

Министерство образования Российской Федерации
Ульяновский государственный технический университет

К. К. Васильев

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ
(следающие системы)**

2-е издание

Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по образованию в области автоматки, электроники,
микроэлектроники и радиотехники в качестве учебного пособия
для студентов, обучающихся по направлению 5511
и специальностям 2008 и 2205

Ульяновск 2001

УДК 621.37/39 (075)
ББК 32 я 7
В19

Рецензенты: ОКБ Ульяновского механического завода;
д-р техн. наук, профессор Кумунжиев К. В.

Васильев К. К.

В 19 Теория автоматического управления (следящие системы): Учебное пособие.—2-е изд.— Ульяновск, 2001. — 98 с.
ISBN 5-89146-234-6

Приведены основные понятия и определения теории следящих систем автоматического управления, изложены методы анализа и синтеза следящих систем, особое внимание уделено оптимальным непрерывным и дискретным следящим системам. Может быть использовано при чтении курсов «Основы автоматизации и системы автоматического управления», «Радиоавтоматика», «Теория автоматического управления» и др.

УДК 621.37/39 (075)
ББК 32 я 7

ISBN 5-89146-234-6

© Васильев К. К., 2001
© Оформление. УлГТУ, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО 2-МУ ИЗДАНИЮ.....	4
ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ	6
1.1. Управляемые системы	6
1.2. Линейные системы управления	12
2. АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ	23
2.1. Устойчивость систем управления	23
2.2. Динамические ошибки систем управления	31
2.3. Эффективность систем управления при воздействии помех	39
3. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ	52
3.1. Оптимальные стационарные системы. Фильтр Винера	53
3.2. Оптимальные реализуемые системы управления. Фильтр Калмана	57
3.3. Многомерные оптимальные системы	65
4. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ...	74
4.1. Цифровые системы управления	74
4.2. Цифровые фильтры	81
4.3. Действие помех на цифровые системы управления	86
4.4. Многомерные и адаптивные системы управления	91
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	96
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	97

ПРЕДИСЛОВИЕ КО 2-МУ ИЗДАНИЮ

Первое издание учебного пособия быстро разошлось и оказалось особенно полезным для студентов младших курсов радиотехнических специальностей. При подготовке второго издания пособие было значительно переработано. В него вошли новые примеры, были исправлены ошибки и опечатки, заново отредактирован текст.

ВВЕДЕНИЕ

Повсюду в окружающем нас мире (природе, технике, человеческом обществе) протекают различные процессы, характер которых зависит от множества условий и факторов. Изменяя условия протекания процессов, человек может влиять на их характер, изменять их, приспособлять к своим целям. Это вмешательство в естественный ход процесса и представляет собой сущность управления в широком смысле слова. Можно сказать, что управление представляет собой такую организацию того или иного процесса, которая обеспечивает достижение определенных целей.

Управление, осуществляемое без участия человека, называется *автоматическим управлением*. В учебном пособии рассматриваются системы, позволяющие производить автоматическое управление различными объектами. Простыми примерами таких систем служат стабилизаторы напряжения, системы регулировки усиления и автоматической подстройки частоты генераторов. Более сложными являются радиолокационные системы сопровождения движущихся объектов по дальности или угловым координатам. Все названные и многие другие системы описываются с помощью схожих математических моделей; для их исследования применяются одни и те же методы теории автоматического управления.

В первом разделе пособия представлены основные определения и классификация систем автоматического управления. Второй раздел посвящен анализу устойчивости, точности и помехоустойчивости систем с известной структурой. Изучение третьего раздела позволит познакомиться с современными подходами к решению задачи проектирования оптимальных систем управления. В заключительном четвертом разделе рассмотрены особенности построения дискретных систем управления, которые могут быть непосредственно реализованы на базе электронных вычислительных машин.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Понятие системы

Системой называется совокупность целенаправленно взаимодействующих объектов любой природы. Примерами систем могут служить весь окружающий нас мир или любая его часть, человеческое общество, отрасль народного хозяйства, завод, летательный аппарат, вычислительная машина, организм человека или животного и т. д.

