхние индексы t для обозначения временной координаты: $x_{\bar{j}}^t, t \in T, \bar{j} \in J$. При фиксированном t семейство $x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_t$ будем называть сечением СП или кадром n - мерного изображения.

В первой части статьи рассматриваются тензорные и каузальные математические модели, позволяющие осуществлять имитацию и синтез алгоритмов обработки последовательностей изображений. Затем решается важная для приложений задача оптимального обнаружения аномалий, т.е. детерминированных сигналов, которые могут появиться в области $G \in J_t$ очередного кадра последовательности (рис. 1). В третьей части изучаются проблемы оптимального рекуррентного оценивания и спектрального анализа СП. При этом, в частности, удастся получить граничные оценки эффективности процедур обнаружения и относительно простые аппроксимирующие соотношения для минимально достижимой дисперсии ошибки рассматриваемых методов тензорной фильтрации.

1. Математические модели изображений

1.1. Тензорные стохастические разностные уравнения

Рассмотрим представление изменяющихся в дискретном времени СП на многомерных сетках с помощью тензорных уравнений состояния [11, 12]. Такое представление можно характеризовать как обобщение известных динамических моделей [19-21], составляющих фундамент современной теории калмановской фильтрации векторных случайных последовательностей. Проанализируем вначале описание последовательности изменяющихся кадров многомерных изображений с помощью наиболее простого по структуре линейного тензорного стохастического разностного уравнения:

$$x_{\bar{j}}^t = \rho_{\bar{j}\bar{l}}^t x_{\bar{l}}^{t-1} + \mathcal{G}_{\bar{j}\bar{l}}^t \xi_{\bar{l}}^t, \quad t=1, 2, \dots, k; \quad \bar{j}, \bar{l} \in J_t, \quad (1.1)$$

где $\{\xi_{\bar{l}}^t, \bar{l} \in J_t\}$ - СП независимых гауссовских случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями; $\rho_{\bar{j}\bar{l}}^t$ и $\mathcal{G}_{\bar{j}\bar{l}}^t$ - тензоры ранга $2n$ с двумя групповыми индексами $\bar{j} = (j_1 j_2 \dots j_n)$ и $\bar{l} = (l_1 l_2 \dots l_n)$; J_t - ограниченные области n -мерного пространства \mathbb{R}_0^n -точек с целочисленными координатами. Заметим, что в соответствии с правилами умножения тензоров [22]

$$\rho_{\bar{j}\bar{l}}^t x_{\bar{l}}^{t-1} = \sum_{\bar{l} \in J_t} \rho_{\bar{j}\bar{l}}^t x_{\bar{l}}^{t-1}, \quad \mathcal{G}_{\bar{j}\bar{l}}^t \xi_{\bar{l}}^t = \sum_{\bar{l} \in J_t} \mathcal{G}_{\bar{j}\bar{l}}^t \xi_{\bar{l}}^t,$$

т.е. производится суммирование по одинаковым нижним индексам. При этом верхний индекс t соответствует дискретному времени и означает номер сечения (кадра) СП; суммирование по нему не производится.

Рекуррентное соотношение (1.1) определяет, вообще говоря, неоднородное и нестационарное гауссовское марковское СП на прямом произведении $J_t \otimes T$. При этом свойство марковости СП $\{x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_t, t \in T\}$

устанавливается относительно сечения $\Gamma_t^0 = \{x_j^t, \bar{j} \in J_t\}$, разделяющего СП на “прошлое” $\Gamma_t^- = \{x_j^q, \bar{j} \in J_q, q \leq t\}$ и будущее $\Gamma_t^+ = \{x_j^q, \bar{j} \in J_q, q \geq t\}$. Действительно, условные плотности распределения вероятностей вероятностей (ПРВ) с учетом (1.1) могут быть записаны в виде $W(x^t \in \Gamma_t^+ / x^t \in \Gamma_t^-) = W(x^t \in \Gamma_t^+ / x^t \in \Gamma_t^0)$, что и устанавливает марковость СП относительно граничных значений Γ_t^0 .

При заданных тензорах $\rho_{j\bar{j}}^t, \mathcal{G}_{j\bar{j}}^t$ и внутрикадровых ковариациях $V_{x\bar{j}l}^1 = Mx_j^1 x_{\bar{l}}^1$ начального кадра модель (1.1) полностью определяет в дискретном времени СП на n-мерной сетке J_t . Для того, чтобы убедиться в этом умножим левую и правую части (1.1) на $x_{\bar{l}}^t$ и найдем математические ожидания. После выполнения элементарных операций получим рекуррентную связь между тензорами внутрикадровых ковариаций $V_{x\bar{j}l}^t = M\{x_j^t x_{\bar{l}}^t\}$ и $V_{x\bar{j}l}^{t-1} = M\{x_j^{t-1} x_{\bar{l}}^{t-1}\}$ в виде:

$$V_{x\bar{j}l}^t = \rho_{j\bar{s}}^t V_{x\bar{s}q}^{t-1} \rho_{q\bar{l}}^t + v_{j\bar{s}}^t v_{s\bar{l}}^t \quad (1.2)$$

Аналогично, после умножения (1.1) на $x_{\bar{l}}^{t-1}$, находим следующее соотношение

$$V_{x\bar{j}l}^{t/t-1} = \rho_{j\bar{s}}^t V_{x\bar{s}l}^{t-1} \quad (1.3)$$

для определения тензоров $V_{x\bar{j}l}^{t/t-1} = M\{x_j^t x_{\bar{l}}^{t-1}\}$ межкадровых ковариаций.

В стационарном случае, когда $\rho_{j\bar{j}}^t = \rho_{j\bar{j}}$, $\mathcal{G}_{j\bar{j}}^t = \mathcal{G}_{j\bar{j}}$, все корни характеристического уравнения $\det(\lambda E - \rho)$ лежат внутри единичного круга и соответствующим образом выбран тензор $V_{x\bar{j}l}^1$ начальных условий, модель (1.1) порождает СП с постоянными значениями $V_{x\bar{j}l}^t = V_{x\bar{j}l}$ и $V_{x\bar{j}l}^{t/t-1} = V_{x\bar{j}l}^0$. При этом тензор внутрикадровых ковариаций $V_{x\bar{j}l}$ может быть

найден с помощью формулы (1.2), которая преобразуется в систему линейных уравнений

$$V_{x\bar{j}\bar{l}}^t - \rho_{j\bar{s}}^t V_{x\bar{s}q}^{t-1} \rho_{q\bar{l}}^t = v_{j\bar{s}}^t v_{s\bar{l}}^t. \quad (1.4)$$

После решения этой системы относительно $V_{x\bar{j}\bar{l}}$ легко находится тензор внутрикадровых ковариаций: $V_{x\bar{j}\bar{l}}^0 = \rho_{j\bar{s}}^0 V_{x\bar{s}\bar{l}}$.

Таким образом, при заданных параметрах модели (1.1) можно с помощью приведенных соотношений (2) ÷ (4) решить задачу анализа, т.е. задачи нахождения вероятностных характеристик гауссовского марковского СП $\{x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_t, t \in T\}$.

Рассмотрим теперь решение задачи синтеза модели (1.1), т.е. задачу нахождения тензоров $\rho_{j\bar{l}}^t$ и $\mathcal{G}_{j\bar{l}}^t$ при заданных тензорах внутрикадровых $V_{x\bar{j}\bar{l}}^t$ и межкадровых $V_{x\bar{j}\bar{l}}^{t/t-1}$ ковариаций. В этом случае (1.3) представляет собой систему линейных уравнений относительно неизвестных элементов тензора $\rho_{j\bar{l}}^t$. После решения этой системы каждый тензор $v_{j\bar{l}}^t, t \in T$ может быть найден с помощью представления симметричного тензора (1.2) в виде произведения $V_{x\bar{j}\bar{l}}^t - \rho_{j\bar{s}}^t V_{x\bar{s}q}^{t-1} \rho_{q\bar{l}}^t = v_{j\bar{s}}^t v_{s\bar{l}}^t$ на основе, например, ортогонализации Грама-Шмидта.

Рассмотрим некоторые частные, но важные для приложений случаи СП, порождаемых уравнением (1.1). Предположим, что стационарное СП имеет ковариационную функцию (КФ) следующего вида

$$R(k, \bar{j}, \bar{l}) = M\{x_{\bar{j}}^t x_{\bar{l}}^{t+k}\} = \rho^{|\bar{k}|} V_{x\bar{j}\bar{l}}, \quad (1.5)$$

где ρ – коэффициент корреляции между соответствующими элементами $x_{\bar{j}}^t$ и $x_{\bar{j}}^{t-1}$ двух соседних кадров СП. В этом случае $\rho_{j\bar{l}} = \rho$ и уравнение (1.1) переписывается в виде

$$x_{\bar{j}}^t = \rho x_{\bar{j}}^{t-1} + v_{\bar{j}\bar{l}} \xi_{\bar{l}}^t, \quad t \in T, \bar{j}, \bar{l} \in J_t. \quad (1.6)$$

Анализ (1.6) показывает, что очередной кадр СП $x_{\bar{j}}^t$ формируется на основе суммирования предыдущего кадра $\rho x_{\bar{j}}^{t-1}$ и возмущающего поля случайных величин $\eta_{\bar{j}} = \mathcal{G}_{\bar{j}\bar{l}} \xi_{\bar{l}}^t$. При этом КФ возмущающего поля $M\{\eta_{\bar{j}} \eta_{\bar{l}}\} = (1 - \rho^2) V_{\bar{x}\bar{j}\bar{l}}$ с точностью до множителя $(1 - \rho^2)$ совпадает с внутрикадровыми корреляциями СП $x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_t$. Таким образом, для решения задачи синтеза модели (1.6) достаточно найти коэффициенты $\mathcal{G}_{\bar{j}\bar{l}}^t$ линейной комбинации $\eta_{\bar{j}} = \sum_{\bar{l}} \mathcal{G}_{\bar{j}\bar{l}} \xi_{\bar{l}}^t$, обеспечивающие равенство КФ случайных полей $\eta_{\bar{j}}$ и $x_{\bar{j}}^t$.

Обобщением рассмотренной тензорной модели (1.1) служит нелинейное стохастическое разностное уравнение

$$x_{\bar{j}}^t = \varphi_{\bar{j}}^t(x_{\bar{l}}^{t-1}, \bar{l} \in J_{t-1}) + \mathcal{G}_{\bar{j}\bar{s}}^t(x_{\bar{s}}^{t-1}, \bar{s} \in J_{t-1}) \xi_{\bar{l}}^t, \quad t \in T, \bar{j}, \bar{l}, \bar{s} \in J_t, \quad (1.7)$$

позволяющее описать весьма широкий класс марковских негауссовских СП на n -мерных сетках J_t . Здесь $\{\xi_{\bar{l}}^t, \bar{l} \in J_t, t \in T\}$, поле независимых, вообще говоря, негауссовских случайных величин с известными ПРВ $W(\xi_{\bar{l}}^t)$; $\varphi_{\bar{j}}^t(x_{\bar{l}}^{t-1})$ и $\mathcal{G}_{\bar{j}\bar{s}}^t(x_{\bar{s}}^{t-1})$ - тензоры рангов n и $2n$ соответственно, в общем случае нелинейно зависящие от значений $\{x_{\bar{j}}^{t-1}, \bar{j} \in J\}$ $(t-1)$ -го кадра многомерного СП $\{x_{\bar{j}}^{t-1}, t \in T, \bar{j} \in J\}$. При известном распределении $W(\{x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_1\})$ первого кадра СП может быть записано совместное распределение

$$W(\{x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_t, t \in T\}) = W(\{x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_1\}) \prod_{t=2}^k W(\{x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_t \mid x_{\bar{j}}^{t-1}, \bar{j} \in J_{t-1}\}), \quad \text{где}$$

условные ПРВ $W(\{x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_t \mid x_{\bar{j}}^{t-1}, \bar{j} \in J_{t-1}\})$, $t = 2, 3, \dots, k, \dots$, находятся с

учетом (1.7) и обычных правил функционального преобразования $x_j^1 = \Phi(\xi_j^t, \bar{j} \in J_t)$ системы случайных величин $\xi_j^t, \bar{j} \in J_t$ с известным распределением.

К сожалению, попытки найти решение задачи синтеза модели (1.7) т.е. построения нелинейных функций φ_j^t и $\nu_{j\bar{j}}^t$ по заданным распределениям вероятностей $W(\{x^t\})$, приводят к положительным результатам лишь в отдельных частных случаях [11,12].

1.2. Каузальные модели изображений

При тензорном представлении СП предполагалось, что для каждого момента t дискретного времени СП $\{x_j^t, \bar{j} \in J\}$ формируется рекуррентно на основе предыдущего значения $\{x_j^{t-1}, \bar{j} \in J\}$ и “обновляющего” СП $\{\xi_j^t, \bar{j} \in J\}$ независимых случайных величин. Несмотря на то, что вычисления во времени осуществляются рекуррентно, при формировании каждого очередного кадра $\{x_j^t, \bar{j} \in J\}$ необходимо выполнять линейное (1.1) или нелинейное (1.7) преобразование всех элементов $\{x_j^{t-1}, \bar{j} \in J\}$, $\{\xi_j^t, \bar{j} \in J\}$ определенных на n -мерной пространственной сетке J .

Такое преобразование при большом числе m элементов области J даже для простейшей линейной модели (1.6) может потребовать значительного числа $m(m+1)$ операций умножения. Например, для имитации последовательности изменяющихся плоских изображений размером 100×100 элементов ($J = \{\bar{j} = (j_1 j_2) : 1 \leq j_1, j_2 \leq 100\}$) в соответствии (1.6) необходимо около 10^8 операций умножения при формировании

каждого очередного кадра изображения, т.е. 10^4 умножений на один элемент сформированного изображения. Заметим, что решение задач обработки СП, например тензорной фильтрации, потребует еще большего объема вычислений.

Таким образом, тензорные модели дают возможность описать широкий класс негауссовских и неоднородных СП, но приводят к значительным (по современным представлениям) вычислительным затратам при решении задач имитации и обработки СП. В связи с этим возникают вопросы о существовании рекуррентного не только по времени, но и по пространству, представления СП и возможности построения оптимальных и вместе с тем рекуррентных алгоритмов статистического анализа таких СП.

Рассмотрим задачу рекуррентного формирования СП $\{x_{\bar{j}} : \bar{j} = (j_1 j_2 \dots j_n) \in J\}$ на n -мерной прямоугольной сетке $J = \{\bar{j}, j_k = 1 \div M_k, k = 1, 2, \dots, n\}$. При этом предполагается, во-первых, существование некоторой процедуры последовательного перебора точек $\bar{j} \in J$, т.е. правила линейного упорядочения точек $\bar{j}, \bar{l} \in J$, на основе которого можно сказать, что элемент \bar{j} предшествует элементу \bar{l} ($\bar{j} < \bar{l}$). Во-вторых, должен быть задан алгоритм, определяющий, каким образом очередное значение СП $x_{\bar{j}}$ может быть найдено на основе ранее вычисленных значений $\{x_{\bar{l}}, \bar{l} \in G_{\bar{j}}\}$, где $G_{\bar{j}} \subset J$ - некоторая область индексов $\bar{l} \in J$, предшествующих очередному элементу \bar{j} . Такую область $G_{\bar{j}}$ конечных размеров обычно называют каузальным окном, каузальной маской, или областью локальных состояний [3, 11, 12]. Наконец, для формирования СП $\{x_{\bar{j}}, \bar{j} \in J\}$ с определенными вероятностными характеристиками на каждом шаге рекуррентных вычислений функция

$x_{\bar{j}} = \Phi(x_{\bar{l}}, \bar{l} \in G_{\bar{j}})$ должна включать в качестве аргумента совокупность $\{\xi_{\bar{l}}, \bar{l} \in Y_{\bar{j}}\}$, $Y_{\bar{j}} \subset J$ вспомогательных случайных величин.

Таким образом, представление СП на основе рекуррентной процедуры должно иметь следующий вид:

$$x_{\bar{j}} = \Phi_{\bar{j}}(x_{\bar{l}}, \bar{l} \in G_{\bar{j}}; \xi_{\bar{l}}, \bar{l} \in Y_{\bar{j}}), \quad (1.8)$$

где $G_{\bar{j}}$ – области элементов $\bar{l} \in J$, на которых уже определены предыдущие значения СП $\{x_{\bar{j}}\}$; $\varphi_{\bar{j}}(x_{\bar{l}}; \xi_{\bar{l}})$, $\bar{j}, \bar{l} \in J$, вообще говоря, нелинейные скалярные или векторные функции двух тензорных аргументов. Наиболее простым частным случаем (1.8) является линейное стохастическое уравнение

$$x_{\bar{j}} = \sum_{\bar{l} \in G_{\bar{j}}} \alpha_{\bar{j}, \bar{l}} x_{\bar{l}} + \sum_{\bar{l} \in Y_{\bar{j}}} \beta_{\bar{j}, \bar{l}} \xi_{\bar{l}}, \quad \bar{j} \in J, \quad (1.9)$$

с белым гауссовским СП $\{\xi_{\bar{j}}\}$, соответствующее известному уравнению авторегрессии – скользящего среднего для случайных последовательностей. Однако в отличие от своего одномерного аналога свойства СП $x_{\bar{j}}; \bar{j} \in J$, порождаемого (1.9), в настоящее время изучены не полностью даже для моделей с постоянными коэффициентами $\alpha_{\bar{j}, \bar{l}} = \alpha_{\bar{l}}$, $\beta_{\bar{j}, \bar{l}} = \beta_{\bar{l}}$ и неизменяющимся видом областей $G_{\bar{j}} = G$ и $Y_{\bar{j}} = Y$:

$$x_{\bar{j}} = \sum_{\bar{l} \in G} \alpha_{\bar{l}} x_{\bar{j}-\bar{l}} + \sum_{\bar{l} \in Y} \beta_{\bar{l}} \xi_{\bar{j}-\bar{l}}, \quad \bar{j} \in J. \quad (1.10)$$

Важным частным случаем (1.10) являются уравнения многомерной авторегрессии

$$x_{\bar{j}} = \sum_{\bar{l} \in G} \alpha_{\bar{l}} x_{\bar{j}-\bar{l}} + \xi_{\bar{j}}, \quad \bar{j} \in J. \quad (1.11)$$

Приведенные уравнения описывают алгоритм формирования СП $\{x_{\bar{j}}\}$ в точке $\bar{j} = (j_1 j_2 \dots j_n)$. При этом предполагается, что в нашем распоряжении имеются все значения $x_{\bar{j}-\bar{l}}, l \in G, \bar{j}-\bar{l} < \bar{j}$, СП, вычисленные на предыдущих шагах или заданные в качестве начальных условий. Именно такие процедуры будем называть пространственно рекуррентными. Заметим, что при белом поле $\{\xi_{\bar{j}}\}$ и конечных размерах области Y проблем хранения или рекуррентного формирования массива $\xi_{\bar{j}-\bar{l}}, l \in Y$, не возникает. Таким образом, возможности пространственных рекуррентных вычислений зависят от вида области локальных состояний G , порядка последовательного просмотра пространственной сетки J (правила развертки J в последовательность индексов) и соответствующих начальных условий.

Для иллюстрации рассмотрим двумерное СП $x_{\bar{j}}, \bar{j} = (j_1 j_2)$ на прямоугольной $(M \times M)$ сетке J (рис.2). На этом рисунке показана одна из возможных областей локальных состояний G , допускающих рекуррентные вычисления при последовательном, строка за строкой, формировании массива $x_{\bar{j}}$. Направление перемещения области G вдоль текущей строки указано стрелкой. Очередное значение СП $x_{\bar{j}}$ вычисляется в точке, отмеченной кружком, на основе ранее сформированных чисел $x_{\bar{l}}$ в точках $\bar{l} < \bar{j}$, которые обозначены вертикальными отрезками. Для вычислений вблизи границ должны быть заданы начальные условия, определяющие вероятностные характеристики СП в первом столбце и первой строке области J , а также способ вычисления элементов последнего столбца СП.

Описанная линейная развертка определяет порядок чередования индексов $(j_1, j_2) > (i_1, i_2)$, если $j_1 > i_1$, или $j_1 = i_1$ и $j_2 > i_2$, согласующийся с видом маски G , и обеспечивающий возможность рекуррентных

вычислений по формулам (1.8)-(1.11). Заметим, что для приведенной на рис.2 маски G существуют и другие способы развертки для рекуррентного формирования СП. Одним из них является развертка области J по строкам и диагоналям. В подобных ситуациях появляется возможность сравнения нескольких способов линейного упорядочения элементов $\bar{j} \in J$ и выбора лучшего из этих способов. Вместе с тем, можно привести такие примеры масок G_1 и G_2 , показанных на рис.2, для которых не существует ни одного способа построения развертки сетки J , обеспечивающего рекуррентное формирование СП.

Таким образом, при построчном сканировании на прямоугольной сетке J все множество масок, допускающих рекуррентные вычисления, может быть сведено к одной несимметричной полуплоскостной области G локальных состояний, представленной на рис.3. Но такую маску, а следовательно и любую каузальную область G , можно отобразить на области G одного квадранта (рис. 4) с помощью преобразования координат $j'_1 = j_1 + m_3 j_3, j'_2 = j_2$ [23]. На рис. 3 такое преобразование можно представить как изменение направления сканирования. Вместо сканирования по строкам и столбцам упорядочение элементов производится по строкам и диагоналям.

Итак, множество всех областей G , допускающих рекуррентные вычисления, сводится к области одного квадранта (рис.4).

Для того, чтобы уменьшить число слагаемых в (1.10), (1.11) и упростить анализ, введем векторные СП $\bar{x}_{\bar{j}} = (x_{1\bar{j}} x_{2\bar{j}} \dots x_{n\bar{j}})^T, \bar{j} \in J$. Выбирая в качестве компонент такого вектора значения СП $\{\bar{x}_{\bar{j}-\bar{i}}, \bar{i} \in G_0\}$, можно привести уравнение (1.10) с любой n -мерной маской G одного квадранта $Y \subset G$ к простейшему виду:

$$\bar{x}_{\bar{j}} = \sum_{k=1}^n A_k \bar{x}_{\bar{j}-\bar{i}_k} + \sum_{k=0}^n B_k \bar{x}_{\bar{j}-\bar{i}_k}, \bar{j} \in J, \quad (1.12)$$

где $\bar{i}_k = (0..010..0)$ – единичный вектор k -й координатной оси: $\bar{i}_0 = \bar{0}$; A_k и B_k – $N \times N$ матрицы. Соответственно уравнение (1.11) пространственной авторегрессии после введения векторных обозначений переписывается следующим образом [11,12]:

$$\bar{x}_{\bar{j}} = \sum_{k=1}^n A_k \bar{x}_{\bar{j}-\bar{i}_k} + B_0 \bar{\xi}_{\bar{j}}, \bar{j} \in J \quad (1.13).$$

Размерность N вектора $\bar{x}_{\bar{j}}$, необходимая для преобразования уравнения (1.10) в (1.12), определяется видом области G . В общем случае для перехода от модели (1.10) к минимальной форме (1.12) нужно ввести вектор $\bar{x}_{\bar{j}}$, компонентами которого являются величины $\{x_{\bar{j}-\bar{i}}, \bar{i} \in G_0\}$, где G_0 – такое множество индексов, что множества $G_k = \{\bar{i} - \bar{i}_k, \bar{i} \in G_0\}$, $k = 1, 2, \dots, n$ составляют покрытие множества G . При этом каждый элемент $x_{\bar{j}-\bar{i}}, \bar{i} \in G$, будет входить хотя бы в один из векторов $\bar{x}_{\bar{j}-\bar{i}_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, при соответствующем выборе матриц A_k , $k = 1, 2, \dots, n$, возможно представление (1.10) в виде (1.12).

Таким образом, любые стохастические разностные уравнения (1.10) или (1.11), допускающие рекуррентные по развертке вычисления на прямоугольной сетке J , могут быть с помощью преобразования координат и последующего введения векторного СП представлены в форме (1.12) или (1.13) с минимальным числом слагаемых.