Чтобы применить математические методы для изучения функционирования какой-либо системы, необходимо построить ее математическую модель. Для этого нужно определить совокупность величин, которые могут служить количественными характеристиками функционирования системы. Затем следует установить соотношения между этими величинами, приближенно описывающие функционирование реальной системы.

Всякая система взаимодействует с окружающей средой, что-то получает извне и после переработки что-то отдает в окружающую среду. В этом заключается работа системы.

Летательный аппарат получает на входе (от летчика или автономной системы управления) управляющие воздействия – положение его органов управления (рулей и дросселей двигательной установки) как функции времени. Вследствие этого изменяется ориентация осей летательного аппарата и направление его движения. В результате работы такой системы получается определенная траектория полета. Заметим, что эта траектория определяется и массой других внешних факторов, связанных, например, с метеоусловиями полета.

Первым шагом к построению математической модели системы является математическое описание того, что система получает на входе и выдает на выходе.

Величины, определяющие внешние воздействия на систему, называются ее *входными сигналами*. Величины, определяющие действие системы на окружающую среду, называются *выходными сигналами* системы.

Кроме входных и выходных сигналов, для построения математической модели вводятся вспомогательные величины, характеризующие внутреннее состояние системы в каждый момент времени. Такие величины называются *переменными состояниями системы*.

Множество всех возможных входных сигналов системы будем называть ее *пространством входных сигналов*. Множество всех выходных сигналов – *пространством выходных сигналов*. Множество всех возможных состояний системы будем называть ее *пространством состояний*.

Математическая модель системы

После определения входных и выходных сигналов и переменных состояний системы для получения ее математической модели нужно установить соотношения между этими величинами. Эти соотношения могут быть относительно простыми или весьма сложными, носить детерминированный или вероятностный характер. *Математической моделью системы* называется совокупность четырех элементов:

- 1) пространство состояний;
- 2) пространство входных сигналов;
- 3) пространство выходных сигналов;
- 4) соотношения, связывающие входные и выходные сигналы и переменные состояния.

Пример. Движение материальной точки массой m описывается с помощью второго закона Ньютона:

$$\bar{U}(t) = m\bar{a}(t) \quad \text{или} \quad m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \bar{U}(t).$$

Входным сигналом служит сила $\bar{U}(t)$, действующая на точку, а выходным – вектор $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ положения точки в трехмерном пространстве. Состояние точки в каждый момент времени определяется ее координатами \bar{x} и вектором скорости $\bar{v} = d\bar{x}/dt$.

Таким образом, вектором состояния служит шестимерный вектор (\bar{x}, \bar{v}) . Пространством входных сигналов является множество всех трехмерных функций времени. Пространство выходных

сигналов представляет собой множество непрерывных трехмерных функций времени. Пространством состояний является шестимерное пространство.

Управляемые системы

Предположим, что нам точно известна математическая модель некоторой системы, которую представим в виде рис. 1. Это означает, что при любом заданном входном сигнале $U(t)$ можно определить, как будет вести себя эта система. Пусть, например, $x(t)$ – координата материальной точки на прямой. Тогда уравнение движения $m \frac{d^2x}{dt^2} = U(t)$ и при заданной силе $U(t)$ можно построить график изменения состояния системы в пространстве состояний (рис. 2).