Рассмотренные в п 2.1 стохастические разностные уравнения (1.10), (1.11) и эквивалентные им соотношения (1.12), (1.13) при заданных матричных коэффициентах B_0, A_k, B_k , $k = 1, 2, \dots, n$, дают полное описание линейных многомерных систем, находящихся под воздействием белого СП $\{\bar{\xi}_{\bar{j}}, \bar{j} \in J\}$. При заданных вероятностных характеристиках СП $\{\bar{\xi}_{\bar{j}}, \bar{j} \in J\}$ и начальных условиях формулы (1.12), (1.13) позволяют, в принципе,

рассчитать любые вероятностные характеристики СП $\{\bar{x}_{\bar{j}}, \bar{j} \in J\}$ или оценить их на основе статистического моделирования даже для случая неоднородных СП с изменяющимися $B_0 = B_0(\bar{j})$, $A_k = A_k(\bar{j})$, $B_k = B_k(\bar{j})$, $k = 1, 2, \dots, n$. Однако получить какие-либо общие рекомендации к построению моделей неоднородных СП вида (1.12), (1.13) не удастся из-за многообразия возможных видов определения матричных коэффициентов на n -мерной сетке J . В связи с этим ограничимся частным, но важным для приложений классом однородных СП $\{\bar{x}_{\bar{j}}, \bar{j} \in J\}$, для которых можно получить ряд полезных результатов.

Для однородного СП его КФ $R(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = M\{\bar{x}_{\bar{j}+\bar{r}_1} \bar{x}_{\bar{j}+\bar{r}_2}^T\}$ зависит только от разности аргументов $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$. Это позволяет после домножения уравнения (1.13) на $\bar{x}_{\bar{j}+\bar{r}}^T$ справа и определения математического ожидания получить следующее рекуррентное соотношение

$$R(\bar{r}) = M\{\bar{x}_{\bar{j}} \bar{x}_{\bar{j}+\bar{r}}^T\} = \sum_{k=1}^n A_k R(\bar{r} - \bar{i}_k), \bar{r} \neq \bar{0}, \quad (1.14)$$

где $\bar{i}_k = (0 \dots 010 \dots 0)$ - единичный вектор k -й координатной оси. При заданных начальных условиях в виде набора функций $\{R(\bar{r}), r_k = 0, k = 1, 2, \dots, n\}$ уравнение (1.14) позволяет последовательно рассчитать все другие значения $R(\bar{r})$.

Другой вариант расчета КФ может быть основан на методах спектрального анализа. Для этого выполним n -мерное z -преобразование СП (1.10). При этом нетрудно получить следующую связь

$$x(\bar{z}) = H(\bar{z})\xi(\bar{z})$$

между z -преобразованиями $x(\bar{z})$ и $\xi(\bar{z})$ СП $\bar{x}_{\bar{j}}$ и $\bar{\xi}_{\bar{j}}$, причем

$$H(\bar{z}) = \sum_{l \in Y} \beta_l \bar{z}^{-l} / (1 - \sum_{l \in G} \alpha_l \bar{z}^{-l}) \quad (1.15)$$

передаточная функция линейного фильтра (1.10); $\bar{z}^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1} \dots z_n^{-1}$. В этом случае спектральная плотность СП $x_{\bar{j}}$ может быть представлена в виде

$$f_x(\bar{z}) = H(\bar{z})f_\xi(\bar{z})H^+(\bar{z}), \quad (1.16)$$

где $f_\xi(\bar{z}) = \sigma_\xi^2 = 1$; $H^+(\bar{z}) = H^T(\bar{z}^{-1})$. Наконец, с помощью обратного z -преобразования находим КФ случайного поля $x_{\bar{j}}$:

$$R(\bar{r}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{c_n} f_x(\bar{z}) \bar{z}^{\bar{r}-1} d\bar{z},$$

где $d\bar{z} = dz_1 dz_2 \dots dz_n$; c_n - единичная полиокружность:
 $c_n = \{\bar{z} : |z_1| = 1, |z_2| = 1, \dots, |z_n| = 1\}$.

Для векторного представления (1.12) модели (1.10) изменится только формула для передаточной функции:

$$H(\bar{z}) = \left(E - \sum_{k=1}^n \bar{z}_k A_k \right)^{-1} \left(B_0 - \sum_{k=1}^n \bar{z}_k B_k \right).$$

Таким образом, представленные соотношения позволяют найти КФ однородных СП, порожденных рассмотренными стохастическими уравнениями (1.10) ÷ (1.13).

Рассмотрим в качестве примера двумерное СП, заданное одной из наиболее простых моделей

$$x_{j_1 j_2} = \alpha_{10} x_{(j_1-1)j_2} + \alpha_{01} x_{j_2(j_1-1)} + \alpha_{11} x_{(j_1-1)(j_2-1)} + \beta_0 \xi_{j_1 j_2}. \quad \text{В этом случае}$$

передаточная функция фильтра запишется в виде

$$H(z_1, z_2) = \frac{\beta_0}{(1 - \alpha_{10} z_1^{-1} - \alpha_{01} z_2^{-1} - \alpha_{11} z_1^{-1} z_2^{-1})} \quad (1.17)$$

и может быть легко найдена КФ для любых значений коэффициентов. Вместе с тем, для частного случая, когда $\alpha_{11} = -\alpha_{10}\alpha_{01}$, анализ СП упрощается. Действительно, передаточная функция (1.17) приводится к виду

$$H(z_1, z_2) = \frac{\beta_0}{(1 - \alpha_{10} z_1^{-1})(1 - \alpha_{01} z_1^{-1})},$$

т.е. может быть представлена в виде произведения $H(z_1, z_2) = H_1(z_1)H_2(z_2)$ передаточных функций $H_1(z_1)$ и $H_2(z_2)$, соответствующих одномерным линейным системам. При этом и КФ $R(r_1, r_2)$ также равна произведению $R(r_1, r_2) = R(r_1)R(r_2) = \sigma_x^2 \alpha_{10}^{r_1} \alpha_{01}^{r_2}$ КФ случайных последовательностей. Случайные поля дискретного аргумента, спектральные плотности которых могут быть факторизованы $f_x(\bar{z}) = \prod_{k=1}^n f_k(z_k)$, составляют наиболее простой объект для исследований.

Двумерное разделимое поле впервые было рассмотрено в работе [34]. В дальнейшем полученные результаты были существенным образом расширены и обобщены на СП произвольной размерности [12, 29]. Весьма важно, что применение этих результатов позволяет решить задачу синтеза модели, т.е. нахождения коэффициентов уравнений (1.10)÷(1.13) по заданным сечениям $R_k(r_k)$ КФ $R(\bar{r}) = \sigma_x^2 \prod_{k=1}^n R_k(r_k)$ вдоль соответствующих координатных осей j_1, j_2, \dots, j_n . Действительно, предположим, что существуют стохастические разностные уравнения авторегрессии - скользящего среднего

$$x_{j_k} = \sum_{s=1}^{M_k} a_{ks} x_{j_k-s} + \sum_{s=0}^{m_k} b_{ks} \xi_{j_k-s}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.18)$$

определяющие случайные последовательности с заданными нормированными КФ. Передаточные функции таких одномерных систем записываются в виде

$$H_k(z_k) = \frac{\sum_{s=0}^{m_k} b_{ks} z_k^{-s}}{1 - \sum_{s=1}^{M_k} a_{ks} z_k^{-s}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При этом передаточная функция n -мерного фильтра, определяющего СП с

КФ $R(\bar{r}) = \sigma_x^2 \prod_{k=1}^n R_k(r_k)$, может быть найдена как произведение

$$H(\bar{z}) = \prod_{k=1}^n H_k(z_k) = \prod_{k=1}^n \frac{\sum_{s=0}^{m_k} b_{ks} z_k^{-s}}{1 - \sum_{s=1}^{M_k} a_{ks} z_k^{-s}}.$$

С другой стороны, передаточная функция пространственного n -мерного фильтра (1.10) определяются соотношением (1.15). Приравнивания

коэффициенты $\beta_{\bar{l}}, \bar{l} \in Y, \left\{ \{b_{ks}\}_{s=0}^{m_k} \right\}_{k=1}^n$ числителей и коэффициенты

$\alpha_{\bar{j}}, \bar{j} \in G, \left\{ \{a_{ks}\}_{s=1}^{M_k} \right\}_{k=1}^n$ знаменателей при одинаковых степенях

$z_k, k = 1, 2, \dots, n$ в формулах (1.10) и (1.15), получаем набор необходимых

коэффициентов $\{\alpha_{\bar{l}}, \beta_{\bar{l}}\}$, полностью определяющих пространственный

фильтр (1.10) по одномерным прототипам. В работах [12, 29] приведены

конкретные примеры синтеза и анализа пространственных стохастических

разностных уравнений для разделимых СП.

Существенным недостатком рассмотренного метода построения моделей является значительное сужение класса СП. В частности, с КФ в

виде произведения $R(\bar{r}) = \sigma_x^2 \prod_{k=1}^n R_k(r_k)$ невозможно описать изотропные

СП с КФ $R(\bar{r}) = R(r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{n1}^2})$. Вместе с тем, при подборе

соответствующих одномерных стохастических уравнений удастся

получить приемлемые для приложений аппроксимации. Как показывает

анализ, для получения близких к изотропным СП целесообразно выбирать

уравнения (1.18) с кратными корнями соответствующих

характеристических уравнений $1 - \sum_{s=1}^{M_k} \alpha_{ks} z_k^{-s} = 0$. В качестве примера

рассмотрим формирование n -мерного разделимого СП на основе следующих одномерных авторегрессий

$$x_{j_k} = 2\rho_k x_{j_k-1} - \rho_k^2 x_{j_k-2} + \xi_{j_k}, k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.19)$$

характеристические уравнения $1 - 2\rho_k z_k^{-1} + \rho_k^2 z_k^{-2} = 0$ которых имеют корни $z_k^{-1} = \rho_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, кратности 2.

Известно [12], что нормированные КФ случайных последовательностей (1.19) могут быть записаны в виде

$$R_k(r_k) = (1 + g_k |r_k|) \rho_k^{|r_k|},$$

где $g_k = (1 - \rho_k^2)/(1 + \rho_k^2)$. Перемножая передаточные функции $H(z_k) = 1/(1 - 2\rho_k z_k^{-1} + \rho_k^2 z_k^{-2})$ одномерных систем (1.19), получаем передаточную функцию

$$H(\bar{z}) = \frac{\beta_n}{\prod_{k=1}^n (1 - \rho_k z_k)^2}, \quad (1.20)$$

соответствующую авторегрессионной пространственной модели (1.11). При этом передаточная функция (1.20) дает возможность построить модель вида (1.10), определяющую n -мерное СП с КФ

$$R(\bar{r}) = \sigma_x^2 \prod_{k=1}^n R_k(r_k) = \sigma_x^2 \prod_{k=1}^n (1 + g_k |r_k|) \rho_k^{|r_k|}.$$

Простой анализ полученной КФ на основе разложения в ряд Маклорена по степеням $\gamma_k = 1 - \rho_k$ показывает, что при $\gamma_k \ll 1$ сечения нормированной КФ $R_N(\bar{r}) = R(\bar{r})/\sigma_k^2$ близкого к единице уровня R_0 могут быть аппроксимированы гиперэллипсоидами

$$\sum_{k=1}^n \frac{r_k^2}{a_k^2} = 1$$

с полуосями $a_k = \sqrt{2(1 - R_0)}/\gamma_k$. При одинаковых параметрах $\rho_k = \rho$, $\gamma_k = \gamma = 1 - \rho$, $k = 1, 2, \dots, n$, таким сечением будет гиперсфера

$\sqrt{2(1-R_0)}/\gamma$. На рис. 5 приведены сечения КФ двумерного СП различных уровней. Как видно из рисунка, при больших уровнях корреляции сечения КФ близки к окружностям. Для иллюстрации на рис.6, а, б представлены две реализации различных двумерных СП в виде полутонных изображений. При этом на рис.6,а показано изображение, соответствующее СП с КФ $R(r_1, r_2) = \sigma_x^2 \rho_1^{|r_1|} \rho_2^{|r_2|}$, а на рис.6,б – реализация СП, порожденного моделью (1.19), (1.20). Сравнение этих изображений позволяет сделать вывод о приближении реализаций СП, полученных с помощью каузальных моделей с кратными корнями, к реализациям изотропных СП.

1.3 Авторегрессионные модели

Остановимся вначале на основных вероятностных характеристиках многомерных авторегрессионных моделей СП. Этот класс СП порождается линейными стохастическими разностными уравнениями следующего вида:

$$x_{\bar{i}} = \sum_{\bar{j} \in D} \alpha_{\bar{j}} x_{\bar{i}-\bar{j}} + \beta \xi_{\bar{i}}, \quad \bar{i} \in \Omega, \quad (1.21)$$

где $X = \{x_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$ – моделируемое СП, определенное на N -мерной сетке $\Omega = \{\bar{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N) : \{i_k = \overline{1 \dots M_k}\}, k = \overline{1 \dots N}\}$; $\{\alpha_{\bar{j}}, \beta, \bar{j} \in D\}$ – коэффициенты модели; $\Xi = \{\xi_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$ – порождающее белое СП; $D \subset \Omega$ – каузальная область локальных состояний.

Наиболее часто в качестве порождающего поля Ξ выбирают нормально распределенное СП с независимыми компонентами. В этом случае СП X также имеет гауссовское распределение.

Задача анализа моделей (1.21) в общем виде рассматривалась в [23, 64]. Модели (1.21) соответствует пространственный линейный фильтр с передаточной функцией

$$H(\bar{z}) = \frac{\beta}{1 - \sum_{\bar{j} \in D} \alpha_{\bar{j}} \bar{z}^{-\bar{j}}}, \quad (1.22)$$

где $\bar{z}^{-\bar{j}} = z_1^{-j_1} z_2^{-j_2} \dots z_N^{-j_N}$. При этом спектральная плотность СП X записывается следующим образом:

$$S_x(\bar{z}) = H(\bar{z}) S_{\xi}(\bar{z}) H(\bar{z}^{-1}) = \sigma_{\xi}^2 H(\bar{z}) H(\bar{z}^{-1}), \quad (1.23)$$

где σ_{ξ}^2 – дисперсия СП Ξ .

Корреляционная функция поля X может быть найдена с помощью обратного z -преобразования спектральной плотности:

$$R(\bar{r}) = \frac{\beta^2}{(2\pi i)^N} \oint_{C_N} S_x(\bar{z}) \bar{z}^{\bar{r}-1} d\bar{z}, \quad (1.24)$$

где $C_N = \{|\bar{z}| = 1\}$ – единичная полиокружность в многомерном комплексном пространстве.

Как показано в работах [46, 51, 52], анализ вероятностных свойств СП сильно упрощается, если их спектральная плотность может быть факторизована. Такие «разделимые» СП, со спектральной плотностью

$S_x(\bar{z}) = \prod_{k=1}^N S_k(z_k)$, представляют собой удобный объект для

исследований. Поскольку у таких полей передаточная функция

многомерного фильтра $H(\bar{z}) = \prod_{k=1}^N H_k(z_k)$ и КФ $R(\bar{r}) = \prod_{k=1}^N R_k(r_k)$ также

факторизуются, то для решения задачи статистического анализа многомерного СП достаточно исследовать свойства случайных

последовательностей, порожденных одномерными авторегрессиями с характеристиками $S_k(z_k)$, $H_k(z_k)$ и $R_k(r_k)$, $k = \overline{1 \dots M_k}$.

К недостаткам таких моделей следует отнести невозможность описания с их помощью изотропных СП, например, с КФ $R(\bar{r}) = R(\bar{r} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_N^2})$. Однако, как показывает анализ, подбором соответствующих одномерных моделей удается достичь вполне приемлемых аппроксимаций.

В работе [46] для получения близких к изотропным СП предложено выбирать одномерные фильтры с кратными корнями характеристических уравнений: $1 - \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{kj} \lambda_k^j = 0$, где $n_k, k = \overline{1 \dots M_k}$ – порядки одномерных авторегрессий.

В настоящей главе решаются задачи синтеза модели N -мерного СП с кратными корнями характеристических уравнений одномерных фильтров и анализа ее вероятностных свойств. Решим сначала эти задачи для одномерной модели.

Рассмотрим одномерную авторегрессию длины M :

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{i-j} + \beta \xi_i, \quad i = \overline{1 \dots M}. \quad (1.25)$$

Здесь $\{\xi_i\}$ – гауссовская последовательность независимых компонент с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ_ξ^2 . Решение задачи синтеза

будет заключаться в том, чтобы по заданным $\frac{1}{\rho}$ – корню

характеристического уравнения, n – его кратности и σ_x^2 – требуемой дисперсии поля определить неизвестные коэффициенты авторегрессии $\{\alpha_j, j = \overline{1 \dots n}; \beta\}$.

В случае с кратными корнями это уравнение можно записать в операторной форме следующим образом:

$$\left(1 - \rho z^{-1}\right)^n x_i = \beta \xi_i, \quad i = \overline{1 \dots M}, \quad (1.26)$$

где z^{-1} – оператор сдвига. Учитывая, что действие оператора сдвига на i -й элемент последовательности определяется как $z^{-k} x_i = x_{k-i}$, перепишем (1.26) в явном виде:

$$x_i = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} C_n^j \rho^j x_{i-j} + \beta \xi_i, \quad i = \overline{1 \dots M}. \quad (1.27)$$

Сравнение (1.26) и (1.27) дает возможность записать выражение для коэффициентов $\alpha_j = \alpha_j(\rho, n)$:

$$\alpha_j(\rho, n) = (-1)^{j+1} C_n^j \rho^j, \quad j = \overline{1 \dots n}. \quad (1.28)$$

Значение неизвестного параметра β , являющегося коэффициентом усиления в передаточной функции (1.22), должно выбираться так, чтобы фильтр был устойчив. Далее будет показано, как можно определить β на основе КФ модели.

Одной из задач статистического анализа модели, является получение ее КФ. Найдем вначале нормированную КФ, т.е. будем полагать $\sigma_x^2 = \sigma_\xi^2 = 1$. Для решения этой задачи воспользуемся формулой (1.24), записанной для одномерного случая

$$R(k) = \frac{\beta^2}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{z^{k-1}}{(z - \rho)^n (z^{-1} - \rho)^n} dz.$$

Так как подынтегральная функция имеет в точке $z = \rho$ полюс порядка n , то интеграл представляет собой коэффициент c_{-n} ее разложения в ряд Лорана, и поэтому может быть найден с использованием методов теории вычетов

$$R(k) = \beta^2 \operatorname{Res}_{\rho} \left[\frac{z^{k-1}}{(z-\rho)^n (z^{-1}-\rho)^n} \right] = \frac{\beta^2}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow \rho} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left\{ \frac{z^{n+k-1}}{(1-\rho z)^n} \right\}.$$

Используя правила дифференцирования произведения функций, после предельного перехода получаем

$$R(k) = \beta^2(\rho, n) \rho^k \sum_{\ell=0}^{n-1} g(n, \ell, k) \frac{\rho^{2(n-\ell-1)}}{(1-\rho^2)^{2n-\ell-1}}, \quad (1.29)$$

где

$$g(n, \ell, k) = \frac{(n+k-1)!(2n-\ell-2)!}{\ell!(n-1)!(n-\ell-1)!(n+k-\ell-1)!}, \quad (1.30)$$

а коэффициент $\beta = \beta(\rho, n)$ находится из условия $R(0) = 1$:

$$\beta^2(\rho, n) = \frac{(1-\rho^2)^{2n-1}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} (C_{n-1}^{\ell} \rho^{\ell})^2}. \quad (1.31)$$

Формулы (1.29) – (1.31) дают, при заданных ρ и n , общий вид нормированной КФ одномерной модели (1.25). Для того, чтобы получить КФ при не равных единице дисперсиях σ_x^2 и σ_{ξ}^2 , необходимо домножить правую часть (1.31) на $\sigma_x^2 / \sigma_{\xi}^2$. Тем самым, получаем выражение и для коэффициента β :

$$\beta = \frac{\sigma_x}{\sigma_{\xi}} \sqrt{\frac{(1-\rho^2)^{2n-1}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} (C_{n-1}^{\ell} \rho^{\ell})^2}}. \quad (1.32)$$

Формулы (1.28) и (1.32) полностью определяют неизвестные коэффициенты одномерной АР-модели (1.25) с кратными корнями характеристических уравнений.

Рассмотрим теперь случай N измерений. Модель СП, при заданной дисперсии σ_x^2 , полностью определяется вектором параметров

$(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)$ и вектором кратностей (n_1, n_2, \dots, n_N) характеристических корней.

Пусть многомерное разделимое СП порождается следующими АР-уравнениями, записанными в операторной форме:

$$\prod_{k=1}^N (1 - \rho_k z_k^{-1})^{n_k} x_{\bar{i}} = \beta \xi_{\bar{i}}, \quad \bar{i} \in \Omega, \quad (1.33)$$

где N – размерность поля; ρ_k и n_k – параметр и кратность корней модели вдоль k -й оси; Ω – сетка, на которой определено поле X .

Определим коэффициенты авторегрессии для многомерной модели с кратными корнями. Для этого раскроем в (1.33) скобки:

$$\left(\prod_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n_k} \alpha_{kl} z_k^{-l} \right) x_{\bar{i}} = \beta \xi_{\bar{i}},$$

$$\sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \dots \sum_{j_N=0}^{n_N} \alpha_{\bar{j}} x_{\bar{i}-\bar{j}} = \beta \xi_{\bar{i}}, \quad \bar{i} \in \Omega. \quad (1.34)$$

Шаблон коэффициентов модели $\{\alpha_{\bar{j}}, \bar{j} = (j_1, j_2, \dots, j_N), j_k = \overline{1 \dots n_k}\}$ определен на N -мерном параллелепипеде размера $(n_1 + 1) \times (n_2 + 1) \times \dots \times (n_N + 1)$. Из (1.33) и (1.34) следует, что коэффициенты $\alpha_{\bar{j}}$ являются произведениями соответствующих коэффициентов α_{kj_k} одномерных авторегрессий вдоль k -й оси:

$$\alpha_{\bar{j}} = \prod_{k=1}^N \alpha_{kj_k}, \quad (1.35)$$

где $\bar{j} = (j_1, j_2, \dots, j_N)$, $j_k = \overline{1 \dots n_k}$. Коэффициент β многомерной модели (1.34) находится аналогично:

$$\beta = \frac{\sigma_x}{\sigma_\xi} \prod_{k=1}^N \beta_k, \quad (1.36)$$

где β_k – соответствующий нормированный одномерный коэффициент.

Таким образом, выражение (1.34) дает общий вид АР-модели многомерного разделимого гауссовского СП, а формулы (1.35) и (1.36) полностью определяют ее коэффициенты, т.е. задача синтеза модели решена. КФ модели (1.34), как уже отмечалось, является произведением КФ соответствующих одномерных авторегрессий:

$$R(\bar{r}) = \prod_{k=1}^N R_k(r_k). \quad (1.37)$$

Для того, чтобы корни характеристического уравнения были действительными, необходимо, чтобы параметр ρ выбирался из диапазона от нуля до единицы.. Чем больше значение ρ , тем более крупные детали появляются на моделируемом изображении, т.е. этот параметр характеризует величину связи между соседними элементами.

Рассмотрим некоторые примеры. Хорошо изученная трехточечная модель Хабиби (1.5) является частным случаем 2-мерной модели (1.34) кратности (1,1), причем значение параметра ρ задает коэффициент корреляции соседних элементов. Легко видеть, что ее КФ, вычисленная по формулам (1.29), (1.37), совпадает с (1.26):

$$R(i, j) = \sigma_x^2 \rho_y^{|i|} \rho_x^{|j|}.$$

Для 2-мерной модели кратности (2,2) КФ записывается более сложно:

$$R(i, j) = \sigma_x^2 \rho_y^{|i|} \rho_x^{|j|} \left(1 + |i| \frac{1 - \rho_y^2}{1 + \rho_y^2} \right) \left(1 + |j| \frac{1 - \rho_x^2}{1 + \rho_x^2} \right),$$

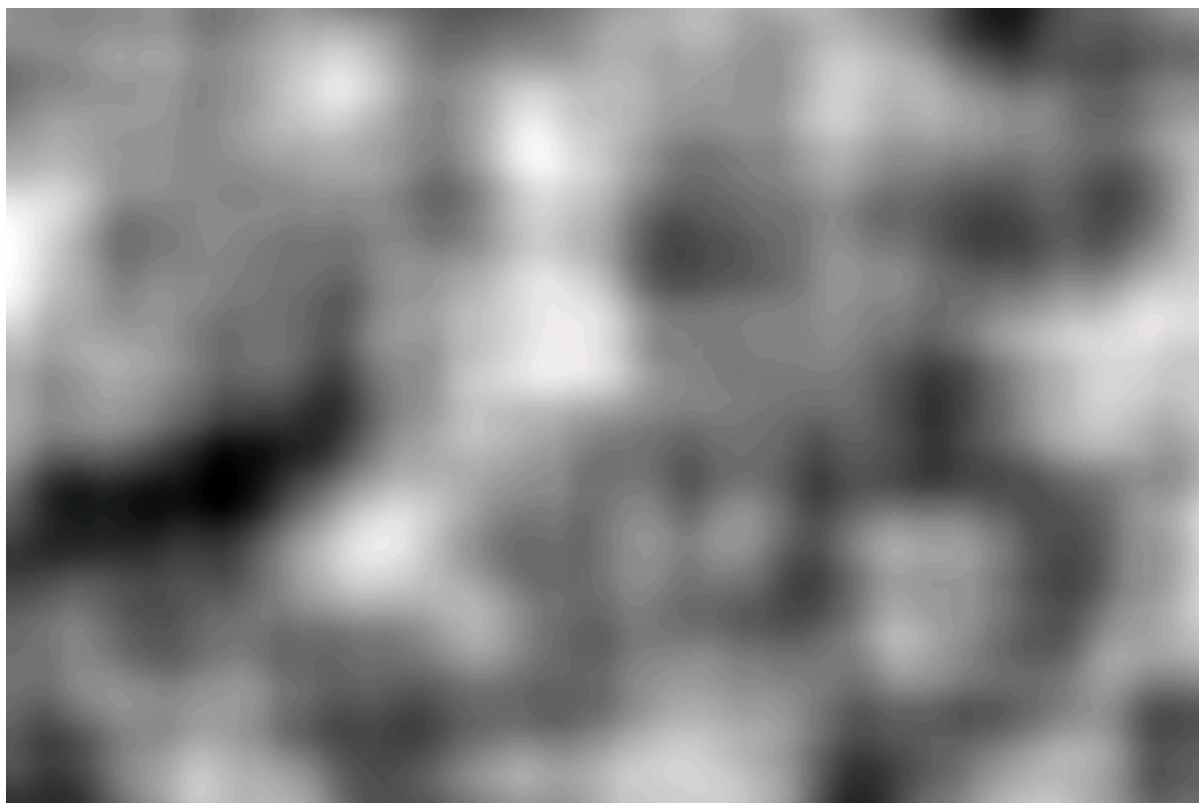
и также совпадает с (1.11), приведенной в первой главе. Вид коэффициентов, согласно (1.10), и рассчитанный по формулам (1.35), (1.36), также одинаков.

На рис. 2.1, 2.2 и 2.3 приведены кадры изображений размера 600x400 элементов на основе моделей с кратными корнями при различных

наборах параметров (первый параметр относится к оси y , второй – к оси x). Анализ приведенных и других результатов показывает, что, варьируя параметры связи и соотношения кратностей, можно получить широкий спектр разнотипных текстур, на основе которых возможно построение комплексных моделей многозональных изображений, причем, с ростом кратности корней, СП приближается по свойствам к изотропному. Это подтверждается также видом сечений равного уровня КФ, приведенных на рис. 2.4.

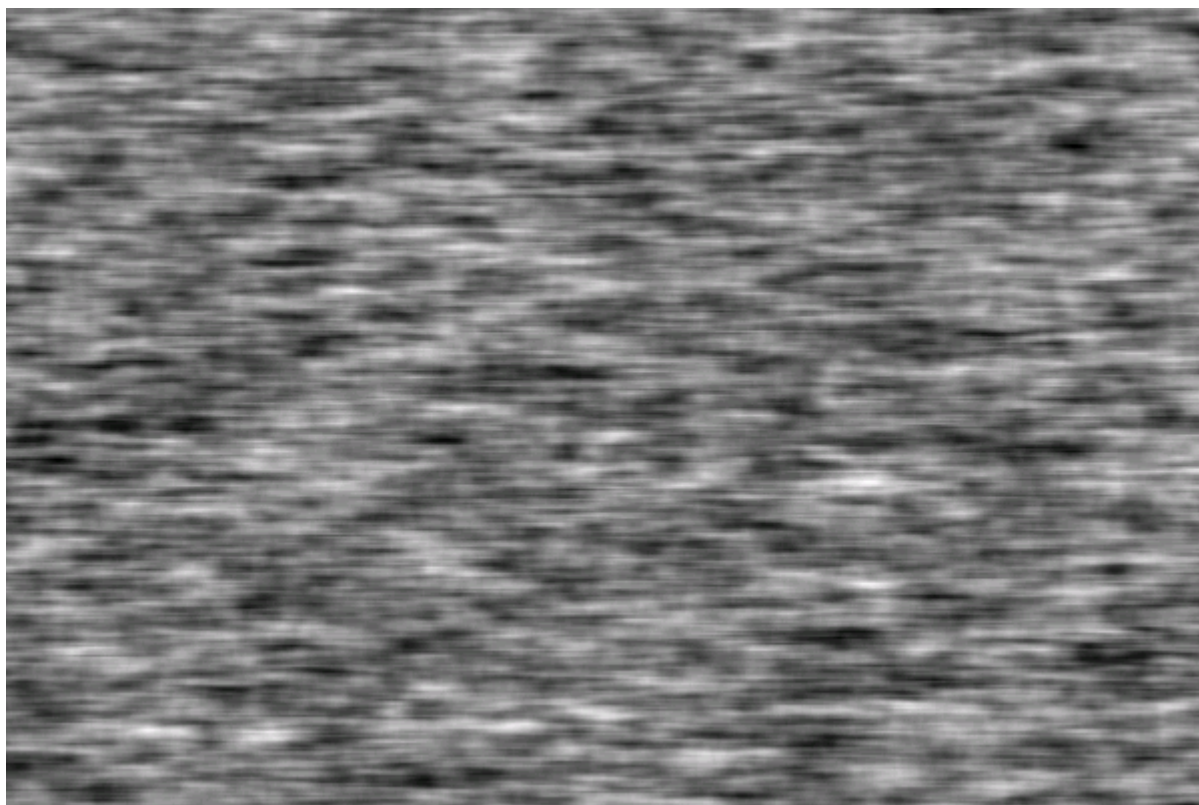


а) кратность (2,2), вектор параметров (0.95, 0.95)

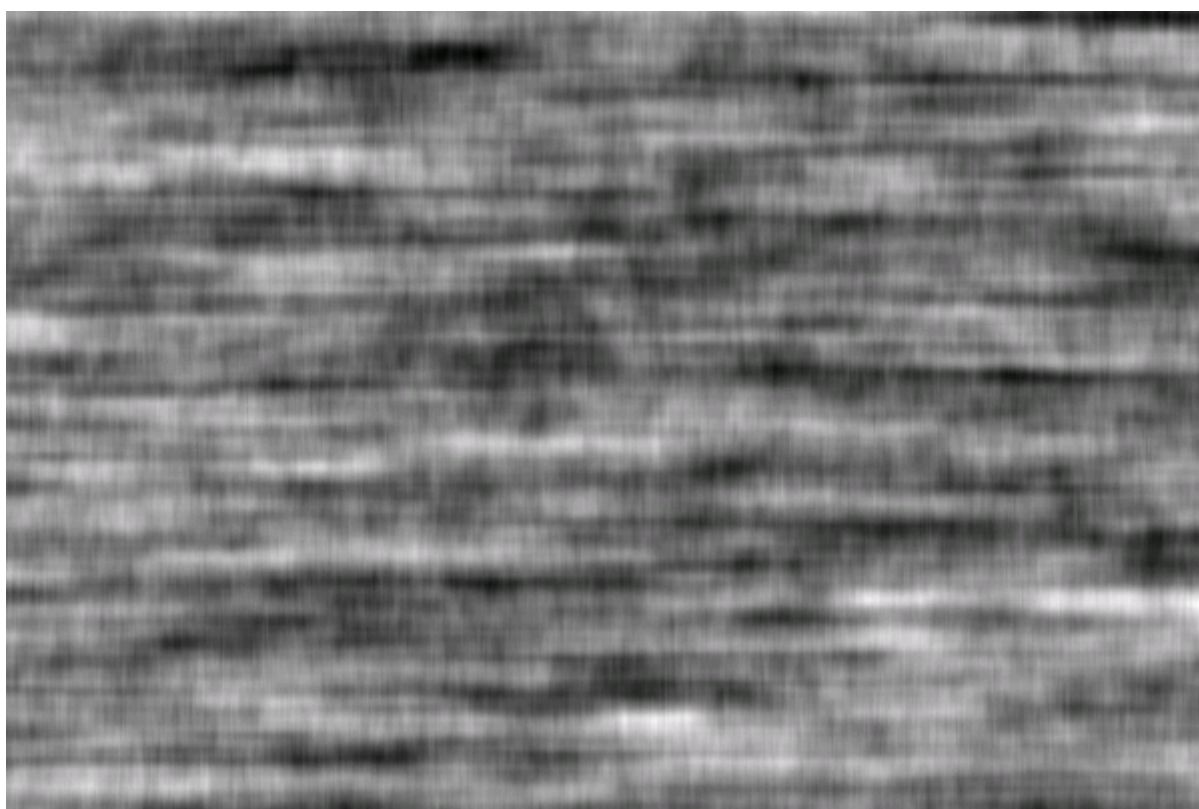


б) кратность (3,3), вектор параметров (0.95, 0.95)

Рис 1.1 Реализации случайных полей на основе авторегрессий с кратными корнями

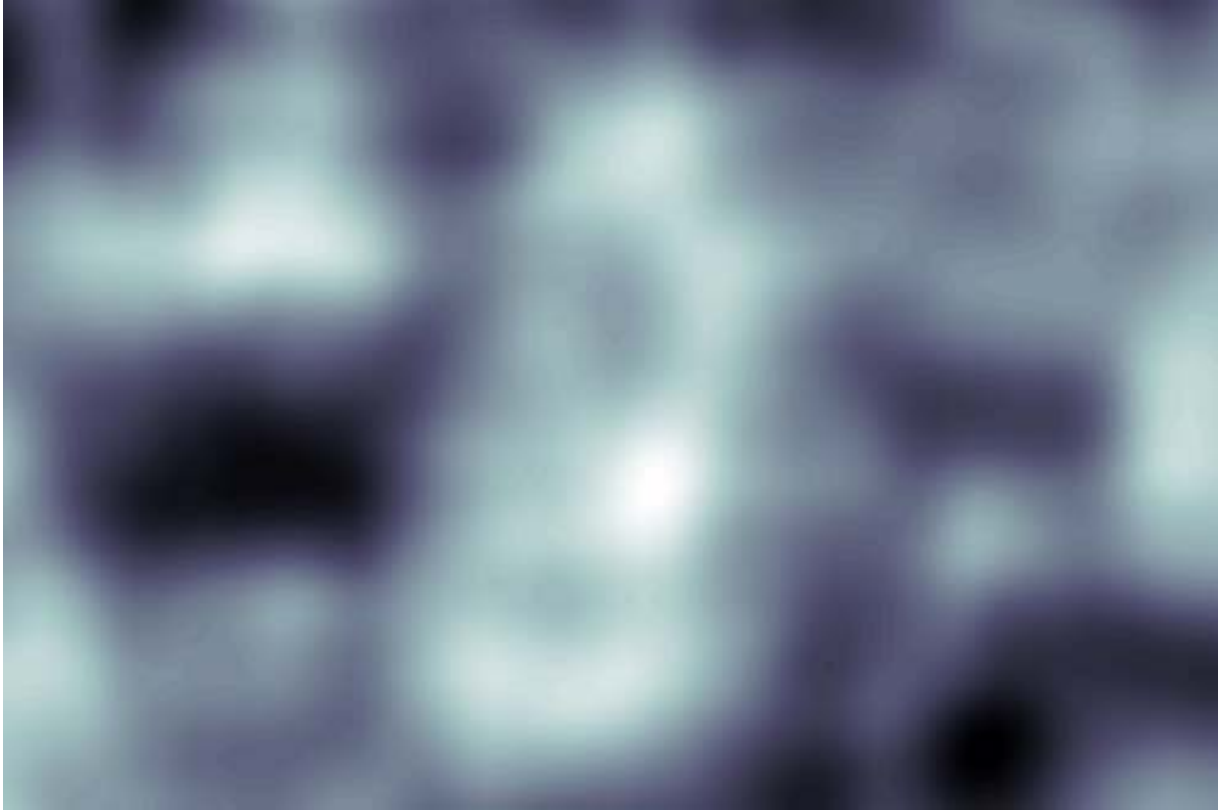


а) кратность (2,2) , вектор параметров (0.95, 0.6)



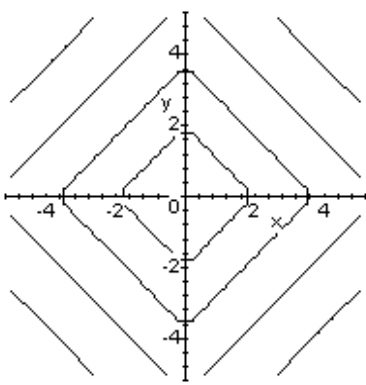
б) кратность (1,3) , вектор параметров (0.99, 0.7)

Рис 1.2 Реализации случайных полей на основе авторегрессий с кратными корнями

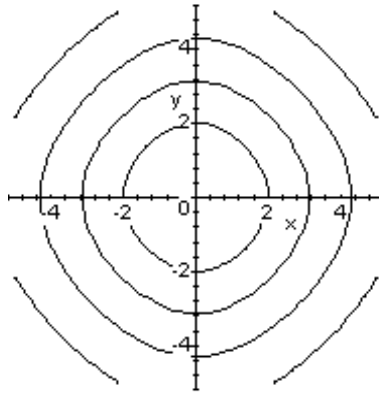


а) кратность (4,4) , вектор параметров (0.95,0.95)

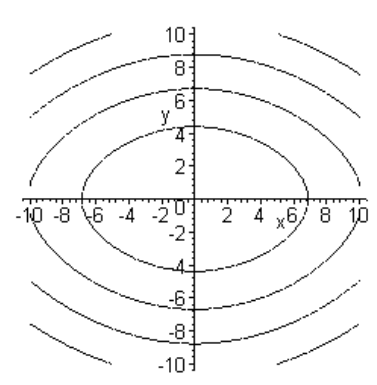
Рис 1.3 Реализации случайных полей на основе авторегрессий с кратными корнями



а) кратность (1, 1),
параметры (0.9, 0.9)



б) кратность (3, 3),
параметры (0.9, 0.9)



в) кратность (2, 3),
параметры (0.9, 0.9)

Рис 1.4 Сечения КФ двумерной модели с кратными корнями

Проведем оценку вычислительной сложности предложенной модели. Для получения реализации N -мерного СП, определенного на сетке размером $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_N$ элементов, требуется $O\left(\prod_{k=1}^N (n_k + 1)M_k\right)$ операций умножения.

Полезный во многих приложениях вариант модели многомерного СП можно получить, взяв за основу одномерную авторегрессию с кратными корнями. Пусть необходимо сформировать реализации N -мерного СП $X = \{x_{\bar{j}}, \bar{j} \in \Omega\}$ заданного на сетке $\Omega = \{\overline{(1, M_1)} \times \overline{(1, M_2)} \times \dots \times \overline{(1, M_N)}\}$. Это можно сделать следующим образом: вначале моделируется N одномерных АР последовательностей $\{\bar{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_{M_k}^k), k = 1 \dots N\}$ на основе модели с кратными корнями (1.27) ($\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ – вектор кратностей вдоль соответствующих осей). Далее, элемент $x_{\bar{j}}$ поля X получается перемножением соответствующих элементов одномерных последовательностей:

$$x_{\bar{j}} = \prod_{k=1}^N x_{j_k}^k, \quad \bar{j} = (j_1, j_2, \dots, j_N) \in \Omega \quad (1.38)$$

Найдем КФ данной модели. Домножим (1.38) на $x_{\bar{j}+\bar{s}}, \bar{j} + \bar{s} = (j_1 + s_1, j_2 + s_2, \dots, j_N + s_N)$ и найдем

$$M\{x_{\bar{j}}x_{\bar{j}+\bar{s}}\} = \prod_{k=1}^N M\{x_{j_k}^k x_{j_k+s_k}^k\} = \prod_{k=1}^N R^k(s_k). \quad (1.39)$$

Здесь $R^k(\cdot)$ – КФ (1.29) одномерной АР-модели вдоль k -й оси. Таким образом, данная модель является разделимой моделью СП, причем ее КФ совпадает с КФ N -мерной АР-модели с кратными корнями. Закон распределения вероятностей такого СП оказывается негауссовским и, в общем случае N , достаточно сложным. По видимому, именно из-за негауссовости СП и малых значений параметра ρ кадры обладают ярко

выраженной осевой структурой, что редко встречается на реальных изображениях (за исключением, может быть, аэрофотоснимков городов). Вместе с тем, предложенная модель отличается простотой и очень малыми вычислительными затратами ($O(M_1 \cdot \dots \cdot M_N)$ операций умножения). Пример реализации кадра размером 600×400 элементов на основе множительной модели (1.38) приведен на рис. 2.5. Действительно, даже для простейшего случая $N = 2$ одномерная плотность распределения вероятностей (ПРВ) СП находится как ПРВ произведения двух гауссовских СВ в виде [81]:

$$w(x_j) = \frac{1}{\sigma_x^4} K_0 \left(\frac{x_j}{\sigma_x^4} \right), \quad (1.30)$$

где $K_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя 3 рода 0-го порядка.

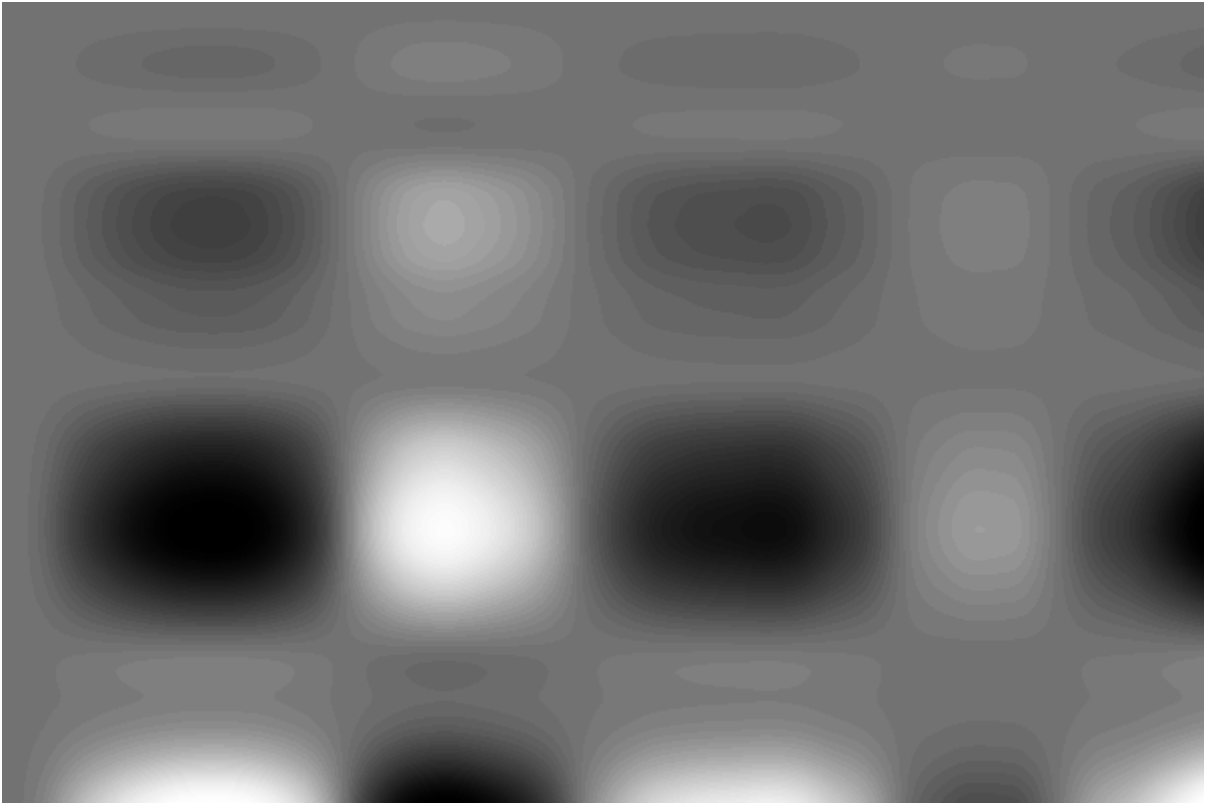


Рис. 1.5 Реализация множительной модели, кратность (4,4) , вектор параметров $(0.95, 0.95)$

Анализ КФ моделей с кратными корнями показывает, что сечения КФ СП, полученных с помощью разделимых многомерных моделей, с ростом кратности корней характеристических уравнений приближаются к гиперэллипсоидам. Для оценки приближенности таких СП к изотропным желательно иметь количественную оценку анизотропии поля. Для этого можно воспользоваться известным коэффициентом анизотропии двумерного СП [81]:

$$A = \frac{1}{\bar{S}} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S(\theta) - \bar{S})^2 d\theta}, \quad A \geq 0, \quad (1.41)$$

где $S(\theta)$ – спектральная плотность поля в направлении θ ,

$$\bar{S} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) d\theta - \text{"среднее значение" углового спектра.}$$

Коэффициент A имеет смысл среднеквадратического расстояния между $S(\theta)$ и $\bar{S}(\theta)$ и характеризует величину суммарного отклонения углового спектра от ее «среднего» значения. Недостатком данного метода оценки изотропности является предположение о том, что спектральная плотность поля $S(\theta)$ в полярных координатах $S(\theta)$ является функцией лишь одной переменной – направления θ , что верно лишь для изотропных полей. Другим недостатком является необходимость вычисления спектральной плотности в полярных координатах, что в рассматриваемом случае вызывает трудности для многих СП.

Поэтому представляется целесообразным характеризовать анизотропность многомерного СП на основе корреляционного расстояния τ в направлении \vec{u} :

$$\tau(\vec{u}) = \int_0^{+\infty} R(t\vec{u}) dt,$$

где $\vec{u} \in S^{N-1}$ – точка на гиперсфере. При этом предлагается следующий коэффициент анизотропии:

$$A_\tau = \frac{1}{\bar{\tau}} \sqrt{\frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{\vec{u} \in S^{N-1}} (\tau(\vec{u}) - \bar{\tau})^2 d\vec{u}}, \quad A \geq 0, \quad (1.42)$$

где $\bar{\tau} = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{\vec{u} \in S^{N-1}} \tau(\vec{u}) d\vec{u}$ – «среднее» угловое корреляционное расстояние;

$|S^{N-1}|$ – площадь поверхности гиперсферы.

Достоинствами предложенного коэффициента анизотропии является необходимость знания только КФ поля, и а также возможность его вычисления с применением стандартных численных методов. Значения A_τ , найденные с помощью полученной формулы, для модели (1.34) при $N = 2$, $\rho_y = \rho_x$ и различных соотношения кратностей приведены в табл. 1. Параметры ρ_y, ρ_x в случае различающихся кратностей выбирались, исходя из равенства корреляционных расстояний по обеим осям.

Анализ показывает, что значения коэффициента, близкие к нулю, говорят о высокой степени изотропности поля. Из приведенной таблицы видно, что с увеличением кратности корней модели, при условии соответствующего подбора параметров ρ_y, ρ_x , изотропность поля увеличивается. Наиболее близкие к изотропным реализации получаются при равных по обеим координатным осям кратностях. Как видно из рис. 2.4 и табл. 1, если зафиксировать кратность поля по одной из осей, и увеличивать кратность по другой оси, не изменяя параметров ρ_y, ρ_x , значения коэффициента A_τ растут.

Таблица 2.1

$n_y \backslash n_x$	1	2	3	4
1	0.1232	0.0861	0.0826	0.0772
2	0.0861	0.0443	0.0394	0.0331
3	0.0826	0.0394	0.0270	0.0249
4	0.0772	0.0331	0.0249	0.0194

Преимуществами данной методики оценки изотропности СП являются относительная простота вычисления, а также возможность ее применения на разнообразных выборках реальных данных.

На этапе применения описанных моделей к обработке реальных данных возникает задача идентификации параметров. Идентификация одномерных АР-моделей в общем случае описана в литературе, например в [6].

Будем исходить из предположения, что задано многомерное СП, являющееся реализацией некоторой separable АР-модели. Ставится задача определения параметров этой модели.