Рис. 1

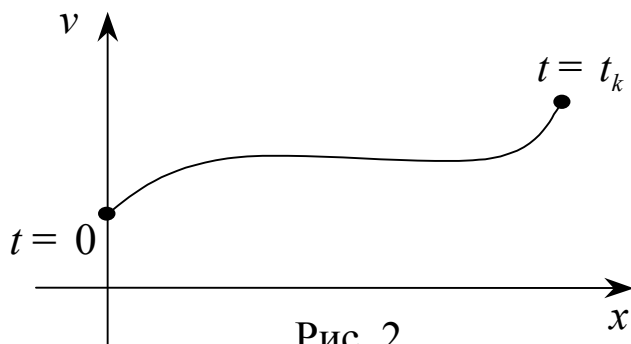


Рис. 2

В том случае, когда внешнее воздействие $U(t)$ формируется без нашего участия, задача управления системой отсутствует. Например, если $U(t)$ – сила притяжения Земли. Вместе с тем, существует очень широкий класс задач управления, связанный с требуемым вмешательством в процесс изменения состояния системы. Этот класс задач возникает в том случае, когда все или часть внешних воздействий $U(t)$ может формироваться специально для достижения заданной цели. Например, необходимо переместить грузик массой m (рис. 3) из состояния $(x = 0, V = 0)$ в состояние $(x = x_0, V = 0)$ за наименьшее время.

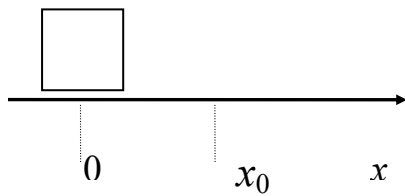


Рис. 3

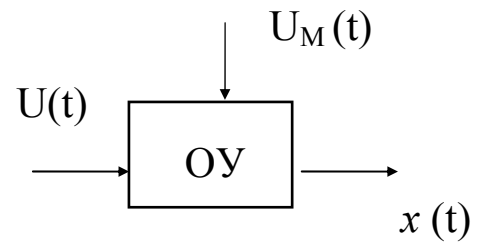


Рис. 4

В этом случае мы должны сами выбрать величину и направление силы $U(t)$, обеспечивающие наилучшее значение показателя качества - времени перемещения. Даже в рассматриваемом простейшем случае это не тривиальная задача, если учесть дополнительные ограничения на величину $U(t)$, связанные, например, с механической прочностью грузика. Подумайте, как нужно поступить, если $|U(t)| \leq U_0$.

Итак, если имеется возможность управления системой, т. е. формирования входных сигналов $U(t)$, и цель такого управления, то система называется **объектом управления** (рис. 4). Кроме управляющих сигналов $U(t)$ на вход объекта управления могут поступать мешающие сигналы $U_M(t)$.

Полное математическое описание управляемой системы состоит из математической модели объекта управления, сформированной цели управления и показателя качества, позволяющего сравнивать между собой различные способы достижения цели.

Показатели качества управления

Рассмотрим некоторые показатели или критерии качества управления.

Предположим, что некоторый объект управления необходимо перевести из исходного состояния $x(t_0)$ в заданное состояние $x(t_k)$ с помощью какого-либо управления $U(t)$. Обычно существует множество управлений $U(t)$, обеспечивающих выполнение задачи. Показатель качества предназначен для сравнения всех возможных управлений между собой и выбора наилучшего или оптималь-

ного управления $U_0(t)$, минимизирующего этот показатель. Одним из показателей может служить время $T = t_k - t_0$ достижения цели. Наилучшим или оптимальным будет управление $U_0(t)$, соответствующее минимальному T . В этом случае говорят об оптимальных по быстродействию системах.

В других задачах величина $J = \int_{t_0}^{t_k} U^2(t) dt$ соответствует

расходу топлива на перемещение объекта. Такие задачи характерны, например, для управления ракетами. В этом случае из множества допустимых управлений желательно выбрать такое, которое обеспечивает $\min_{U(t)} J$.

Очень часто требуется обеспечить равенство выходного сигнала системы $x(t)$ заданной величине $g(t)$. В этом случае все критерии качества, как правило, основаны на величине рассогласования $e(t) = g(t) - x(t)$ между заданным и действительным состоянием системы.

Например, $J = \max_{t_0 \leq t \leq t_k} e(t)$ или $J = \int_{t_0}^{t_k} e^2(t) dt$. Такие системы называются *системами слежения*.