Рассмотрим предлагаемую методику оценивания параметров в двумерном случае. При этом обобщение на СП большей размерности принципиальных трудностей не вызывает. Пусть двумерное СП $\{x_{kl}\}$ описывается следующим АР уравнением:

$$\sum_{i=0}^{n_y} \sum_{j=0}^{n_x} \alpha_{ij} x_{k-i, l-j} = \beta_{kl} \xi_{kl}, \quad (1.43)$$

где $\{\xi_{kl}\}$ – стандартное порождающее СП. Для нахождения неизвестных коэффициентов α_{ij} , β_{kl} будем следовать основным правилам вывода системы Юла-Уокера для одномерных последовательностей.

Домножим (1.43) на $x_{k-s,l-t}$, $s = 0 \dots n_y$, $t = 0 \dots n_x$, $(s, t) \neq (0, 0)$

$$x_{k-s,l-t} \sum_{i=0}^{n_y} \sum_{j=0}^{n_x} \alpha_{ij} x_{k-i,l-j} = \beta_{kl} \xi_{kl} x_{k-s,l-t},$$

и найдем математическое ожидание:

$$\sum_{i=0}^{n_y} \sum_{j=0}^{n_x} \alpha_{ij} R(i-s, j-t) = 0, \begin{cases} s = 0 \dots n_y \\ t = 0 \dots n_x \\ (s, t) \neq (0, 0) \end{cases} \quad (1.44)$$

Полученное выражение представляет собой систему $(n_y + 1)(n_x + 1) - 1$ уравнений относительно неизвестных α_{ij} , причем $\alpha_{00} = 1$. Значения КФ $R(\cdot)$ находятся из экспериментальных данных.

Найдем коэффициенты β_{kl} . Для этого возведем (1.43) в квадрат и найдем математическое ожидание:

$$\left(\sum_{i=0}^{n_y} \sum_{j=0}^{n_x} \alpha_{ij} x_{k-i,l-j} \right) \left(\sum_{p=0}^{n_y} \sum_{q=0}^{n_x} \alpha_{pq} x_{k-p,l-q} \right) = \beta_{kl}^2 \xi_{kl}^2,$$

$$\sigma_x^2 \sum_{i=0}^{n_y} \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{p=0}^{n_y} \sum_{q=0}^{n_x} \alpha_{ij} \alpha_{pq} R(p-i, q-j) = \sigma_\xi^2 \beta_{kl}^2. \quad (1.45)$$

Система линейных уравнений (1.44), (1.45) позволяет найти неизвестные коэффициенты α_{ij} , β_{kl} и тем самым полностью определить коэффициенты модели.

Заметим, что для случая N измерений система (1.44), (1.45) уравнений для идентификации параметров модели запишется в виде:

$$\begin{cases} \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_N=0}^{n_N} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_N} \alpha_{s_1 s_2 \dots s_N} R(i_1 - s_1, i_2 - s_2, \dots, i_N - s_N) = 0, \\ s_i = 0 \dots n_i, \quad i = 1 \dots N; \quad \bar{s} \neq \bar{0} \end{cases} \quad (1.46)$$

$$\beta_{kl}^2 = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\xi^2} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_N} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_N} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_N} R(i_1 - j_1, i_2 - j_2, \dots, i_N - j_N). \quad (1.47)$$

Отметим, что для того, чтобы система (1.46), (1.47) имела решение, матрица системы должна быть неособенной.

Рассмотрим теперь модель с кратными корнями для двумерного СП. В этом случае

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \rho_y^i \rho_x^j C_{n_y}^i C_{n_x}^j,$$

и нам необходимо определить только четыре параметра – ρ_y , ρ_x , n_y и n_x .

Однако система (1.44), (1.45) для кратных корней становится нелинейной относительно неизвестных параметров и решение задачи идентификации требует другого подхода.

Для идентификации моделей с кратными корнями предлагается использовать двухэтапную процедуру, проводимую независимо по каждой из осей. На первом этапе необходимо определить кратности модели по всем осям. Решение задачи нахождения кратности, по существу, является задачей определения порядка авторегрессии. Эта задача может быть решена на основе методики определения порядка авторегрессии одномерной последовательности [11]. Пусть имеется случайная последовательность $\{x_i, i = 1 \dots N\}$ и известно, что она порождается одномерной АР-моделью

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{i-j} + \beta_i,$$

где β_i – последовательность независимых стандартных СВ.

В [11] показано, что, если отсчеты k -й разностной последовательности $\{\Delta_i^k = x_{i+1} - x_i, i = 1 \dots N - k\}$ некоррелированы, то порядок авторегрессии последовательности $\{x_i\}$ равен k . Методика заключается в последовательном вычислении разностей $\{\Delta_i^k\}$ и вычислении

их КФ. Как только последовательность перестает быть коррелированной, можно считать, что порядок авторегрессии определен. В случае модели с кратными корнями, знание порядка авторегрессии означает знание кратности модели. В [11] приведены примеры применения данной методики, основанные на принятии статистической гипотезы о некоррелированности отсчетов случайной последовательности.

На втором этапе процедуры производится определение значения параметра ρ . Для этого можно воспользоваться формулой (1.28), из

которой следует, что $\alpha_i = (-1)^{i+1} C_n^i \rho^i$, $i = 1, 2, \dots, n$, или $\rho = \sqrt[i]{\frac{\alpha_i}{(-1)^{i+1} C_n^i}}$.

Значения коэффициентов α_i могут быть получены на основе выборочных значений КФ, как решение системы Юла-Уокера. Для повышения достоверности можно повторить процедуру для всех значений α_i , $i = \overline{1..n}$, и на основе полученных оценок выбрать наилучшее значение параметра ρ .

Эксперименты показывают, что описанная процедура идентификации обеспечивает приемлемую точность оценки параметров. Так, для различных реализаций модели с кратными корнями ошибка оценки параметра ρ составляла в среднем 5-10%.

Таким образом, применив изложенную методику по каждой из осей, получим полностью идентифицированную многомерную модель СП с кратными корнями.

2. Обнаружение аномалий на фоне мешающих изображений

2.1. Оптимальные алгоритмы обнаружения сигналов

Во многих приложениях возникает задача обнаружения аномалий, которые могут появиться на очередном многомерном кадре последовательности изображений. Такими аномалиями могут быть, например, очаги лесных пожаров, патологические изменения на медицинских изображениях, новые объекты в охраняемой зоне и др. При этом задача обнаружения формализуется следующим образом, Пусть производятся наблюдения

$$z_{\bar{j}}^t = x_{\bar{j}}^t(\bar{\chi}_t) + \theta_{\bar{j}}^t, \quad \bar{j} \in J_t, \quad t = 1, 2, \dots, k, \quad (2.1)$$

СП $x_{\bar{j}}^t$ с пространственно-временными корреляционными связями и СП $\theta_{\bar{j}}^t$ независимых случайных величин с нулевыми средними и дисперсиями V_{θ} . Вектор параметров $\bar{\chi}_t$ позволяет учесть, например, возможные взаимные пространственные смещения и повороты соседних кадров изображения.

Появление детерминированного сигнала приводит к изменению модели (2.1) лишь в области индексов $\bar{j} \in G \subset J$ (рис. 1) последнего из наблюдаемых кадров:

$$z_{\bar{j}}^k = s_{\bar{j}} + x_{\bar{j}}^k(\bar{x}_t) + \theta_{\bar{j}}^k, \quad \bar{j} \in G, \quad (2.2)$$

где $\{s_{\bar{j}}, \bar{j} \in G\}$ - совокупность отсчетов полезного сигнала.

В рассмотренных условиях необходимо найти правило проверки гипотезы H_0 об отсутствии аномалии в области G при альтернативном предположении H_1 о справедливости модели (2.2).

При заданных вероятностных характеристиках компонент моделей (2.1), (2.2) могут быть определены соответствующие условные плотности распределения вероятностей (ПРВ) наблюдений $W(Z|H_0)$ и $W(Z|H_1)$.

Поэтому для решения задачи обнаружения следует воспользоваться сравнением с пороговым уровнем Λ_0 отношения правдоподобия (ОП):

$$\Lambda = \frac{W(Z | H_1)}{W(Z | H_0)} \begin{cases} \geq \Lambda_0 - \text{сигнал есть,} \\ < \Lambda_0 - \text{сигнала нет.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Для упрощения вычислений представим условные ПРВ в виде произведений: $W(Z | H_{0,1}) = W(Z_0 | H_{0,1})W(Z_G | Z_0, H_{0,1})$, где Z_G - совокупность наблюдений по области G ; Z_0 - совокупность всех наблюдений, не принадлежащих области предполагаемого сигнала. Поскольку $W(Z_0 | H_0) = W(Z_0 | H_1)$, ОП (2.3) переписывается в форме:

$$\Lambda = \frac{W(Z_G | Z_0, H_1)}{W(Z_G | Z_0, H_0)}. \quad (2.4)$$

Будем аппроксимировать условные ПРВ, входящие в ОП (2.4), гауссовскими распределениями:

$$W(Z_G | Z_0, H_{0,1}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det V_{0,1}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|z^k - m_{0,1}\|_{V_{0,1}^{-1}}^2\right),$$

где $m_0 = \{m_{0\bar{j}}\}$, $V_0 = \{V_{0\bar{j}\bar{j}}\}$ и $m_1 = \{m_{1\bar{j}}\}$, $V_1 = \{V_{1\bar{j}\bar{j}}\}$, $\bar{i}, \bar{j} \in G$ - условные математические ожидания и пространственные ковариационные матрицы наблюдений Z_G при отсутствии и наличии полезного сигнала соответственно.

С учетом моделей наблюдений (2.1), (2.2) нетрудно получить следующие формулы для условных средних $m_{0\bar{j}} = \hat{x}_{\bar{j}}^k$, $m_{1\bar{j}} = s_{\bar{j}} + x_{\bar{j}}^k$, $\bar{j} \in G$, где $\hat{x}_{\bar{j}}^k = M\{x_{\bar{j}}^k | Z_0\}$ - оптимальный прогноз значений СП $x_{\bar{j}}^k$, $\bar{j} \in G$, построенный на основе всех имеющихся наблюдений Z_0 , не принадлежащих области сигнала. Пространственные матрицы V_0 и V_1 оказываются одинаковыми: $V_0 = V_1 = V = P_s + V_\theta$, где P_s - ковариационная матрица ошибок оптимального прогноза.

После подстановки приведенных соотношений в (2.4), (2.5) и логарифмирования находим следующий алгоритм обнаружения сигнала:

$$L = \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in G} s_{\bar{j}} V_{\bar{i}\bar{j}}^{-1} (z_{\bar{j}}^t - \hat{x}_{\bar{e}\bar{j}}^t) \begin{cases} \geq \Lambda_0 - \text{сигнал есть,} \\ < \Lambda_0 - \text{сигнала нет.} \end{cases} \quad (2.6)$$

где $\lambda = \ln \Lambda_0 + 0,5 \left\| s_{\bar{j}} \right\|_{V^{-1}}^2$ - порог обнаружения. Как следует из формулы (2.6), процедура обнаружения аномалий включает в себя компенсацию мешающих изображений с помощью вычитания из наблюдения $z_{\bar{j}}^k$ оптимального прогноза $\hat{x}_{\bar{e}\bar{j}}^k$, найденного на основе всех наблюдений, не принадлежащих области G . После компенсации мешающих СП осуществляется линейное весовое суммирование остатков $D = z_{\bar{j}}^k - \hat{x}_{\bar{e}\bar{j}}^k$

Применяя формулу Фробениуса обращения блочных матриц, можно показать, что статистика приводиться к эквивалентному виду:

$$L = \sum_{\bar{j} \in G} s_{\bar{j}} V_{\bar{j}}^{-1} (z_{\bar{j}}^k - \hat{x}_{\bar{i}\bar{j}}^k) = \sum_{\bar{j} \in G} c_{\bar{j}} (z_{\bar{j}}^k - \hat{x}_{\bar{i}\bar{j}}^k),$$

где $\hat{x}_{\bar{i}\bar{j}}^k = M \{ x_{\bar{j}}^k \mid Z_{\bar{j}} = Z \mid z_{\bar{j}}^k \}$, - оптимальный прогноз значения $x_{\bar{j}}^k$, построенный на основе всех имеющихся наблюдений, кроме $z_{\bar{j}}^k$; $V_{\bar{j}}$ - дисперсия ошибки этого прогноза. В отличие от $\hat{x}_{\bar{e}\bar{j}}^k$ будем называть $\hat{x}_{\bar{i}\bar{j}}^k$ "прогнозом в точку". При обнаружении аномалий во всевозможных областях G с большим числом элементов "прогноз в точку" может быть найден с помощью значительно меньшего числа вычислительных операций, чем "прогноз в область" $\hat{x}_{\bar{e}\bar{j}}^k$.

Еще одна форма записи оптимальной процедуры обнаружения может быть получена в предположении, что полезный сигнал может занимать все имеющиеся кадры изображения, т.е. область G включает все многомерные

сетки J_1, J_2, \dots, J_t . Тогда наилучший прогноз $x_{\bar{j}}^k \equiv 0, \bar{j} \in G$, и алгоритм (2.6) принимает вид:

$$L = \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in G} s_{\bar{i}} V_{\bar{i}\bar{j}}^{-1} z_{\bar{j}}^k \begin{cases} \geq \Lambda_0 - \text{сигнал есть,} \\ < \Lambda_0 - \text{сигнала нет.} \end{cases} \quad (2.8)$$

где $V_{\bar{i}\bar{j}} = V_{x\bar{i}\bar{j}} + V_{\theta} E_{\bar{i}\bar{j}}$; $V_{x\bar{i}\bar{j}}, \bar{i}, \bar{j} \in G$ - ковариационная матрица мешающего изображения.

Непосредственная реализация процедуры (2.8) затруднительна из-за большого числа вычислительных операций. Тем не менее, раскладывая пространственную симметрическую матрицу в произведение двух треугольных $V_{\bar{i}\bar{j}}^{-1} = A_{\bar{i}\bar{v}} A_{\bar{v}\bar{j}}$, $\bar{i}, \bar{v}, \bar{j} \in G$, можно представить (2.8) в форме

$$L = \sum_{\bar{i}, \bar{j}, \bar{v} \in G} s_{\bar{i}} A_{\bar{i}\bar{v}} A_{\bar{v}\bar{j}} z_{\bar{j}}^t \begin{cases} \geq \Lambda_0 - \text{сигнал есть,} \\ < \Lambda_0 - \text{сигнала нет.} \end{cases} \quad (2.9)$$

соответствующий предварительному "выбеливанию" [2,10,24] последовательности изображений $z_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in G$, и последующему весовому суммированию с весами $s_{\bar{i}} A_{\bar{i}\bar{v}}$. Во многих случаях такой подход позволяет найти приемлемые для практики квазиоптимальные алгоритмы "выбеливания" [26, 27]. При этом самостоятельное рассмотрение адаптивных рекурсивных фильтров, близких по свойствам к выбеливающим, является важным направлением поиска возможностей относительно простой технической или программной реализации системы обработки последовательностей изображений. Новым качеством, которым обладают алгоритмы (2.7), (2.8) и (2.9) по отношению к (2.6), является разделение трудоемкой операции оптимального прогнозирования или выбеливания, не связанной с формой сигнала, и относительно простого весового суммирования, учитывающего вид полезного сигнала. Это позволяет достаточно просто решать как задачи обнаружения аномалий с неизвестными параметрами положения, так и более сложные проблемы

многоальтернативного обнаружения (распознавания) нескольких видов сигналов [19-21].

Приведенные результаты позволяют уточнить условия, при которых справедлива предложенная замена условных ПРВ нормальными распределениями. Прежде всего, это широкий класс с гауссовскими моделями (2.1), (2.2). В этих случаях процедуры (2.6), (2.7), (2.9) строго оптимальны. При негауссовских компонентах моделей (2.1), (2.2) достаточным условием оптимальности служит возможность аппроксимации апостериорной ПРВ прогноза $x_{\bar{j}}^k$ нормальным распределением. Заметим, что последнее условие выполняется и во многих прикладных задачах обработки СП со значительными пространственно-временными корреляционными связями и обычно эквивалентно условию высокой апостериорной точности прогнозирования.

2.2. Эффективность обнаружения аномалий

На основе синтезированных оптимальных алгоритмов обнаружения аномалий могут быть построены относительно простые квазиоптимальные решающие правила, использующие только часть имеющихся наблюдений, различные методы прогнозирования или декорреляции. В этих случаях, а также при исследовании потенциальных возможностей реальных систем обнаружения возникает задача расчета характеристик оптимальных алгоритмов.

При гауссовской аппроксимации условные распределения статистик (2.6)÷(2.9) будут также гауссовскими. Поэтому для расчета эффективности обнаружения аномалий достаточно найти условные моменты статистики

(2.6): $M\{L/H_0\} = 0; M\{L/H_1\} = S_{\bar{e}} V_{\bar{j}\bar{e}}^{-1} S_{\bar{j}}, \sigma_L^2 = S_{\bar{e}} V_{\bar{j}\bar{e}}^{-1} - S_{\bar{j}}$. Таким образом, при заданной квантили x_F уровня P_F нормального распределения может быть определен порог обнаружения $\lambda = x_F \sigma_L$ и вероятность правильного обнаружения

$$P_D = 0,5 + \Phi_0(\Delta_D - x_F), \quad (2.10)$$

где $\Delta_D = \sqrt{S_{\bar{e}} V_{\bar{j}\bar{e}}^{-1} S_{\bar{j}}}$, $\bar{j}, \bar{e} \in G$; $\Phi_0(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^x \exp(-z^2/2) dz$.

Можно показать, что существует простая связь между пространственными ковариационными матрицами $P_{\bar{j}\bar{e}}$ ошибок оптимального прогнозирования и $P_{\bar{j}\bar{e}} = M\{(x_{\bar{j}}^t - \hat{x}_{\bar{j}}^t)(x_{\bar{e}}^t - \hat{x}_{\bar{e}}^t)\}$ ошибок оптимального линейного оценивания $\hat{x}_{\bar{j}}^t = \hat{x}_{\bar{j}}^t(Z)$. Действительно, анализируя уравнения Винера-Хопфа для многомерного дискретного СП [13, 19], получим следующее соотношение

$$P_{\bar{j}\bar{e}} = (E_{\bar{j}\bar{q}} - P_{\bar{j}\bar{v}} V_{\bar{v}\bar{q}}^{-1})^{-1} P_{\bar{q}\bar{e}},$$

где $V_{\bar{v}\bar{q}} = \sigma_\theta^2 E_{\bar{v}\bar{q}}$. Подставляя найденную связь между матрицами в (2.10), находим полезную формулу для расчета эффективности обнаружения сигналов:

$$\Delta_D = \sqrt{S_{\bar{e}} V_\theta^{-1} (E_{\bar{e}\bar{j}} - V_\theta^{-1} P_{\bar{e}\bar{j}}) S_{\bar{j}}}. \quad (2.11)$$

При отсутствии мешающих изображений $x_{\bar{j}}$ или точном их оценивании $P_{\bar{e}\bar{j}} = 0$ и тогда эффективность обнаружения детерминированного на фоне белого шума определяется известным отношением сигнал/шум $\Delta_D = \sqrt{\sum_{\bar{j} \in G} S_{\bar{j}}^2 / V_\theta}$. Появление помех $x_{\bar{j}}^t$ с пространственно-временной корреляцией приводит к снижению эффективности обнаружения, мерой которого служит ненулевая ковариационная матрица оптимального оценивания СП $x_{\bar{j}}^t$ на фоне белого шума $\theta_{\bar{j}}^t$, $\bar{j} \in J$.

Рассмотрим два важных примера расчета потенциальной эффективности обнаружения точечных аномалий.

Предположим, что осуществляется обнаружение точечного сигнала $s_{\bar{j}} = s_0$, занимающего один элемент G сетки J_t . В этом случае

$$\Delta_D = \sqrt{Q(1 - \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\theta^2)},$$

где $Q = s_0^2 / \sigma_\theta^2$ - отношение сигнал / шум; σ_ε^2 - дисперсия ошибки при оптимальном оценивании одного элемента СП $x_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in G$, на основе всех имеющихся наблюдений $z_{\bar{j}}^t, \bar{j} \in J_t, t \in T$. Величины дисперсии ошибки σ_ε^2 может быть найдена с помощью известных методов теории оптимального оценивания СП, наблюдаемых на фоне помех [3, 13, 14, 19]. В следующей части настоящей статьи будут рассмотрены также простые и компактные соотношения, позволяющие рассчитать σ_ε^2 и, следовательно, характеристики оптимального обнаружения для СП любой размерности.

Рассмотрим теперь более сложную задачу обнаружения точечного объекта по результатам наблюдения совокупности M_3 изображений размером $M_1 \times M_2$ элементов (рис.7). Такая задача возникает, в частности, при многозональных наблюдениях одного и того же объекта с помощью различных систем, функционирующих, например, в различных спектральных диапазонах [2-5, 13]. В этом случае модель наблюдений (2.1) запишется в виде

$$z_{\bar{j}} = x_{\bar{j}} + \theta_{\bar{j}}, \bar{j} = (j_1, j_2, j_3); j_k = \overline{1, M_k}.$$

Будем полагать, что массивы данных $z_{\bar{j}}, j_3 = \overline{1, M_3}$, пространственно совмещены и поэтому появление полезного сигнала приводит к увеличению уровня СП на величину s_0 в одном и том же элементе с номером (j_1^0, j_2^0) каждого кадра изображения (рис.7). Ковариационную функцию мешающих изображений представим в форме

$$R_x(m_1, m_2, m_3) = M \left\{ x_{j_1, j_2, j_3} x_{(j_1+m_1), (j_2+m_2), (j_3+m_3)} \right\} = R_1(m_1, m_2) \rho^{l(m_3)},$$

где $R_1(m_1, m_2) = R_x(m_1, m_2, m_3 = 0)$ одна и та же ковариационная функция каждого из M_3 кадров изображения; $l(m_3) = 1$, если $m_3 \neq 0$, и $l(m_3 = 0) = 0$. Заметим, что такое представление означает равенство корреляционных расстояний между любой парой из M_3 анализируемых кадров изображений. После несложных, но довольно трудоемких вычислений можно показать, что формула (2.11) для рассматриваемой задачи преобразуется к виду:

$$\Delta_D = \sqrt{M_3} Q \sqrt{1 - F_R(\bar{0}) \left\{ \frac{(1 + (M_3 - 1)\rho) G_1(\omega_1, \omega_2)}{\sigma_\theta^2 + (1 + (M_3 - 1)\rho) G_1(\omega_1, \omega_2)} \right\}},$$

где $Q = s_0 / \sigma_\theta^2$; $G_1(\omega_1, \omega_2) = F\{R_1(\omega_1, \omega_2)\}$; $F(\omega_1, \omega_2)\{\cdot\}$ и $F_R(m_1, m_2)\{\cdot\}$ - прямое и обратное двумерное дискретное преобразование Фурье; $F_R(\bar{0})\{\cdot\} = F_R(m_1 = 0, m_2 = 0)\{\cdot\}$.

Анализ полученного соотношения позволяет сделать следующие важные выводы относительно эффективности оптимального обнаружения точечных аномалий на произвольном числе одновременно обрабатываемых изображений.

При отсутствии межкадровой корреляции ($\rho = 0$) совместная обработка M_3 кадров дает выигрыш в пороговом сигнале в $\sqrt{M_3}$ раз по отношению к случаю обнаружения сигнала на одном кадре изображения независимо от вида ковариационной функции $R_1(m_1, m_2)$ и размеров $M_1 \times M_2$ кадра.

Межкадровая корреляция ($\rho \neq 0$) приводит к потерям в эффективности обнаружения, соответствующим дополнительному увеличению дисперсии σ_x^2 мешающих изображений в $(1 + (M_3 - 1)\rho)$ раз.

Перечисленные свойства позволяют легко пересчитать характеристики обнаружения точечных аномалий на одном - единственном кадре изображения [13] для случая совместной обработки произвольного числа взаимно-коррелированных кадров изображений.

2.3 Адаптивные рекуррентные алгоритмы декорреляции случайных полей

Рассмотрим гауссовское случайное поле (СП) $x_{\bar{j}}$, $\bar{j}=(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \Omega$, заданное на n -мерной прямоугольной сетке $\Omega=\{\bar{j}, j_k = \overline{1, M_k}, k=1,2,\dots,n\}$.