В частном случае, когда $g(t) = g_0$ — *системами стабилизации*. В системах слежения управляющее воздействие $U(t)$ формируется на основании измерения величины ошибки $e(t)$. При этом системы приобретают замкнутую структуру, включающую объект управления, измеритель рассогласования и устройство управления (рис. 5).

Объект управления вместе с устройством управления образуют систему управления. На рис. 5 представлена замкнутая систе-

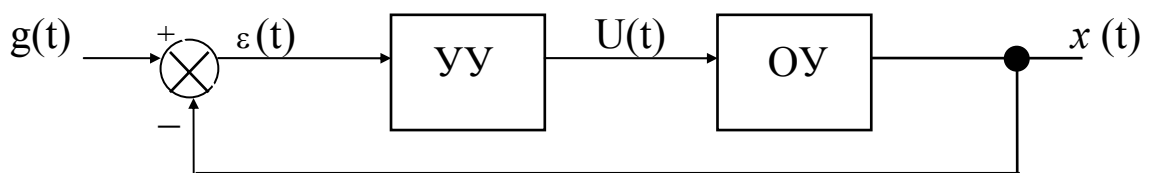


Рис. 5

ма управления. В таких системах выходной сигнал $x(t)$ передается на вход и сравнивается с заданной функцией $g(t)$. Цепь, по которой происходит передача сигнала, называется *цепью главной обратной связи*.

В качестве примера следящей системы рассмотрим автоматическое управление углом поворота вала, который может быть связан, например, с направленной антенной для приема спутниковых сигналов, рулевым механизмом летательного аппарата или валом прокатного стана. Следящий вал приводится во вращение электродвигателем (ДВ) постоянного тока (рис. 6).

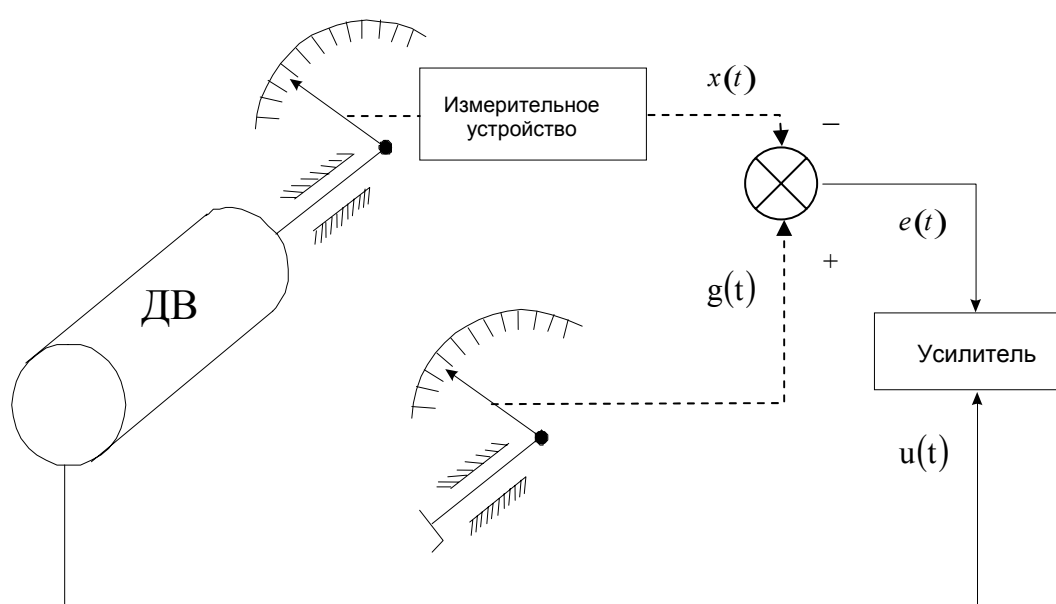


Рис. 6

Напряжение $u(t)$, подводимое к двигателю, пропорционально рассогласованию $e(t) = g(t) - x(t)$ между заданным углом поворота $g(t)$ и действительным угловым положением $x(t)$ вала двигателя.