Математическое ожидание СП $M\{x_{\bar{j}}\}=0$, $\forall \bar{j} \in \Omega$, а корреляционная

функция (КФ) $R_x\{\bar{r}_1, \bar{r}_2\}=M\{x_{\bar{j}+\bar{r}_1} \cdot x_{\bar{j}+\bar{r}_2}\}$ априори неизвестна и может

изменяться в процессе наблюдения. Необходимо построить адаптивное линейное рекуррентное преобразование

$$\xi_{\bar{j}}=L\{x_{\bar{j}}\}, \quad (2.12)$$

обеспечивающее выполнение условия

$$R_{\xi_{\bar{j}}}\{\bar{r}_1, \bar{r}_2\}=M\{\xi_{\bar{j}+\bar{r}_1} \cdot \xi_{\bar{j}+\bar{r}_2}\} \rightarrow 0, \quad \bar{r}_1 \neq \bar{r}_2. \quad (2.13)$$

Будем предполагать, что на сетке Ω определено правило линейного упорядочивания точек $\bar{j} \in \Omega$, на основе которого можно определить, что элемент \bar{j} предшествует элементу \bar{l} [6,14]. Такое правило даёт возможность установить вид развёртки, т.е. вид преобразования массива

данных $\{x_{\bar{j}}\}$ в последовательность чисел $x_{\bar{j}}$ при рекуррентной обработке многомерного изображения.

Для рекуррентной декорреляции СП $\{x_{\bar{j}}\}$ воспользуемся линейным оператором следующего вида:

$$\xi_{\bar{j}} = x_{\bar{j}} - \sum_{\substack{\bar{i} \in D_{\bar{j}} \\ \bar{i} \neq \bar{j}}} c_{\bar{j}\bar{i}} \cdot x_{\bar{i}}, \quad (2.14)$$

где $c_{\bar{j}\bar{i}} = c_{\bar{j}\bar{i}}(x_{\bar{i}})$ - весовые коэффициенты; $D_{\bar{j}}$ - область весового суммирования (рис.1), перемещающаяся по сетке Ω в соответствии с развёрткой изображения.

Для однородного СП $\{x_{\bar{j}}\}$ можно подобрать постоянные коэффициенты $c_{\bar{j}\bar{i}} = c_{\bar{j}\bar{i}}$, обеспечивающие при достаточно большом размере области D приемлемое качество декорреляции. При изменении вероятностных свойств СП $\{x_{\bar{j}}, \bar{j} \in \Omega\}$ необходимо подстраивать значения $c_{\bar{j}\bar{i}} = c_{\bar{j}\bar{i}}(x_{\bar{i}}, \bar{i} \in D_{\bar{j}})$ в соответствии с характеристиками СП. Для этого воспользуемся следующей рекуррентной псевдоградиентной процедурой [8]:

$$c_{\bar{l}, \bar{i}} = c_{\bar{j}, \bar{i}} - \lambda_{\bar{j}} \varphi(\nabla Q(c_{\bar{j}, \bar{i}})), \quad (2.15)$$

где $\nabla Q(c_{\bar{j}, \bar{i}})$ - реализация градиента функционала качества алгоритма декорреляции, т.е. $\nabla Q(c_{\bar{j}, \bar{i}}) = \nabla J(c_{\bar{j}, \bar{i}}) + \zeta_{\bar{j}}$; $J(c_{\bar{j}, \bar{i}})$ - функционал качества; $\zeta_{\bar{j}}$ - ошибка наблюдения в точке \bar{j} ; $\varphi(*)$ - векторная функция от реализации градиента функционала качества; $\lambda_{\bar{j}}$ - скалярные

коэффициенты; \bar{i} - следующее после \bar{j} значение индекса. Для сходимости процедуры (4) необходимо выполнение условия псевдоградиентности:

$$M\{\nabla J^T(c_{\bar{j},\bar{i}}) \cdot \varphi(\nabla Q(c_{\bar{j},\bar{i}}))\} \geq 0.$$

Это условие означает, что вектор $\varphi(\nabla Q(c_{\bar{j},\bar{i}}))$ в среднем должен составлять острый угол с направлением вектора $\nabla J(c_{\bar{j},\bar{i}})$.

Функционал $J(c_{\bar{j},\bar{i}})$ может быть определён несколькими способами.

Известно [6,8], что адаптивные алгоритмы делятся на два класса. Первый класс включает идентификационные, а второй класс – безидентификационные алгоритмы. В алгоритмах первого класса осуществляется предварительное оценивание неизвестных параметров наблюдений, а затем эти оценки используются для определения параметров алгоритма обработки. Анализ показывает, что применение подобных алгоритмов в системах реального времени вызывает большие трудности. В алгоритмах второго класса параметры алгоритма обработки изменяются в соответствии с изменением свойств некоторого наблюдаемого функционала. В рассматриваемой задаче декорреляции таким функционалом может быть, например, квадратичная форма:

$$Q(c_{\bar{j},\bar{i}}) = \sum_{\bar{k} \in G} \{\xi_{\bar{j}} \cdot \xi_{\bar{j}+\bar{k}}\}^2,$$

где G – n -мерная область декорреляции. Реализация градиента этого функционала имеет вид:

$$\nabla Q(c_{\bar{j},\bar{i}}) = \frac{\partial}{\partial c_{\bar{j},\bar{i}}} \left\{ \sum_{\bar{k} \in G} \{\xi_{\bar{j}} \cdot \xi_{\bar{j}+\bar{k}}\}^2 \right\} = \nabla J(c_{\bar{j},\bar{i}}) + \zeta_{\bar{j}}. \quad (2.16)$$

Анализ показывает, что в качестве функции от $\nabla Q(c_{\bar{j},\bar{i}})$ целесообразно

выбрать знаковую функцию $\varphi\{*\} = \text{sign}\{*\}$.

Отметим, что задача декорреляции относится к классу некорректно поставленных задач, и для её решения необходимо использовать методы регуляризации [9]. Для этого входные наблюдения представляются в виде суммы $x_{\bar{j}} = y_{\bar{j}} + \omega_{\bar{j}}$, где $\omega_{\bar{j}}$ - дополнительный гауссовский шум с дисперсией $\sigma_{\bar{j}}^2$

3. Фильтрация многомерных изображений

Выделение полезной составляющей $x_{\bar{j}}^t(\bar{\chi}_t)$ на основе наблюдений (21) является важной задачей, так как дает возможность улучшить многомерное изображение при наличии помех. Вместе с тем, рассмотрение проблем обнаружения аномалий также привело к необходимости определения ковариационных матриц $P_{\bar{e}j}$ ошибок фильтрации, если требуется построить характеристики оптимального обнаружения. Однако, подходы к решению задач определения потенциальной точности оценивания и построения алгоритмов фильтрации многомерных СП оказываются совершенно разными. В первом случае для получения достаточно простых аналитических соотношений целесообразно обратиться к асимптотическим формулам фильтра Винера. При построении же оценок многомерных изображений на фоне помех желательно найти структуры оптимальных или близких к ним алгоритма с небольшими вычислительными затратами. Это удастся сделать с помощью рекуррентных методов оценивания, основанных на рассмотренных во второй части моделях изображений.

3.1. Эффективность оптимальной фильтрации многомерных изображений

Для нахождения дисперсии ошибки σ_ε^2 оптимальной фильтрации рассмотрим однородное информационное СП $x_{\bar{j}}$, заданное на n -мерной сетке J бесконечных размеров. Пусть на основе наблюдений $z_{\bar{j}} = x_{\bar{j}} + \theta_{\bar{j}}$ необходимо дать наилучшую (в смысле минимума дисперсии ошибки) линейную оценку $\hat{x}_{\bar{0}} = \sum_{\bar{j} \in J} h_{\bar{j}} z_{\bar{j}}$ элемента $x_{\bar{0}}$ информационного СП.

Условие минимума σ_ε^2 запишется как система линейных уравнений

$$h_{\bar{q}} \sigma_\theta^2 + \sum_{\bar{j} \in J} h_{\bar{j}} R(\bar{q} - \bar{j}) = R(\bar{q}), \quad \bar{q} \in J, \quad (3.1)$$

которую можно рассматривать как n -мерный аналог уравнений Винера-Хопфа: $R(\bar{q}) = M\{x_{\bar{j}}, x_{\bar{j}+\bar{q}}\}$. При этом минимально достижимая дисперсия ошибки $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\theta^2 h_{\bar{0}}$. К сожалению, найти решение (3.1) удастся только для

очень узкого класса "разделимых" экспоненциальных корреляционных функций $R(\bar{q}) = \sigma_x^2 \prod_{i=1}^n \rho_i^{q_i}$ [12, 28, 29]. Однако, полагая ячейки

пространственной сетки J малыми по сравнению с интервалом корреляции СП, можно заменить систему (3.1) одним интегральным уравнением и тогда

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\theta^2 h_{\bar{0}} \cong \sigma_\theta^2 \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{\lambda}) d\bar{\lambda} / (\sigma_\theta^2 + f(\bar{\lambda})), \quad (3.2)$$

где

$$f(\bar{\lambda}) = \int_{R^n} R(\bar{u}) \exp(-j(\bar{\lambda}, \bar{u})) d\bar{u} \quad (3.3)$$

- спектральная плотность СП

$x(\bar{u}), \bar{u}, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n; (\bar{\lambda}, \bar{u}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k; d\bar{\lambda} = d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n$. Итак, для анализа

эффективности фильтрации достаточно найти спектральную плотность (3.3) информационного СП и произвести вычисления по формуле (3.2). При этом основные трудности обычно связаны с n -кратным интегрированием (3.3) и, особенно, (3.2). Эти трудности можно заметно снизить в случаях, когда СП $x(\bar{u})$ изотропно во всем пространстве \mathbb{R}^n или на каких-либо подпространствах $\Omega_m \subset \mathbb{R}^n$ [12, 28]. Действительно, после введения сферических координат [30] в \mathbb{R}^n формулы (3.3), (3.4) для изотропных СП преобразуются к виду:

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\theta^2} = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} \Gamma(0.5n)} \int_0^\infty \frac{k^{n-1} f(k)}{\sigma_\theta^2 + f(k)} dk, \quad (3.4)$$

$$f(k) = (2\pi)^{n/2} \int_0^\infty R(\rho) \rho^{n-1} \frac{J_{0.5n-1}}{(k\rho)^{0.5n-1}} d\rho, \quad (3.5)$$

где $J_\nu(\cdot)$ - функция Бесселя порядка ν [31]; $\Gamma(\cdot)$ - полная гамма - функция [31]; $k = |\bar{\lambda}|$; $\rho = |\bar{u}|$.

Для изотропных СП на пространствах с нечетным числом измерений функции Бесселя в (3.5) могут быть выражены через элементарные функции. В этих случаях расчеты по формулам (3.4), (3.5) выполняются достаточно просто. Например, для изотропных СП с

$$R(\rho) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha\rho), \quad \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^n u_k^2},$$

получим

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\theta^2} = \frac{\gamma q}{(2\pi)^{n-1} \Gamma(0.5n)} \int_0^\infty \frac{\nu^{n-1} \Phi_n(\nu)}{\gamma + \Phi_n(\nu)} d\nu \quad (3.6)$$

где $\gamma = \alpha^n / q$; $q = \sigma_x^2 / \sigma_\theta^2$ - отношение дисперсий информационного и мешающего СП;

$\Phi_1(\nu) = 2/(1 + \nu^2)$, $\Phi_3(\nu) = 8\pi/(1 + \nu^2)^2$; $\Phi_5(\nu) = 64\pi^2/(1 + \nu^2)^3$; $\Phi_7(\nu) = 96\pi^3/(1 + \nu^2)^4$ и т. д.

Для изотропных экспоненциально - коррелированных СП, заданных на пространствах с четным числом измерений $n = 2N$, известно [31] простое выражение для интеграла (3.5):

$$f(k) = (2\pi)^M \sigma_x^2 k^{-2(M-1)} (-1)^M \frac{d^M}{d\alpha^M} \left(\frac{(\sqrt{\alpha^2 + k^2} - \alpha)^{M-1}}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}} \right).$$

При этом минимальная дисперсия ошибки фильтрации также может быть представлена в виде формулы (3.6), где $\Phi_2(\nu) = 2\pi / \sqrt{(1 + \nu^2)^3}$; $\Phi_4(\nu) = 6\pi / \sqrt{(1 + \nu^2)^5}$ и т.д.

К сожалению, для больших размерностей n однородных СП получаются довольно громоздкие соотношения и при расчетах по формуле (3.6) целесообразно применять численные методы. Вместе с тем, как показывает анализ, при увеличении обобщенного параметра $\gamma = \alpha^n / q$ дисперсия ошибки оптимальной фильтрации рассмотренных изотропных СП асимптотически сходится к величине

$$\sigma_\varepsilon^2 / \sigma_x^2 = \beta_n \sqrt[n+1]{\gamma}, \quad (3.7)$$

где $\beta_1 \cong 0.707$; $\beta_2 \cong 0.66$; $\beta_3 \cong 0.63$; $\beta_4 \cong 0.606$; ... $\beta_\infty \cong 0.58$.

Для иллюстрации скорости сходимости на рис.8 приведены точные (сплошные линии) и приближенные (пунктир), зависимости минимальной дисперсии ошибки фильтрации, найденные по формулам (3.6) и (3.7) соответственно. Как следует из представленных графиков и детального исследования качества аппроксимации, в области наиболее важных для приложений малых значений γ полученная формула (3.7) дает хорошее приближение для (3.5), (3.6). Близкие по характеру результаты можно

получить также для анизотропных СП с экспоненциальными корреляционными функциями [28].

Таким образом, приведенные соотношения дают возможности получения довольно простых оценок потенциальной точности фильтрации СП на фоне помех. Кроме того, полученные граничные значения дисперсии фильтрации позволяют построить характеристики оптимальных алгоритмов обнаружения пространственных аномалий на фоне мешающих многомерных изображений.

3.2. Тензорный фильтр Калмана

Рассмотренные процедуры винеровской фильтрации могут использоваться в прикладных задачах лишь при ограниченном числе k кадров и малых размерах сеток G и J_t . Вместе с тем существует значительный круг задач, в которых наблюдения осуществляются непрерывно и число элементов в области $J_t \otimes T$ может быть сколь угодно большим. При этом построение прогноза с помощью весового суммирования всех предшествующих очередному кадру наблюдений $\{z_j^t\}$ может потребовать неоправданных вычислительных затрат. В подобных ситуациях целесообразно наложить дополнительные ограничения на рассматриваемые модели изображений и применить эффективные рекуррентные процедуры построения оптимального прогноза.

Одним из наименее обременительных ограничений, позволяющих найти рекуррентное решение поставленной задачи, является описание последовательности кадров мешающих изображений с помощью нелинейного тензорного стохастического разностного уравнения (7). На основе наблюдения последовательности кадров

$$z_{\bar{j}}^t = x_{\bar{j}}^t + \theta_{\bar{j}}^t, \quad \bar{j} \in J_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

представляющих собой аддитивную смесь информационного СП $x_{\bar{j}}^t$ и белого СП помех $\theta_{\bar{j}}^t$ необходимо найти наилучшую оценку $x_{\bar{j}}^t$ очередного кадра информационного СП. Для поиска такой оценки воспользуемся критерием максимума среднего выигрыша [11, 20, 21] и методом инвариантного погружения [11, 20, 33]. В результате можно получить следующее правило рекуррентного оценивания СП :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\bar{j}}^t &= \hat{x}_{\bar{j}}^{t-1} + P_{\bar{j}\bar{j}}^t V_{\theta}^{-1} (z_{\bar{j}}^t - \hat{x}_{\bar{j}}^{t-1}), \quad \bar{j} \in J_t, \\ P_{\bar{j}\bar{j}}^t &= P_{\bar{j}\bar{j}}^{t-1} (E + V_{\theta}^{-1} P_{\bar{j}\bar{j}}^{t-1})^{-1}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\hat{x}_{\bar{j}}^t = \varphi_{\bar{j}}^t(\hat{x}_{\bar{j}}^{t-1})$, $\bar{j} \in J_{t-1}$ - оптимальный прогноз СП;
 $P_{\bar{j}\bar{j}}^t = (\varphi^t(\hat{x}_{\bar{j}}^{t-1}))' P^{t-1} (\varphi^t(\hat{x}_{\bar{j}}^{t-1}))' + \nu^t(\hat{x}_{\bar{j}}^t) \nu^t(\hat{x}_{\bar{j}}^t)$ - ковариационная матрица ошибок прогноза; $x_{\bar{j}}^1 = 0$; $P_{\bar{j}\bar{j}}^1 = M\{x_{\bar{j}}^1 x_{\bar{j}}^1\}$.

Алгоритм (3.9) позволяет находить экстраполированные оценки СП $\hat{x}_{\bar{j}}^t$ и ковариационные матрицы ошибок экстраполяции $P_{\bar{j}\bar{j}}^t$ рекуррентно по мере поступления наблюдений $z_{\bar{j}}^t$, $\bar{j} \in J_t$, $t = 1, 2, \dots, t$, очередных кадров СП. Для случая гауссовских СП, определяемых линейными стохастическими уравнениями при $\varphi_{\bar{j}}^t(x_{\bar{j}}^{t-1}) = P_{\bar{j}\bar{j}}^t x_{\bar{j}}^{t-1}$ и $\nu_{\bar{j}\bar{q}}^t(x_{\bar{j}}^{t-1}) = \nu_{\bar{j}\bar{q}}^t(x_{\bar{j}}^{t-1})$, процедура фильтрации - экстраполяции (3.9) вместе с алгоритмом (26) дает строго оптимальное решение задачи обнаружения многомерных сигналов на последовательности изображений. При этом область G совпадает с J_t (рис.1), формулы (3.9) определяют последовательность межкадровой обработки наблюдений, а при формировании логарифма отношения правдоподобия применяется весовое суммирование наблюдений $z_{\bar{j}}^t$, $\bar{j} \in J_t$ и прогноза $\hat{x}_{\bar{j}}^t$, $\bar{j} \in J_t$, очередного кадра многомерного изображения.

Рассмотрим в качестве примера поле X с множительной корреляцией

$$M\{x_j^t \times x_i^s\} = \sigma_x^2 \rho^{|t-s|} \prod_{k=1}^n r_k^{|j_k-t_k|}, \quad \text{где } \rho - \text{коэффициент корреляции по}$$

времени; r_k - коэффициент по k -ой пространственной оси; σ_x^2 - дисперсия поля. Тогда при $t = s$ получаем внутрикадровые ковариации, а при $t = s - 1$ - межкадровые ковариации $V_x^{t|t-1} = \rho V_x^{t|t}$, где $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_m$; R_k - корреляционный тензор k -ой строки.

В этом случае $\rho^t = \rho E, \nu^{t-1} (\nu^{t-1})^T = V_x^t = V_x$, и уравнения (3.9) принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{x}^t &= \rho \hat{x}^{t-1} + P^t (z^t - \rho \hat{x}^{t-1}), \quad P^t = P_j^t (E + P_\Theta^t)^{-1}, \\ P_\Theta^t &= \rho^2 P^t + (1 - \rho^2) q R, \quad P_\Theta^t = q R, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $q = \sigma_x^2 / V_\theta$ - отношение сигнал/шум, а тензоры P_Θ^t и P^t нормированы дисперсией шума и представляют относительные ковариации ошибок экстраполированных и текущих оценок, выраженных в дисперсиях шума.

Рассмотрим для иллюстрации поле с 3×2 сеткой J_t , т.е. случай, когда кадры x^t состоят из шести точек:

$$x^t = \begin{pmatrix} x_{11}^t & x_{21}^t & x_{31}^t \\ x_{12}^t & x_{22}^t & x_{32}^t \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы корреляции первой строки и второй строки имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_1^2 & r_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & r_2 \\ r_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$V_x = \sigma_x^2 R_1 \times R_2 = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & | & r_2 & r_2 r_1 & r_2 r_1^2 \\ r_1 & 1 & r_1 & | & r_2 r_1 & r_2 & r_2 r_1 \\ r_1^2 & r_1 & 1 & | & r_2 r_1^2 & r_2 r_1 & r_2 \\ \hline r_2 & r_2 r_1 & r_2 r_1^2 & | & 1 & r_1 & r_1^2 \\ r_2 r_1 & r_2 & r_2 r_1 & | & r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 r_1^2 & r_2 r_1 & r_2 & | & r_1^2 & r_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрицы ковариации ошибок $P_{\mathcal{O}}^t$ и P^t имеют такую же форму.

Элементами тензоров P^t являются ковариации ошибок фильтрации x^k , зависящие в данном случае только от четырех параметров, коэффициентов корреляции r_1, r_2 и ρ , а также отношения сигнал/шум $q = \sigma_x^2 / V_{\theta}$. При $q \gg 1$, $t \rightarrow \infty$ величины $P_{j_1 j_2}^t$ довольно быстро сходятся к предельным $\{P_{j_1 j_2}^t\} = P_{j_1 j_2}$. Поэтому часто можно сразу же применять предельные значения, что ухудшит результаты фильтрации только на первых шагах, но значительно сократит объем необходимых вычислений (или объем запоминающего устройства, если коэффициенты $\{P_{j_1 j_2}^t\}$ вычисляются до эксперимента). Для иллюстрации сходимости к предельным значениям на рис. 9 приведены зависимости относительной дисперсии ошибки $\delta^2 = M\{(x_{j_1 j_2}^t - x_{j_1 j_2}^t)^2\} / V_{\theta}$ оценивания центрального момента сетки J_t размера $m \times m$ от номера t шага фильтрации.

Анализ данных зависимостей показывает, что для рассматриваемых значений параметров можно при незначительной потере в точности использовать сетки небольшого размера. При этом изображение разбивается на небольшие перекрывающиеся участки и оценка формируется для средней части каждого участка независимо от остальных.

Весьма важно, что полученные уравнения тензорной фильтрации (3.9) могут быть легко обобщены на случай почти произвольного взаимодействия

$$z_{\bar{j}}^t = S_{\bar{j}}^t(x_{\bar{1}}^t, \theta_{\bar{1}}^t), \quad \bar{j}, \bar{1} \in J_t,$$

информационного СП и помех [11, 20]. Кроме того, на основе модифицированного метода инвариантного погружения и рассмотренных моделей можно синтезировать рекуррентные процедуры для проверки многоальтернативных гипотез вида

$$H_\nu : \{z^t = S_\nu^t(x_\nu^t, \theta^t)\},$$

где $S_\nu^t(x_\nu^t, \theta^t), \nu = 0, 1, \dots, M$, - различные, вообще говоря, нелинейные тензорные функции, описывающие взаимодействие различных негауссовских СП $x_{\bar{j}}^t$ и помех [20].

3.3 Рекуррентное оценивание многомерных изображений

Случайные поля часто применяются для представления пространственно-временных сигналов в различных информационных системах. При синтезе и анализе подобных систем используются методы оптимального линейного оценивания СП, заданных на многомерных сетках, на фоне аддитивных помех [23]. Строго оптимальное решение этой задачи [35] предполагает применение методов векторной калмановской фильтрации. Однако при этом возникают значительные технические проблемы, связанные с большим числом вычислительных операций при реализации процедур оценивания в реальном масштабе времени. Рассмотрим возможности построения рекуррентных по пространству алгоритмов оценивания, позволяющих значительно сократить число операций при сохранении эффективности, близкой к потенциально-достижимой.

Пусть марковское поле $X = \{x_{ij}\}$ заданно на двумерной сетке $\Omega = \{(i, j) : i = \overline{1 \dots M_1}, j = \overline{1 \dots M_2}\}$ простейшей АР-моделью (2.14) с характеристическими корнями кратности (1,1):

$$x_{ij} = \rho_y x_{i-1,j} + \rho_x x_{i,j-1} - \rho_x \rho_y x_{i-1,j-1} + \xi_{ij}, \quad (i, j) \in \Omega, \quad (3.11)$$

где ρ_x, ρ_y – коэффициенты корреляции соседних элементов изображения по строке и столбцу соответственно; $\{\xi_{ij}\}$ – двумерное СП гауссовских СВ с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_{\xi}^2 = M\{\xi_{ij}^2\} = (1 - \rho_x^2)(1 - \rho_y^2)\sigma_x^2$; $\sigma_x^2 = M\{x_{ij}^2\}$. Задача оптимального (в смысле минимума дисперсии ошибки) оценивания x_{ij} рассматривается обычно для аддитивной модели наблюдений:

$$z_{ij} = x_{i,j} + \theta_{ij}, \quad (i, j) \in \Omega, \quad (3.12)$$

где $\{\theta_{ij}\}$ – белое гауссовское поле с дисперсией $\sigma_\theta^2 = M\{\theta_{ij}^2\}$.

В работе [15] задача оценивания двумерного поля X сводится к задаче калмановской фильтрации векторной случайной последовательности. При этом в расширенный вектор состояния \bar{x}_k включаются все элементы k -й строки изображения. Модель (3.1) для этого случая преобразуется к виду:

$$\bar{x}_k = R\bar{x}_{k-1} + V\bar{\xi}_k, \quad (3.13)$$

где $\bar{\xi}_k$ – вектор некоррелированных гауссовских случайных величин с ковариационной матрицей $V_\xi = VV^T = (1 - \rho_y^2)V_x$; $R = \rho_y E$ – переходная матрица системы; $V_x = M\{\bar{x}_k \bar{x}_k^T\}$ – корреляционная матрица информационного СП; E – единичная матрица. После перехода к векторной форме модель наблюдений (3.12) запишется следующим образом:

$$\bar{z}_k = \bar{x}_k + \bar{\theta}_k, \quad k = \overline{1 \dots M_1}, \quad (3.14)$$

где $\bar{\theta}_k = (\theta_1, \theta_2 \dots \theta_N)^T$. Соотношения (3.13), (3.14) приводят к следующему алгоритму построчной калмановской фильтрации [15]:

$$P_{\partial k} = RP_{k-1}R^T + V_\xi, \quad P_k = P_{\partial k} \left(E + V_\theta^{-1} P_{\partial k} \right)^{-1}, \quad (3.15)$$

$$\hat{\bar{x}}_{\partial k} = R\bar{x}_{k-1}, \quad \hat{\bar{x}}_k = \hat{\bar{x}}_{\partial k} + P_k V_\theta^{-1} (\bar{z}_k - \hat{\bar{x}}_{\partial k}), \quad (3.16)$$

где начальные условия задаются следующим образом:

$$P_{\partial 1} = V_x, \quad \hat{\bar{x}}_{\partial 1} = \bar{0}. \quad (3.17)$$

В процедуре (3.15) – (3.17) используются векторно-матричные операции, и оценка $\hat{\bar{x}}_k$, получаемая на каждом шаге, является полной строкой изображения. Оценим число элементарных операций умножения на каждом шаге вычислений. Учитывая тот факт, что коэффициенты R и V_θ являются, по существу, скалярами, вычислительная сложность

процедуры пересчета матрицы ковариаций ошибок оценивания P_k в (3.5) составляет $O(M_2^4 + M_2^3 + M_2^2)$ операций умножения, где M_2 – длина строки. При этом основное число операций $O(M_2^4)$ требуется для вычисления обратной матрицы. Собственно процедура вычисления оценки информационного поля в (3.16) требует $O(M_2^2 + 2M_2)$ умножений.

Рассмотрим возможности сокращения требуемого числа операций для решения задачи квазиоптимального оценивания двумерного СП. Для этого вначале выпишем элементы $P_{\ell j}^k = M\{\varepsilon_\ell^k \varepsilon_j^k\}$ матрицы P_k , представляющие собой ковариации ошибок оценивания $\varepsilon_\ell^k = x_\ell^k - \widehat{x}_\ell^k$. Как следует из (3.5), матрица P_k образуется из матрицы $P_{\varepsilon k}$ с элементами $P_{\varepsilon \ell j}^k = M\{u_{\varepsilon \ell}^k u_{\varepsilon j}^k\}$, равными ковариациям ошибок экстраполяции $u_{\varepsilon \ell}^k = x_\ell^k - \widehat{x}_{\varepsilon \ell}^k$.

Выделим ℓ -й элемент k -й строки изображения и запишем (3.15) в следующей скалярной форме

$$\widehat{x}_\ell^k = \widehat{x}_{\varepsilon \ell}^k + \widehat{u}_\ell^k, \quad (3.18)$$

где

$$\widehat{u}_\ell^k = V_\theta^{-1} \sum_{j=1}^{M_2} P_{\ell j}^k (z_j^k - \widehat{x}_{\varepsilon j}^k). \quad (3.19)$$

Анализ данного выражения показывает, что соотношение (3.19) можно рассматривать как оценку величины u_ℓ^k с помощью оптимального нерекурсивного линейного фильтра (фильтра Винера) [74]. При этом для оценки u_ℓ^k используются разности $y_j^k = z_j^k - \widehat{x}_{\varepsilon j}^k = x_j^k - \widehat{x}_{\varepsilon j}^k + \theta_j^k = u_j^k + \theta_j^k$.

Для преобразования винеровской нерекуррентной оценки (3.19) в калмановскую, допустим, что модели состояния и наблюдения для u_ℓ^k записываются следующим образом:

$$\begin{cases} u_\ell = \gamma_\ell u_{\ell-1} + \xi_\ell \\ y_\ell = u_\ell + \theta_\ell \end{cases}, \quad (3.20)$$

где индекс k опущен для сокращения записи. Для того, чтобы применить к (3.20) процедуру скалярного калмановского оценивания, необходимо определить коэффициенты γ_ℓ и дисперсию порождающего шума $V_{\xi_\ell}^2$ на каждом шаге. Это можно сделать, исходя из (3.20) и (3.15). Действительно,

$$M\{u_\ell u_{\ell-1}\} = \gamma_\ell M\{u_{\ell-1}^2\},$$

где $M\{u_\ell u_{\ell-1}\} = P_{\partial\ell, \ell-1}^k$, $M\{u_\ell^2\} = P_{\partial\ell, \ell}^k$ – элементы матрицы $P_{\partial k}^k$. Отсюда можно определить недостающие параметры модели:

$$\gamma_\ell = P_{\partial\ell, \ell-1}^k / P_{\partial\ell-1, \ell-1}^k, \quad (3.21)$$

$$V_{\xi_\ell}^2 = M\{\xi_\ell^2\} = P_{\partial\ell, \ell}^k - \gamma_\ell^2 P_{\partial\ell-1, \ell-1}^k. \quad (3.22)$$

С учетом (3.20) – (3.22) составим уравнения калмановского оценивания u_ℓ , состоящего из двух этапов – фильтрации и последующего сглаживания, соответствующих прямому и обратному ходу алгоритма вдоль строки. Использование двухпроходного алгоритма продиктовано тем фактом, что в оценивании каждого отсчета x_{ij} по формулам (3.15) – (3.17) участвуют все элементы i -й строки изображения, следовательно, оценка производится на основе всех наблюдений \bar{z}_i . Поэтому для получения оптимальной оценки с использованием скалярного фильтра необходимо провести интерполяцию полученных прямым ходом оценок при помощи известных процедур, приведенных, например, в работах [2, 74].

Первый этап работы скалярного алгоритма имеет следующий вид:

$$P_{\partial\ell}^u = \gamma_\ell^2 P_{\partial\ell-1}^u + V_{\xi_\ell}, \quad P_\ell^u = P_{\partial\ell}^u (1 + V_\theta^{-1} P_{\partial\ell}^u)^{-1}, \quad (3.23)$$

$$\hat{u}_{\partial\ell} = \gamma_\ell \hat{u}_{\partial\ell-1}, \quad \hat{u}_\ell = \hat{u}_{\partial\ell} + P_\ell^u V_\theta^{-1} (y_\ell - \hat{u}_{\partial\ell}), \quad (3.24)$$

где $\ell = \overline{1 \dots M_1}$, и начальные условия задаются в следующем виде:

$$P_{\vartheta 1}^u = P_{\vartheta 1}, \quad \widehat{u}_{\vartheta 1} = 0, \quad (3.25)$$

Второй этап предполагает использование значений P_ℓ^u и $P_{\vartheta(\ell+1)}^u$, вычисленных на предыдущем этапе:

$$\widehat{u}_N = \widehat{u}_N, \quad (3.26)$$

$$\widehat{u}_\ell = \widehat{u}_\ell + \left(P_\ell^u / P_{\vartheta(\ell+1)}^u \right) \gamma_\ell (\widehat{u}_{\ell+1} - \gamma_\ell \widehat{u}_\ell), \quad (3.27)$$

где $\ell = M_1 - 1, M_1 - 2, \dots, 1$.

Для вычисления коэффициентов γ_ℓ и $V_{\xi\ell}$ требуются точные значения $P_{\vartheta\ell,\ell}^k$ элементов матрицы P_ϑ^k . Как показывают эксперименты, значения элементов P_ϑ^k , $k = \overline{1 \dots M_2}$ устанавливаются достаточно быстро. Например, при $\rho = 0.9$, $M_2 = 100$ уже на 5 шаге (после оценивания 5 строки изображения) элементы матрицы P_ϑ^k практически не изменяются. Поэтому коэффициенты γ_ℓ и $V_{\xi\ell}$ предлагается вычислять на основе установившегося значения этой матрицы $P_\vartheta^k = P_\vartheta$.

Таким образом, предлагается использовать следующий квазиоптимальный алгоритм оценивания. Для получения установившегося значения матрицы P_ϑ^k первые несколько строк изображения оцениваются при помощи векторного фильтра Калмана (3.15) – (3.17). Затем осуществляется рекуррентное по пространству оценивание на основе скалярной процедуры (3.23) – (3.27) и установившихся значений матричных коэффициентов P и P_ϑ .

Оценим вычислительную сложность алгоритма (3.23) – (3.27) и выигрыш данной процедуры перед векторным фильтром при условии предварительного пересчета матричных коэффициентов фильтра, то есть, будем сравнивать лишь вычислительную сложность получения оценки по

формулам (3.16) и (3.13) – (3.17) соответственно. Для вычисления коэффициентов $\gamma_\ell, V_{\xi\ell}$ на каждом шаге требуется 3 умножения, для прямого прохода алгоритма – 10 умножений, и для обратного прохода – еще 3 умножения. Таким образом, всего для оценки одной строки изображения требуется $O(16M_2)$ умножений. Сравнивая полученную величину с количеством операций для получения векторной оценки (3.16), можно заключить, что выигрыш в числе операций, требуемых для фильтрации одной строки изображения, составляет $O(M_2)$.

Для анализа эффективности предложенных алгоритмов были проведены вычисления на ЭВМ. Результаты, полученные при обработке изображений с помощью двух алгоритмов фильтрации – оптимального и квазиоптимального – представлены на рис. 3.11 – 3.14. На рис. 3.1 показано смоделированное изображение X размером 100×100 элементов. Параметры модели – $\rho_y = \rho_x = 0.9$, $\sigma_x^2 = 1$. На рис. 3.12 показано изображение Z в смеси с реализацией шума с дисперсией $\sigma_\theta^2 = 1$. На рис. 3.13, 3.14 представлены отфильтрованные изображения с помощью оптимальный (рис. 3.13) и квазиоптимального (рис. 3.14) алгоритмов. На рис. 3.15 показаны точные (значки +) и приближенные (значки o) зависимости интегральных невязок u_ℓ и \hat{u}_ℓ от номера элемента для последней строки изображения. Анализ показывает, что относительная ошибка оценивания коэффициентов составляет около 5%.

На рис. 3.6 представлены зависимости дисперсии ошибки фильтрации от номера j элемента в последней строке изображения размером 100×100 элементов при использовании векторного оптимального фильтра (3.15), (3.16) (сплошные линии) и квазиоптимального скалярного алгоритма (3.19), (3.20) (пунктир) при коэффициентах корреляции

$\rho_x = 0.9$, $\rho_y = 0.9$ и двух отношениях сигнал/шум $q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\theta^2}$. На рис. 3.17,

3.18 показана дисперсия ошибки фильтрации среднего и крайних элементов последней строки. Необходимо отметить, что дисперсия ошибки на рис. 3.16 – 3.18 является потенциально достижимой.

Анализ приведенных данных показывает, что предложенный подход позволяет получить алгоритмы фильтрации изображений, важным достоинством которых является простота технической реализации при весьма незначительном проигрыше перед оптимальными процедурами [72, 77, 96] по величине дисперсии ошибки, не превышающем 3–6%. Вместе с тем, выигрыш в числе арифметических операций по сравнению, например, с аналогичным оптимальным алгоритмом [96], может быть оценен примерно в M_2^2 раз, где M_2 – длина строки изображения.

Несмотря на то, что предложенный алгоритм не является строго оптимальным, можно высказать предположение о том, что соответствующий подбор параметров и порядка АР модели (3.20) позволит получить еще более близкие к оптимальным решения. Тем не менее, следует отметить необходимость дальнейшего изучения идей, положенных в основу данного квазиоптимального алгоритма.

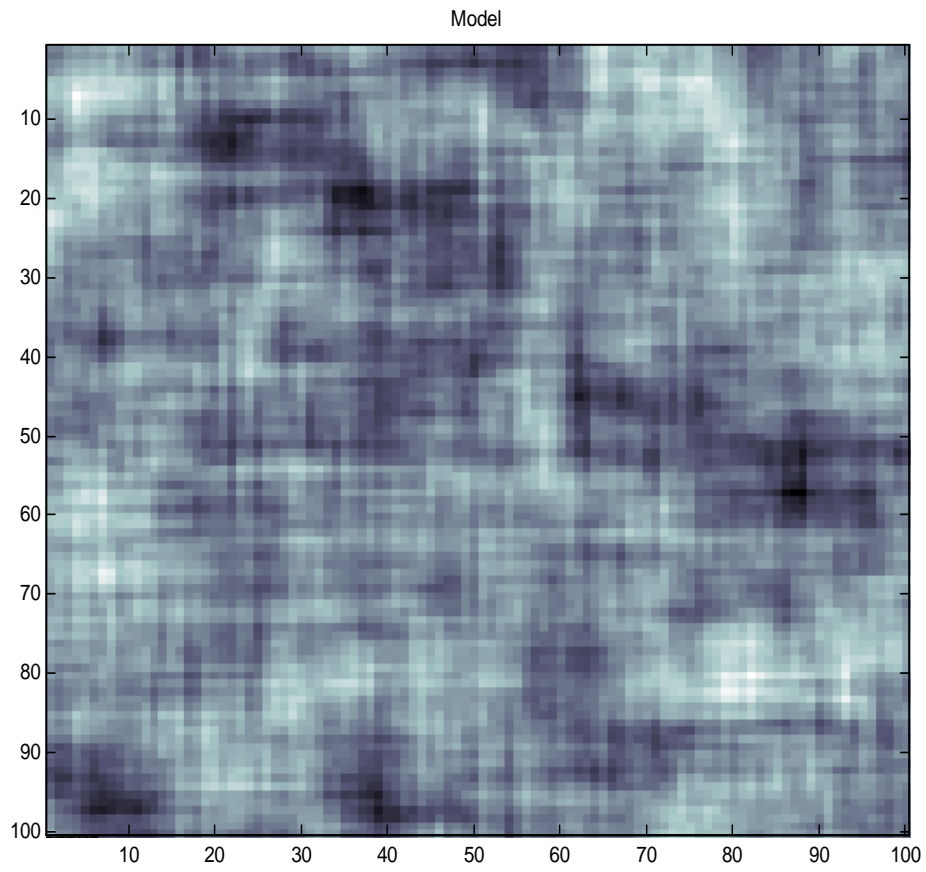
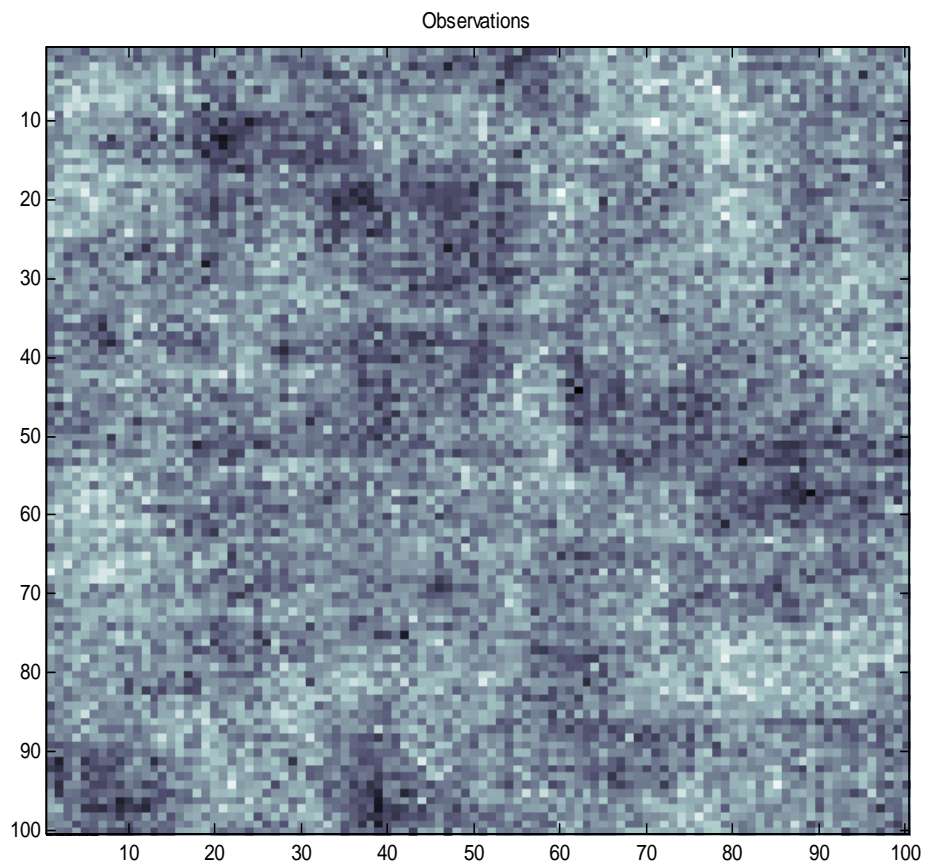


Рис. 3.1 Смоделированное изображение



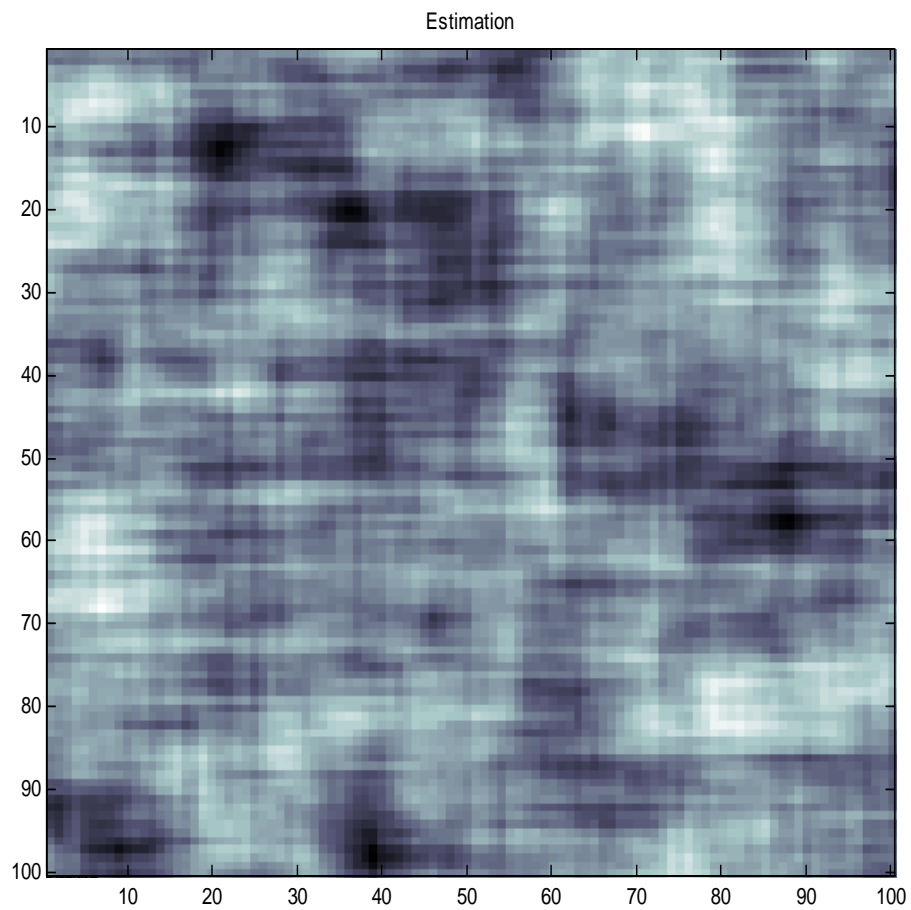


Рис. 3.3 Оптимальная оценка

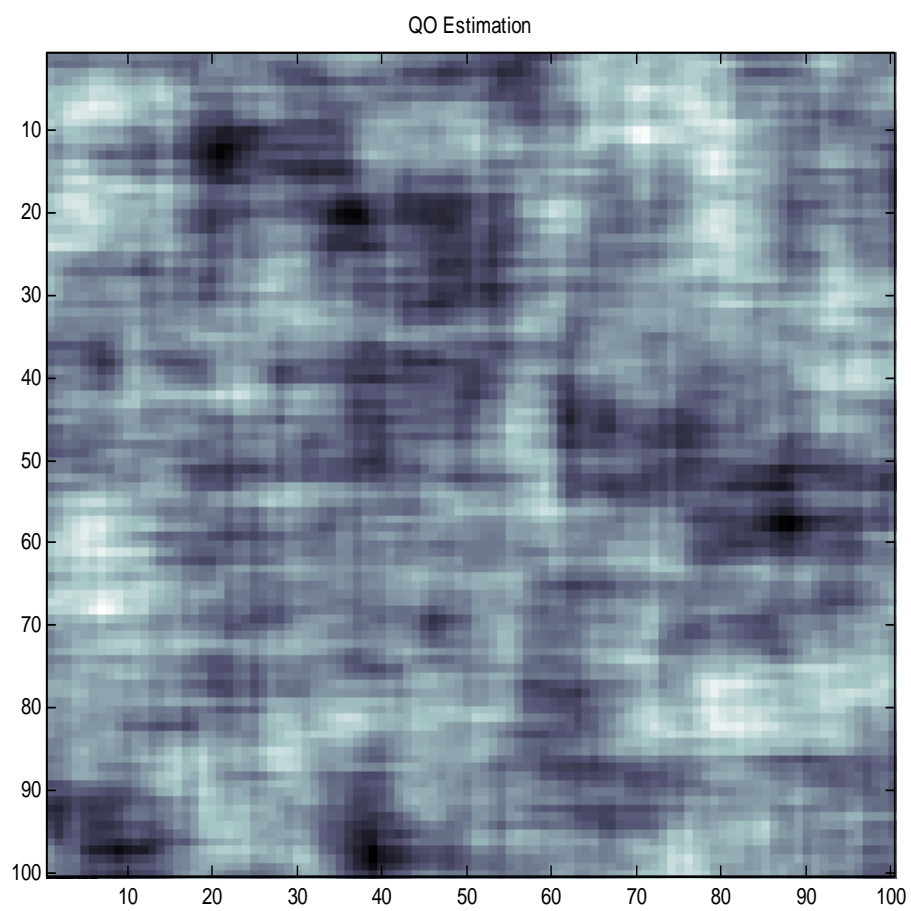


Рис. 3.4 Квазиоптимальная оценка

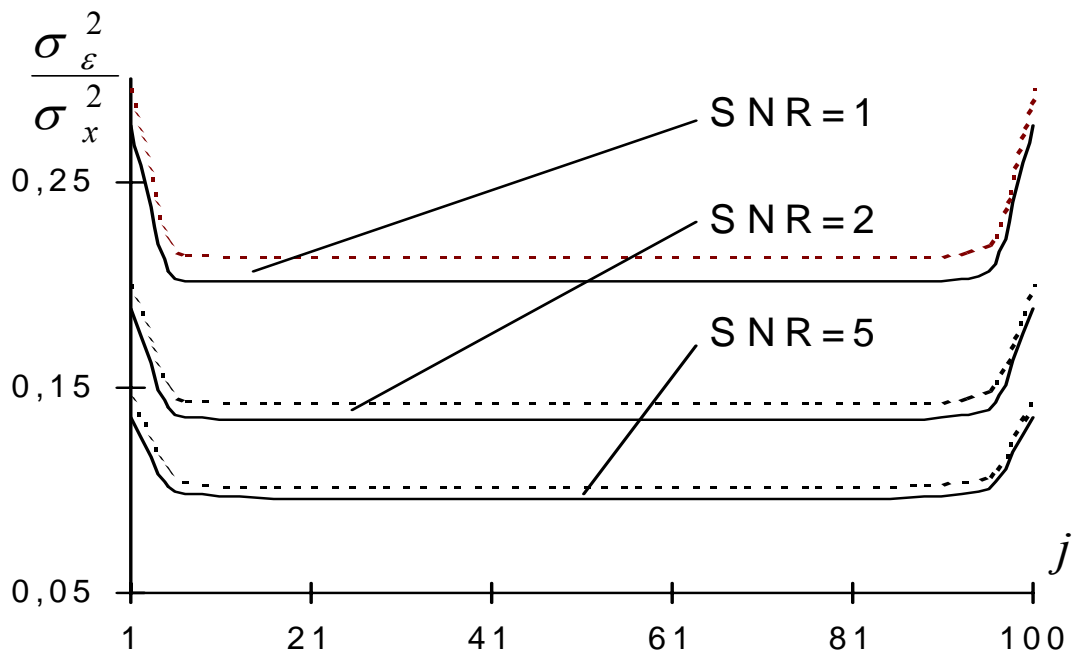
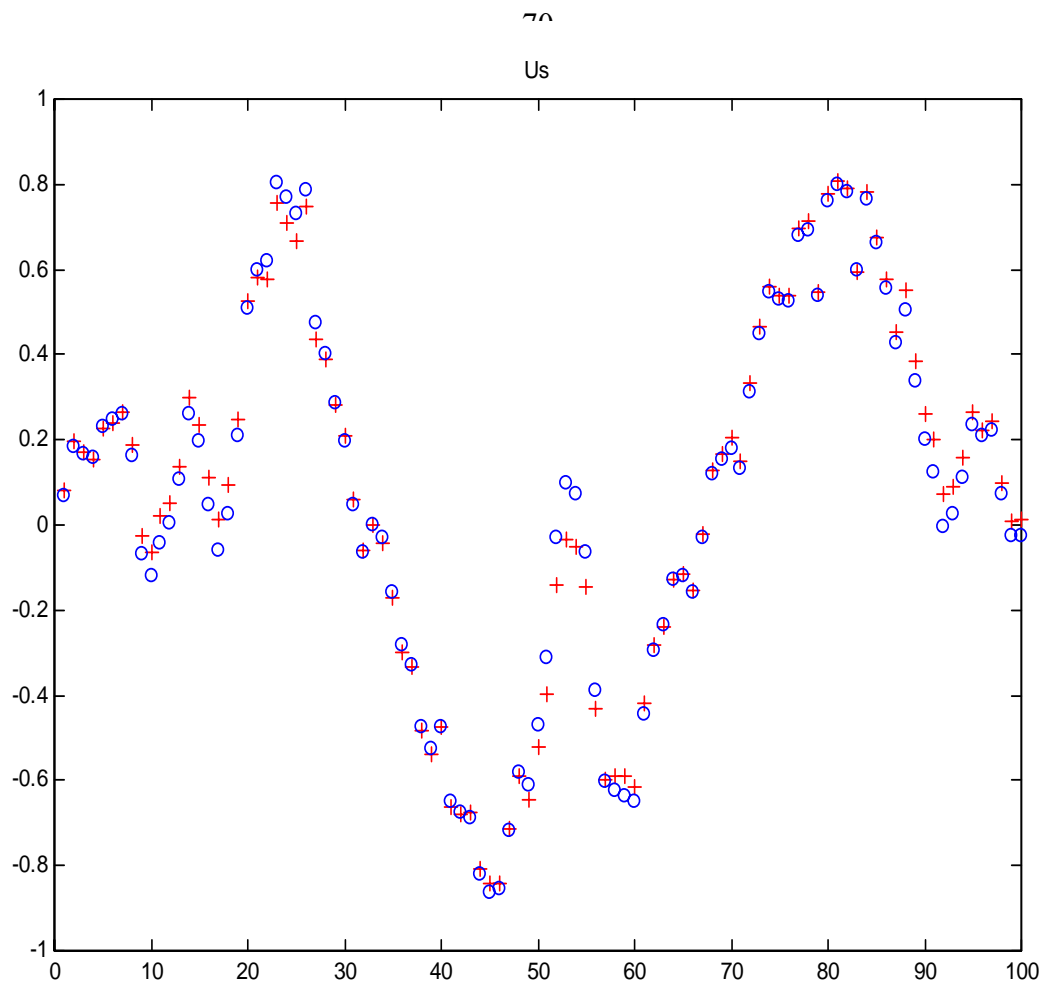


Рис. 3.6 Дисперсия ошибки фильтрации элементов последней строки

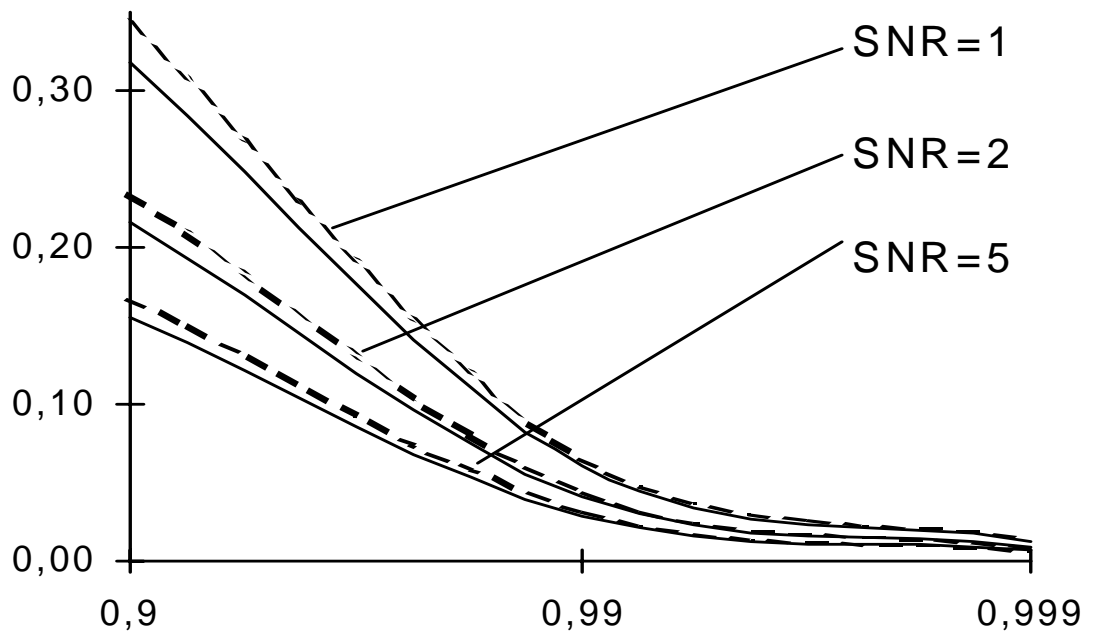


Рис. 3.7 Дисперсия ошибки фильтрации среднего элемента строки

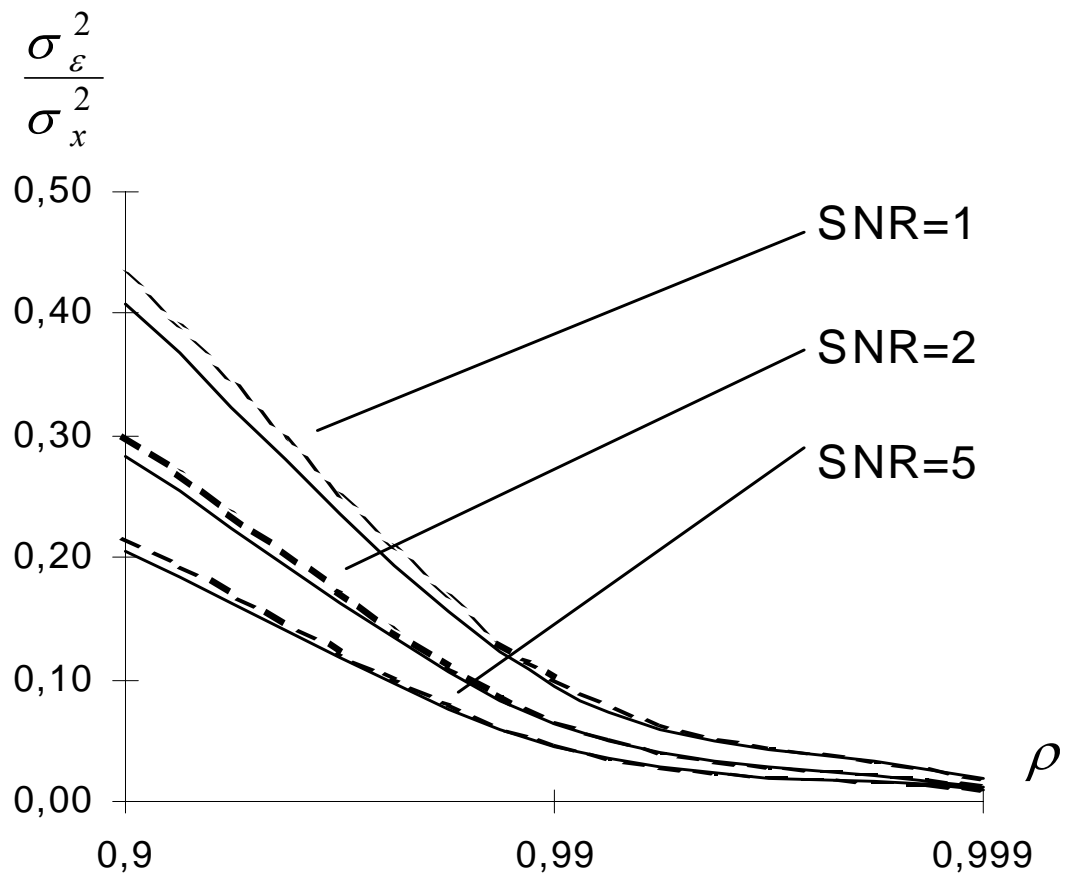


Рис. 3.8 Дисперсия ошибки фильтрации крайних элементов строки

3.4 Алгоритмы оценивания двумерных СП на основе моделей с кратными корнями

В предыдущем параграфе рассматривались оптимальный и близкий к оптимальному алгоритмы оценивания двумерных СП на основе модели кратности (1,1). Для того, чтобы применить методику, изложенную в предыдущем параграфе, для построения алгоритмов фильтрации СП с кратными корнями характеристических уравнений, прежде всего необходимо сформулировать задачу фильтрации кадра в терминах пространства состояний. Для этого нужно решить задачу нахождения обобщенной векторной формы представления данного класса моделей.

Для начала рассмотрим случай кратности 2 по обеим осям. Модель в этом случае должна иметь следующий вид:

$$\bar{x}_k = A\bar{x}_{k-1} + B\bar{x}_{k-2} + V\bar{\xi}_k, \quad (3.28)$$

где $\bar{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kM_2})^T$ – вектор, содержащий элементы k -й строки; $\bar{\xi}_k = (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kM_2})^T$ – порождающий вектор стандартных СВ; A, B, V – матричные коэффициенты модели; $M_1 \times M_2$ – размер изображения. Таким образом, необходимо определить матричные коэффициенты A, B, V на основании соответствующей модели (2.14) с кратными корнями, таким образом, чтобы они стали эквивалентны.

Для определения элементов неизвестных матриц A, B, V домножим (3.28) на \bar{x}_{k-1}^T справа и найдем математическое ожидание:

$$\bar{x}_k \bar{x}_{k-1}^T = A\bar{x}_{k-1} \bar{x}_{k-1}^T + B\bar{x}_{k-2} \bar{x}_{k-1}^T + V\bar{\xi}_k \bar{x}_{k-1}^T, \quad (3.29)$$

$$M\{\bar{x}_k \bar{x}_{k-1}^T\} = AM\{\bar{x}_{k-1} \bar{x}_{k-1}^T\} + BM\{\bar{x}_{k-2} \bar{x}_{k-1}^T\} + VM\{\bar{\xi}_k \bar{x}_{k-1}^T\}. \quad (3.30)$$

Пусть $V_{xi} = M\{\bar{x}_k \bar{x}_{k-i}^T\}$ – ковариационная матрица поля $\{\bar{x}_k\}$ на расстоянии i . Очевидно, что, $V_{xi}^T = M\{\bar{x}_{k-i} \bar{x}_k^T\} = M\{\bar{x}_k \bar{x}_{k-i}^T\} = V_{xi}$. Тогда формулы (3.29) и (3.30) принимают следующий вид:

$$V_{x1} = AV_{x0} + BV_{x1},$$

$$AV_{x0} = (E - B)V_{x1}. \quad (3.31)$$

Точно также, после домножения (3.18) на \bar{x}_{k-2}^T получим

$$\bar{x}_k \bar{x}_{k-2}^T = A\bar{x}_{k-1} \bar{x}_{k-2}^T + B\bar{x}_{k-2} \bar{x}_{k-2}^T + V_{\xi k} \bar{x}_{k-2}^T,$$

$$V_{x2} = AV_{x1} + BV_{x0}. \quad (3.32)$$

Умножим теперь (3.28) на \bar{x}_k^T :

$$\bar{x}_k \bar{x}_k^T = (A\bar{x}_{k-1} + B\bar{x}_{k-2} + V_{\xi k} \bar{\xi}_k)(A\bar{x}_{k-1} + B\bar{x}_{k-2} + V_{\xi k} \bar{\xi}_k)^T$$

и найдем математическое ожидание

$$V_{x0} = AV_{x0}A^T + BV_{x1}A^T + AV_{x1}B^T + BV_{x0}B^T + VV_{\xi}V^T. \quad (3.33)$$

Здесь $V_{\xi} = M\{\bar{\xi}_k \bar{\xi}_k^T\}$ – матрица дисперсии порождающего поля. Для стандартно распределенных СВ ξ_{ij} она тождественно равна единичной матрице.

Рассмотрим структуру элементов матрицы V_{xi} :

$$V_{xi} = M\{\bar{x}_k \bar{x}_k^T\} = \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \dots \\ x_{kM_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(k-1),1} & x_{(k-1),2} & \dots & x_{(k-1),M_2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{k,1}x_{(k-i),1} & x_{k,1}x_{(k-i),2} & \dots & x_{k,1}x_{(k-i),M_2} \\ x_{k,2}x_{(k-i),1} & x_{k,2}x_{(k-i),2} & \dots & x_{k,2}x_{(k-i),M_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k,M_2}x_{(k-i),1} & x_{k,M_2}x_{(k-i),2} & \dots & x_{k,M_2}x_{(k-i),M_2} \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma_x^2 \begin{bmatrix} R(i,0) & R(i,1) & \dots & R(i, M_2 - 1) \\ R(i,1) & R(i,0) & \dots & R(i, M_2 - 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(i, M_2 - 1) & R(i, M_2 - 2) & \dots & R(i,0) \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание разделимость модели по координатным осям, можем записать

$$V_{xi} = \sigma_x^2 R_y(i) \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(M_2 - 1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M_2 - 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M_2 - 1) & R_x(M_2 - 2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix}.$$

Матрица в последнем выражении является ковариационной матрицей одномерной модели по строке, т.е. V_{x0} . С учетом этого, полученное выражение может быть переписано в следующем виде:

$$V_{xi} = \sigma_x^2 R_y(i) V_{x0}. \quad (3.34)$$

Теперь, с учетом последнего выражения, найдем коэффициенты модели A, B, V . Решим систему матричных уравнений (3.22), (3.23) относительно неизвестных A, B :

$$\begin{cases} V_{x1} = AV_{x0} + BV_{x1} \\ AV_{x0} = (E - B)V_{x1} \end{cases}, \quad \begin{cases} A = R_y(1) \frac{1 - R_y(2)}{1 - R_y(1)^2} \\ B = \frac{R_y(2) - R_y(1)^2}{1 - R_y(1)^2} \end{cases}.$$

Подставив в полученные выражения значения КФ, получим окончательное

решение $\begin{cases} A = 2\rho_y \\ B = -\rho_y^2 \end{cases}$. Таким образом, коэффициенты A и B векторной

модели с кратными корнями порядка 2 по обеим осям являются скалярами.

Для того, чтобы полностью определить параметры модели (3.28), необходимо найти еще коэффициент V . Для этого подставим полученные выражения A и B в формулу (3.33) и с учетом того, что $V_\xi \equiv E$, получим:

$$V_{x0} = A^2 V_{x0} + 2ABR_y(1)V_{x0} + B^2 V_{x0} + VV^T, \\ VV^T = (1 - A^2 - 2ABR_y(1) - B^2)V_{x0}. \quad (3.35)$$

Явное выражение для V можно получить с использованием известного разложения Холесского [31].

Таким образом, все коэффициенты модели (3.28) полностью определены. Теперь необходимо привести (3.28) к виду

$$\bar{y}_l = S\bar{y}_{l-1} + W\zeta_l. \quad (3.36)$$

Это может быть сделано следующим образом. Включим в вектор состояния \bar{y}_l две строки изображения – k -ю и $(k-1)$ -ю:

$\bar{y}_l = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kN}, x_{(k-1)1}, x_{(k-1)2}, \dots, x_{(k-1)N})^T$. С учетом этого перепишем (3.28) в форме (3.36):

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{x}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{k-1} \\ \bar{x}_{k-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_k \\ \bar{\xi}_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Таким образом, модель (3.28) полностью построена.

Полученное представление модели СП (3.36) дает возможность применить для фильтрации СП на основе моделей кратности (2,2) стандартную калмановскую процедуру фильтрации векторной случайной

последовательности. Здесь $\bar{y}_l = \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{x}_{k-1} \end{bmatrix}$ – вектор состояния, $S = \begin{bmatrix} A & B \\ E & 0 \end{bmatrix}$ –

переходная матрица системы; $\bar{\zeta}_l = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_k \\ \bar{\xi}_{k-1} \end{bmatrix}$ – вектор некоррелированных

стандартных СВ, E – единичная матрица.

Модель наблюдения запишется следующим образом:

$$\bar{o}_k = H\bar{y}_k + \bar{\mathcal{G}}_k, \quad l = 1, 2, \dots, M_1, \quad (3.38)$$

где $\bar{o}_k = (o_{k1}, o_{k2}, \dots, o_{kM_2})^T$ – строка зашумленного изображения;
 $\bar{\mathcal{G}}_l = (\mathcal{G}_{k1}, \mathcal{G}_{k2}, \dots, \mathcal{G}_{kM_2})^T$ – белый гауссовский шум с дисперсией V_g , а
 $H = (E | 0)$ – матрица наблюдения. Соотношения (3.26), (3.28) приводят к
 следующему алгоритму векторной калмановской фильтрации:

$$P_{l_3} = SP_{l-1}S^T + WW^T, \quad K_l = P_{l_3}H^T(H P_{l_3}H^T + V_\theta)^{-1}, \quad P_l = (E - K_l H)P_{l_3} \quad (3.39)$$

$$\hat{y}_{l_3} = S\hat{y}_{l-1}, \quad \hat{y}_l = \hat{y}_{l_3} + K_l(\bar{z}_l - H\hat{y}_{l_3}). \quad (3.40)$$

Вычислительная сложность алгоритма (3.39), (3.40) существенно выше, чем у алгоритма (3.15) – (3.17). Тем не менее, далее будут высказаны предложения по сокращению вычислительной сложности подобных алгоритмов.

Дальнейший анализ приведенных выражений показывает, что возможно обобщение векторной модели (3.36) на случай любой кратности. Пусть заданы $\bar{n} = (n_y, n_x)$ – кратность корней, и $\bar{\rho} = (\rho_y, \rho_x)$ – вектор параметров двумерной модели (2.14). Включим в вектор состояния \bar{y}_l n_y строк изображения – с k -й по $(k - n_y + 1)$ -ю:
 $\bar{y}_l = (x_{k1}, \dots, x_{kM_2}, \dots, x_{(k-n_y+1)1}, \dots, x_{(k-n_y+1)M_2})^T$ и перепишем с учетом этого (3.28) в форме (3.36):

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{x}_{k-1} \\ \bar{x}_{k-2} \\ \dots \\ \bar{x}_{k-n_y+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{n_y-1} & A_{n_y} \\ E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{k-1} \\ \bar{x}_{k-2} \\ \bar{x}_{k-3} \\ \dots \\ \bar{x}_{k-n_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_k \\ \bar{\xi}_{k-1} \\ \bar{\xi}_{k-2} \\ \dots \\ \bar{\xi}_{k-n_y+1} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

где $A_i = \alpha_{yi}E$ – соответствующий коэффициент скалярной модели вдоль оси y .

Найдем теперь коэффициент V . Для этого перепишем (3.31) в векторном виде

$$\bar{x}_k = \sum_{i=1}^{n_y} A_i \bar{x}_{k-i} + V \bar{\xi}_k, \quad k = 1 \dots M_1,$$

и домножим его справа на \bar{x}_k^T :

$$\bar{x}_k \bar{x}_k^T = \left(\sum_{i=1}^{n_y} A_i \bar{x}_{k-i} + V \bar{\xi}_k \right) \left(\sum_{j=1}^{n_y} A_j \bar{x}_{k-j} + V \bar{\xi}_k \right)^T.$$

Найдем теперь математическое ожидание от обеих частей:

$$M \{ \bar{x}_k \bar{x}_k^T \} = \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} A_i A_j M \{ \bar{x}_{k-i} \bar{x}_{k-j}^T \} + VM \{ \bar{\xi}_k \bar{\xi}_k^T \} V^T,$$

$$V_{x0} = \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} A_i A_j V_{x0} R_y(i-j) + VV^T.$$

Из последнего равенства получаем:

$$VV^T = \left(1 - \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} A_i A_j R_y(i-j) \right) V_{x0}, \quad (3.42)$$

причем выражение в скобках представляет собой скаляр. Общий вид коэффициента V может быть получен из (3.42) при помощи разложения Холесского.

Таким образом, обобщенный вид модели с кратными корнями для случая двух измерений полностью определен и мы можем применить для оценивания подобных СП процедуры векторной калмановской фильтрации в форме (3.39) – (3.40).

Увеличение размера вектора состояния влечет за собой увеличение объема вычислений. Тем не менее, можно заметить, что алгоритм (3.39)-(3.40) может быть в значительной степени упрощен. Действительно, во-первых переходная матрица системы S содержит в себе большое количество нулей, а во-вторых, на каждом шаге наблюдается, и,

соответственно, оценивается фактически лишь одна строка изображения. Кроме того, пересчет коэффициента усиления (3.39), в силу стационарности модели, может быть осуществлен заранее. Исходя из этих соображений, можно оценить вычислительную сложность алгоритма. Предварительный пересчет матричных коэффициентов фильтра в (3.39) требует $O(M_2^4 + (3n_y^2 + n_y)M_2^3)$ элементарных операций умножения, где M_2 – длина строки изображения. При условии предварительного пересчета (3.39), вычислительная сложность оценки одной строки (3.40) будет $O(n_y(n_y + 1)M_2^2)$.

Рассмотрим теперь возможность сокращения числа арифметических операций в (3.40) и синтеза квазиоптимального скалярного алгоритма оценивания.

Рассмотрим структуру матрицы усиления K_k . Она состоит из n_y матричных блоков размера $M_2 \times M_2$:

$$K_k = P_k H^T V_\theta^{-1} = V_\theta^{-1} \begin{bmatrix} P_{k,k} \\ \hline P_{k-1,k} \\ \hline \dots \\ \hline P_{k-n_y+1,k} \end{bmatrix},$$

где $P_{i,j} = M \{ \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j^T \} = M \{ (\bar{x}_i - \hat{\bar{x}}_i)(\bar{x}_j - \hat{\bar{x}}_j)^T \}$ – матрица ковариации ошибок оценивания i -й и j -й строк изображения.

Пусть пересчет установившегося значения коэффициента усиления (3.29) уже осуществлен. В этом случае

$$K = \lim_{k \rightarrow \infty} K_k = V_\theta^{-1} \begin{bmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k,k} \\ \hline \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k-1,k} \\ \hline \dots \\ \hline \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k-n_y+1,k} \end{bmatrix} = V_\theta^{-1} \begin{bmatrix} P \\ \dots \\ P \\ \dots \\ P \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

где P – установившееся значение матрицы ковариации ошибки оценивания одной строки изображения; V_θ – дисперсия шума наблюдения. Поскольку на каждом шаге наблюдаются, и, соответственно, оцениваются лишь первые M_2 элементов вектора \bar{y}_l , то для вычисления оценки используется лишь первые M_2 строк матрицы K .

Анализ данного выражения и формулы (3.40) показывает, все соображения, использованные для синтеза квазиоптимального алгоритма фильтрации СП на основе моделей кратности 1, могут быть применены и в данном случае. Действительно, выделим ℓ -ю строку соотношения (3.40) и применим к ней все выше изложенные рассуждения. Очевидно, что и все коэффициенты, определяющие скалярную АР-модель состояния и наблюдения для u_ℓ^k будут верны и в данном случае.

Рассмотрим возможность использования для представления процесса изменения u_ℓ^k авторегрессий более высоких порядков. Допустим, что модель состояния u_ℓ^k записывается следующим образом:

$$u_\ell = \sum_{i=1}^m \gamma_{\ell i} u_{\ell-i} + \xi_\ell.$$

Для каждого элемента u_ℓ необходимо определить неизвестные параметры $\gamma_{\ell i}$ и дисперсию порождающего шума $V_{\xi_\ell}^2$. Для этого домножим (3.44) на u_{l-s} , $s = 1 \dots m$ и найдем математическое ожидание:

$$P_{\partial \ell, \ell-s} = \sum_{i=1}^m \gamma_{\ell i} P_{\partial \ell-i, \ell-s}, \quad s = 1 \dots m. \quad (3.45)$$

Полученное выражение представляет собой систему m линейных уравнений относительно неизвестных $\gamma_{\ell i}$. Возведя (3.44) в квадрат, при условии известных $\gamma_{\ell i}$, получим уравнение для нахождения $V_{\xi_\ell}^2$:

$$V_{\xi\ell} = P_{\partial\ell, \ell} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \gamma_{li} \gamma_{lj} P_{\partial\ell-i, \ell-j}. \quad (3.46)$$

Из приведенных рассуждений ясно, вычислительная сложность квазиоптимального алгоритма в случае модели с корнями произвольной кратности имеет тот же порядок, что и в случае кратности 1. При использовании в модели (3.34) авторегрессий более высокого порядка, вычислительная сложность вырастает пропорционально порядку авторегрессии.

Заключение

Рассмотренные в монографии методы представления и статистического анализа многомерных изменяющихся изображений могут быть использованы в разнообразных приложениях. Все предложенные процедуры связаны со случайными полями, заданными в дискретном пространстве и времени. Это позволяет проектировать цифровые системы имитации, оценивания и обнаружения аномалий непосредственно на базе полученных соотношений. Вместе с тем за рамками изложения остались по крайней мере три важных задачи, постоянно находящихся в поле зрения коллектива Ульяновского центра обработки изображений.

Первая из них – рекуррентное по времени и пространству оценивание СП на многомерных сетках. Дело в том, что рассмотренные методы тензорной фильтрации и прогнозирования предполагают совместную обработку всех $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ наблюдений $\{z_j^i, \bar{j} \in J\}$ каждого кадра n -мерного изображения. Понятие марковости СП и рекуррентности вычислений в этом случае относятся к последовательности кадров и процесс обработки при больших размерах кадров может быть связан со значительными техническими проблемами. По этому возникает вопрос о возможности

построения оптимальных или близких к ним процедур фильтрации СП x_j^t при развертке наблюдений $z_j^t, j \in J$, в одномерную или векторную последовательность с одновременным использованием каузальных моделей (4), (5). Анализ показывает [11, 12], что при решении задач оценивания СП на фоне помех необходимо отказаться либо от глобальной оптимальности, либо от предположения, что структура оптимального фильтра должна быть идентична уравнениям состояния (4), (5). Это приводит к многообразию форм построения оптимальных процедур рекуррентного по развертке оценивания СП [11, 12].

Второй класс задач связан с оценивание параметров геометрических трансформаций многомерных сеток J . Такие проблемы возникают, например, при смещениях или поворотах апертуры датчиков, а также при нестабильном считывании информации в телевизионных системах. В настоящее время разработаны весьма эффективные прямые и рекуррентные процедуры оценивания деформаций сеток, находящие широкое применение в разнообразных приложениях [5, 6, 11-14, 36, 37].

Наконец, при обработке реальных неоднородных и нестационарных изображений возникают задачи адаптации рассмотренных процедур обнаружения и фильтрации многомерных сигналов. Для этих целей были разработаны достаточно простые безидентификационные алгоритмы псевдоградиентной адаптации [17, 18, 26, 27]. Областью применения таких алгоритмов является адаптивная поддержка весовых коэффициентов и пороговых уровней обнаружителей сигналов [17, 18], декорреляция изображений [26], а также оценивание деформаций многомерных сеток [27].

Литература

1. Бакут П.А., Колмогоров Г.С. Сегментация изображений: Методы выделения границ областей // Зарубежная радиоэлектроника. – 1987, №10.
2. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988, 168 с.
3. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.
4. Богомолов Р.А., Крашенинников В.Р. Ковариационные функции авторегрессионных моделей случайных полей // Радиотехника и электроника, 1986, №6, с.11-21.
5. Богуславский И.А. Прикладные задачи фильтрации и управления. – М.: Наука, 1983. – 400 с.
6. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов // Пер. с англ.: Под ред. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1974, кн. 1. – 406 с.
7. Бронников А.В., Воскобойников Ю.Б. Комбинированные алгоритмы нелинейной фильтрации зашумленных сигналов и изображений // Автометрия. – 1990, №1.
8. Быков Р.Е., Гуревич С.Б. Анализ и обработка цветных и объемных изображений. – М.: Радио и связь, 1984. – 248 с.
9. Васильев К.К. Анализ эффективности фильтрации многомерных случайных полей // Методы обработки сигналов и полей. Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1992, с. 18-27.
10. Васильев К.К. Каузальное представление случайных полей на многомерных сетках // Методы обработки сигналов и полей. Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1995, с. 4-22.
11. Васильев К.К. Прием сигналов при мультипликативных помехах. – Саратов: СТУ, 1983, – 128 с.

12. Васильев К.К. Рекуррентное оценивание случайных полей на многомерных сетках // Методы обработки сигналов и полей. Саратов, 1986, с. 18-33.
13. Васильев К.К., Герчес В.Г. Анализ эффективности фильтрации плоских изображений // Вероятностные модели и обработка случайных сигналов и полей: Сб. научн. тр. – Киев: УМК ВО, 1991, с. 115-122.
14. Васильев К.К., Герчес В.Г. Исследование эффективности фильтрации изображений при треугольной развертке // Методы обработки сигналов и полей: Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1992, с. 33-44.
15. Васильев К.К., Герчес В.Г. Калмановская фильтрация изображений // Методы обработки случайных полей: Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1990, с. 105-111.
16. Васильев К.К., Герчес В.Г. Квазиоптимальное оценивание многомерных изображений в реальном масштабе времени // Імовірнісні моделі та обробка випадкових сигналів і полів: Збірник наукових праць. – Том 2, Частина 2 / Під ред. Я.П.Драгана, В.О.Омельченка. – Львів – Харків – Тернопіль, 1993, с. 48-52.
17. Васильев К.К., Герчес В.Г. Рекуррентные методы обработки изображений // Тез. докл. НТК «Научно-технический прогресс и инженерное образование», ч.3, Ульяновск: УлПИ, 1990, с. 11-12.
18. Васильев К.К., Герчес В.Г. Погрешности измерения корреляционных функций случайных полей // Тез. докл. Всесоюзной НТК «Идентификация, измерение характеристик и имитация случайных сигналов», Новосибирск: НЭТИ, 1991, с. 127.
19. Васильев К.К., Герчес В.Г. Применение методов фильтрации изображений в адаптивных системах связи // Тез. докл. НТ школы-семинара «Цифровая обработка сигналов в системах связи и

- управления», Ростов Великий, МГП ВНТО РЭС им. А.С.Попова, 1991, с.12.
20. Васильев К.К., Герчес В.Г. Эффективность обнаружения точечных сигналов на фоне мешающих изображений // Тез. докл. Украинской респ. школы-семинара «Вероятностные модели и обработка случайных сигналов и полей», Черкассы: ЧФКПИ, 1991, с.15.
21. Васильев К.К., Герчес В.Г. Эффективность рекуррентного оценивания случайных полей // Статистический синтез и анализ информационных систем. / Сб. докл. 12-го НТ семинара; М.: Моск. техн. ун-т связи и информатики, 1992, с. 100-102.
22. Васильев К.К., Кадеев Д.Н. Алгоритмы обнаружения и оценивания параметров сигналов на многомерных сетках // Статистические методы обработки сигналов. – Новосибирск: НЭТИ, 1991, с. 60-69.
23. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Методы фильтрации многомерных случайных полей. – Саратов: СГУ, 1990. – 128 с.
24. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Тензорная фильтрация случайных полей при марковских смещениях. – В сб.: Методы статистической обработки изображений и полей. – Новосибирск: НЭТИ, 1986, с. 113-126.
25. Васильев К.К., Попов О.В. Оптимальные и квазиоптимальные алгоритмы компенсации мешающих изображений // Тезисы докладов международной научной конференции «Результаты и перспективы исследования планет» – Ульяновск: УлГТУ, 1997, с. 78-79.
26. Васильев К.К., Попов О.В. Авторегрессионные модели случайных полей с кратными корнями // Труды 4-й конференции «Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии» – Новосибирск, 1998, Ч. 1, с. 258-260.
27. Васильев К.К., Попов О.В. Авторегрессионные модели случайных полей с кратными корнями // Труды международной научно-

- технической конференции «Нейронные, реляторные и непрерывнологические сети и модели» (19-21 мая 1998 года) – Ульяновск: УлГТУ, Т. 1, 1998, с. 78.
28. Васильев К.К., Спектор А.А. Статистические методы обработки многомерных изображений // Методы обработки сигналов и полей. Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1992, с. 3-18.
29. Васюков В.Н. Квазиоптимальный алгоритм двумерной фильтрации // Методы статистической обработки изображений и полей, Новосибирск, 1984, с. 14-18.
30. Ванштейн Л.А., Зубаков В.Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. – М.: Сов. радио, 1960.
31. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1968.
32. Гимельфарб Г.Л., Залесный А.В. Гиббсовские случайные поля как вероятностные модели изображений на нижнем уровне вычислительного зрения. // Методы обработки сигналов и полей. Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1995, с. 22-34.
33. Гинзбург В.М. Формирование и обработка изображений в реальном времени. – М.: Радио и связь, 1986 – 232 с.
34. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988, 488 с.
35. Девис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление / Пер. с англ. – М.: Наука, 1984, 208 с.
36. Джайн А.К. Успехи в области математических моделей для обработки изображений // ТИИЭР, 1981, Т. 69, №5, с. 9-39.
37. Драган Я.П., К.К. Васильев и др. Состояние и перспективы развития вероятностных моделей случайных сигналов и полей. – Харьков: ХИРЭ, 1993, 156 с.

38. Казаринов Ю.М., Соколов А.И., Юрченко Ю.С. Субоптимальные алгоритмы линейной фильтрации в дискретном масштабе времени // Зарубежная радиоэлектроника. – 1987, №8.
39. Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике /Пер. с англ.: Под ред. С.П. Чеботарева. М., 1976, 223 с.
40. Катковник В.Я. Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. – М.: Наука, 1976, 488 с.
41. Католин Н.П. Синтез и анализ некоторых квазиоптимальных двумерных дискретных линейных фильтров // Радиотехника и электроника. 1981, Т.26, №2, с. 333-362.
42. Крашенинников В.Р. Волновые модели многомерных случайных полей // Методы обработки сигналов и полей: Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1987, с. 5-13.
43. Крашенинников В.Р., Ташлинский А.Г. Простейшая векторная модель многомерного авторегрессионного случайного поля // Методы обработки сигналов и полей в условиях помех. – Новосибирск, 1988, с. 9-18.
44. Кузовков Н.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. – М.: Машиностроение, 1982, 216 с.
45. Кучеренко К.И., Очин Е.Ф. Двумерные медианные фильтры для обработки изображений // Зарубежная радиоэлектроника. – 1986, №6.
46. Кловский Д.Д., Сойфер В.А. Обработка пространственно-временных сигналов (в каналах передачи информации). – М.: Связь, 1976, 208 с.
47. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1986, 304 с.
48. Коростелев А.П. Стохастические рекуррентные процедуры (локальные свойства). – М.: Наука, 1984, 208 с.

49. Карлин С. Основы теории случайных процессов. – М.: Мир, 1971, 536 с.
50. Краснов А.В., Попов О.В. Корреляционные функции авторегрессионных моделей случайных полей с кратными корнями // Тез. докл. Всероссийской научно-практической конференции (с участием стран СНГ) «Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем». – Ульяновск: УлГТУ, 1998, с. 15-17.
51. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1976, Кн. 2, 392 с.
52. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1976, Кн. 3, 288 с.
53. Леман Э. Теория точечного оценивания / Пер. с англ. – М.: Наука, 1991, 448 с.
54. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1991, 432 с.
55. Малышев В.А., Минлос Р.А. Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. – М.: Наука, 1988, 288 с.
56. Миньсу Ш., Дайхун Ч. Алгоритм обнаружения объекта, основанный на графе смежности областей // ТИИЭР, 1984, №7, с. 263.
57. Обработка сигналов в радиотехнических системах: Уч. пособие / Долматов А.Д., Елисеев А.А., Лукошкин А.П., Оводенко А.А., Устинов Б.В.; Под ред. А.П.Лукошкина. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987, 400 с.
58. Параев Ю.Н. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Сов. радио, 1976, 184 с.
59. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Изд-во МГУ, 1990, 384 с.

60. Попов О.В. Алгоритм калмановской фильтрации изображений // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – Ульяновск: УлГТУ, 1999, №2, с. 36-38.
61. Попов О.В. Анализ авторегрессионных моделей случайных полей с кратными корнями // Труды Ульяновского научного центра «Ноосферные знания и технологии» Российской академии естественных наук. Ульяновск: УНЦ РАЕН, 1999, т.2, вып. 1, с. 122-128.
62. Попов О.В. Сравнение эффективности различных алгоритмов фильтрации случайных полей // Тезисы докладов 2-й международной научно-технической конференции «Интерактивные системы: проблемы человеческо-компьютерного взаимодействия» – Ульяновск: УлГТУ, Ч. 2, 1997, с. 65-67.
63. Попов О.В., Перязев С.В. Имитация последовательности спутниковых изображений // Тез. докл. Всероссийской научно-практической конференции (с участием стран СНГ) «Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем». – Ульяновск: УлГТУ, 1998, с. 23-24.
64. Прикладная теория случайных процессов и полей / Васильев К.К., Драган Я.П., Казаков В.А. и др.; Под ред. Васильева К.К., Омельченко В.А. – Ульяновск: УлГТУ, 1995, 256 с.
65. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / Пер. с англ.; Под ред. Д.С. Лебедева. М., 1982, Кн. 1, 312 с.
66. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / Пер. с англ.; Под ред. Д.С. Лебедева. М., 1982, Кн. 2, 480 с.
67. Пулькин С.П. Вычислительная математика. – М.: Просвещение, 1974.
68. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. – М., 1986, 264 с.

69. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
70. Розанов Ю.А. Марковские случайные поля. – М., 1981, 256 с.
71. Розанов Ю.А. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. – М.: Физматлит, 1995, 256 с.
72. Самсонов А.Н. Квазиоптимальная рекуррентная фильтрация марковского случайного поля // Методы обработки сигналов и полей: Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1990, с. 30-36.
73. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982, 384 с.
74. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. Пер. с англ. Под ред. Проф. Б.Р. Левина. М., «Связь», 1976, 496 с.
75. Синева И.С., Левина И.Ю. Марковские случайные поля в анализе и обработке изображений: обзор // Сб. докл. 1-й Международной Конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения» М.: Связь и бизнес, 1998, Т. 2, с. 219-226.
76. Соколов Н.В. Введение в теорию многомерных матриц. — Киев: Наукова думка, 1972, 176 с.
77. Спектор А.А. Двухэтапная фильтрация случайных полей при действии помех // Методы обработки цифровых сигналов и полей в условиях помех. Новосибирск, 1987, с. 3-9.
78. Спектор А.А. Многомерные дискретные марковские поля и их фильтрация при наличии некоррелированного шума // Радиотехника и электроника. 1985, Т.30, №5, с. 965-972.
79. Спектор А.А. Рекуррентная фильтрация дискретных гауссовских полей при действии гауссовских помех // Тез. докл. II Всесоюзного семинара секции «Теория информации» ЦП ВНТО РЭС им. А.С. Попова – Ч.1, Ульяновск : УлПИ, 1989, с. 61-62.

80. Спектор А.А., Малов Ю.Э. Исследование точности рекуррентной фильтрации изображения // Методы обработки сигналов и полей: Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1987, с. 38-44.
81. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982, 624 с.
82. Хабиби А. Двумерная байесовская оценка изображений // ТИИЭР, 1972, Т.60, №7, с. 153-159.
83. Чураков Е.П. Итеративные алгоритмы оценивания параметров случайных процессов и полей. – Автометрия, 1975, №4, с. 31-36.
84. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985, Ч.1, 336 с.
85. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985, Ч.2, 400 с.
86. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. – М.: Наука, 1976, 272 с.
87. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. М., 1979, 312 с.
88. Ahmed M.S., Tahboub K.K. Recursive Wiener Filtering for Image Restoration // IEEE Trans., 1986, Vol. assp – 34, Apr., pp. 990-993.
89. Besag J. On the statistical analysis of dirty pictures. J Royal Statistical Soc., Serie B, Vol. 48, No 3, 1986, pp. 259-302.
90. Dikshit S.S. A Recursive Kalman Window Approach to Image Restoration // IEEE Trans., 1984, Vol. com – 32, Jan., pp. 125-139.
91. Kadeev D.N. Applicative Procedure for Simulating Nonuniform Images // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 6, No. 1, 1996, p.150.
92. Mikheev P.V., Khirug S.S., Yakin G.Yu. A Method for the Representation of Multizone Images // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 6, No. 1, 1996, pp.87-88.

93. Quinn M.J. Designing Efficient Algorithms for Parallel Computers. N.Y.: Mc. Graw Hill B.C., 1987. 288 p.
94. Vasil'ev K.K., Popov O.V. Autoregression Models of Random Fields with Multiple Roots // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 9, No. 2, 1999, pp.327-328.
95. Vasil'yev K.K., Skrynnikov A.V. Application of Spectral Methods for Recurrent Image Processing // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 6, No. 1, 1996, pp.104-105.
96. Woods J.W. Two-dimensional Kalman filtering //Topics in Applied Physics, Berlin, 1981, v.42, pp.155-208.

101. Алексеев А.С., Пяткин В.П., Дементьев В.Н. и др. Автоматизированная обработка изображений природных комплексов Сибири. - Новосибирск: Наука, 1988. - 224 с.
102. Pratt W.K. Digital Image Processing. J. Willey - Interscience Publication, J. Willey and Sons. - New York / Chickester / Brisbane / Toronto 1978. - 700 p.
103. Woods J.W. Two - dimensional Kallman Filtering - Topics in applied Physics. - Berlin, e.a., 1981, v.42, p.p.155-208.
104. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. -М.: Наука, 1979. - 312 с.
105. Васильев К.К., Мельников В.Н., Попов В.Н., Флягин А.Е. Методы и средства дистанционного зондирования атмосферы с использованием метеорологических радиолокаторов в целях предупреждения чрезвычайных ситуаций. - Безопасность жизнедеятельности.-С. - Петербург: НИИ РЭС ПЧС, 1993, с. 26 - 34.
106. Васильев К.К. Цифровая обработка последовательностей изображений в задачах глобального мониторинга земной поверхности,

- медицины, управления воздушным движением, радио - и гидролокации.
- Конверсия оборонного комплекса, двойные технологии. - М.: РИА, 1995, с. 71-72.
107. Васильев К.К. Статистический синтез и анализ информационных систем. - Вестник УлГТУ, 1997, с. 110-118.
108. Виттих В.А., Сергеев В.В., Соيفер В.А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. - М.:Наука, 1962. - 214 с.
109. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. - М.:Радио и связь, 1987. - 296 с.
110. Berger J.O. Statistical Decision theory and Bayesian analysis. Springer-Verlag, N.I., 1985. - 320 p.
111. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Методы фильтрации многомерных случайных полей. Саратов: СГУ, 1990. - 128 с.
112. Васильев К.К., Драган Я.П., Казаков В.А. и др. Прикладная теория случайных процессов и полей. //Под ред Васидьева К.К., Омельченко В.А. Ульяновск: УлГТУ, 1995. - 256 с.
113. Васильев К.К., Балабанов В.В. Обнаружение точечных сигналов на фоне мешающих изображений. - Радиотехника, 1991, №10, с. 86 - 89.
114. Васильев К.К. Обнаружение сигнала на последовательности изображений. - Математические и технические проблемы обработки визуальной информации. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1992, с. 49 - 64.
115. Васильев К.К., Спектор А.А. Статистические методы обработки многомерных изображений. - Методы обработки сигналов и полей. - Ульяновск: УлПИ, 1992, с.3-19.
116. Тараторин А.М. Цифровая обработка динамических полей. - Цифровая оптика. Обработка изображений и полей в экспериментальных исследованиях. - М: Наука, 1990, с. 78 -105.

117. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Адаптивные алгоритмы обнаружения аномалий на последовательности многомерных изображений, - Компьютерная оптика, 1995, вып. 14-15, ч. 1, с. 125-132.
118. Крашенинников В.Р., Капралов В.П. Адаптивные алгоритмы прогноза однородных изображений. - Техника телевидения, 1990, №5, с. 53-61.
119. Sage A.P., Melse J.L. Estimation Theory with Application to Communication and Control. N.Y. McGraw-Hill, 1972. - 496 p.
120. Васильев К.К. Байесовское различение и оценивание случайных последовательностей. - Радиотехника и электроника, 1985, т. 30, №3, с. 476-485.
121. Васильев К.К. Критерий максимума среднего выигрыша для оптимального решения многомерных негауссовских задач. - Вестник УлГТУ, 1998, №1, с. 3-12.
122. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. - М.: МГУ, 1990 - 128 с.
123. Dudgeon D.E., Mersereau R.M. Multidimensional digital signal processing. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1984. - 488p.
124. Крашенинников В.Р., Агеев С.А. Псевдоградиентная адаптация решающего правила обнаружения сигналов на фоне случайных полей. - Статистические методы обработки изображений. - Новосибирск: НГТУ, 1993, с. 39-45.
125. Васильев К.К., Скрынников А.В. Применение спектрального анализа для оптимальной фильтрации изображений с малыми вычислительными затратами. - Методы обработки сигналов и полей. Ульяновск: УлГТУ, 1995, с. 99-103.
126. Vasilyev K.K., Ageev S.A. The Adaptive Decorrelation Algorithm of Signal Detection. - Proceedings of the 1st Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications". - Moscow: ICSTI, 1998, v. 2E, p. 133-136.

127. Krasheninnikov V.R., Ageev S.A., Tashlinskii A.G., Menzorov A.V., Vinokurov V.A. Pseudogradient Algorithms of the Detection of Signals in a Sequence of Images.- Pattern Recognition and Image Analysis, 1996, vol.6, № 4, pp.728-732.
128. Васильев К.К. Анализ эффективности фильтрации многомерных случайных полей. - Методы обработки сигналов и полей. - Ульяновск: УлГТУ, 1992, с.17-27.
129. Спектор А.А. Гауссовские марковские дискретные поля с дробно-рациональными спектрамию.- Методы обработки сигналов и полей.- Ульяновск : УлПИ, 1990, с. 10-19.
130. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику.- М.: Наука, 1966.-404 с.
131. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971.-1108 с.
132. Dikshit S.S. A recursive Kalman window approach to image restoration.- IEEE Trans., 1982, vol. ASSP-30, Febr., pp. 125-139.
133. Bellman R. Invariant Imbedding and Random Walk.- Proc. Amer. Math. Soc., 1962, v.13, pp. 251-254.
134. Habibi A. Two-dimensional Bayesian Estimate of Images. - Proc. IEEE, vol. 60, July 1972, pp. 873-883.
135. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения.- Автоматика и телемеханика, 1973, №3, с. 45-68.
136. Ташлинский А.Г. Оценка межкадрового сдвига изображений.- Методы обработки сигналов и полей.- Ульяновск : УлГТУ, 1995, Ульяновск, №5, с. 34-44.
137. Tashlinskii A.G. Estimation of Image Distortions in a Sequence of Frames, Pattern Recognition and Image Analysis, 1996, vol.6, № 4, pp.728-732.