Назначение такой системы заключается в обеспечении минимума рассогласования $e(t)$. На рис. 7 представлена эквивалентная схема такой следящей системы.

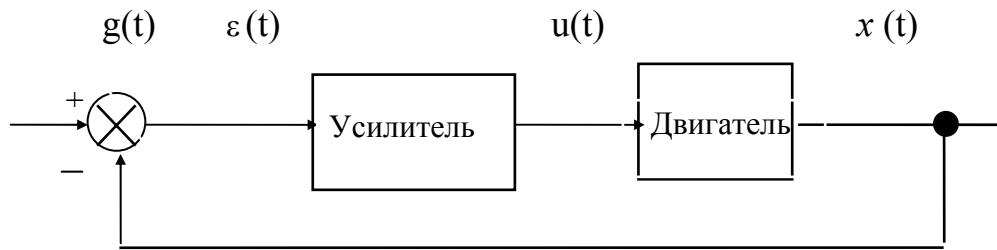


Рис.7

Для того, чтобы дать математическое описание системы, необходимо установить связь между углом $x(t)$ поворота вала двигателя и напряжением $u(t)$. Если не учитывать инерционность двигателя, то можно приблизительно полагать, что скорость вращения $\Omega(t)$ пропорциональна $u(t)$, т. е. $\Omega(t) = K_{\text{об}} U(t)$. Поскольку $\Omega(t) = dx(t)/dt$, то связь между напряжением и углом поворота запишется в виде

$$x(t) = K_{\text{об}} \int_0^t u(t) dt .$$

Таким образом, электродвигатель рассмотренной системы может быть приближенно заменен интегрирующим звеном.

1.2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

В этом разделе рассматривается важнейший класс систем управления – линейные системы. Центральное место, которое занимают линейные системы в теории управления, обусловлено тремя основными причинами. Во-первых, многие реальные системы управления хорошо описываются линейными моделями. Во-вторых, именно для линейных систем разработаны сравнительно простые математические методы анализа. Основой для исследования нелинейных систем управления служит математический аппарат теории линейных систем.

Вначале обсуждается классификация систем управления и выделяется класс линейных систем. Затем рассматриваются основные математические методы анализа линейных систем.

Классификация систем управления

Основным типом являются *замкнутые* системы управления, которые можно представить в виде структурной схемы, приведенной на рис. 5.

Система управления содержит управляющую подсистему или объект управления (ОУ), устройство управления (УУ) и схему сравнения входного сигнала $g(t)$ и выходного сигнала $x(t)$. При этом заданная функция времени $g(t)$ определяет требуемое изменение выходного сигнала $x(t)$ системы управления. В схеме сравнения вычисляется рассогласование $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$, возникающее в процессе управления. Устройство управления предназначено для выработки сигналов управления $U(t)$.

Математическая модель любой из систем управления включает в себя описание входных и выходных сигналов и вид преобразования входных сигналов $g(t)$ в выходные сигналы $x(t)$. Всю совокупность этих преобразований можно представить с помощью оператора A : $x(t) = Ag(t)$. Как следует из этой формулы, классификация систем управления может быть основана либо на свойствах входных и выходных сигналов, либо на свойствах оператора A .

Остановимся вначале на классификации систем управления по виду входных и выходных сигналов.

Системы управления, имеющие один вход и один выход, называют *одномерными*. Системы, имеющие несколько входов или выходов, называют *многомерными*.

Системы управления называют *непрерывными*, если входные и выходные сигналы имеют непрерывное множество значений по времени. Если сигналы поступают в дискретные моменты времени, то такие системы называют *дискретными или импульсными*.

Дискретные системы управления с конечным числом уровней сигналов называют *цифровыми*.

Представим реализации сигналов систем различных типов в виде графиков. На рис. 8,а изображен характерный вид сигнала в непрерывной системе. На рис. 8,б представлен характерный вид сигнала в дискретной или импульсной системе. На рис. 9 – в циф-

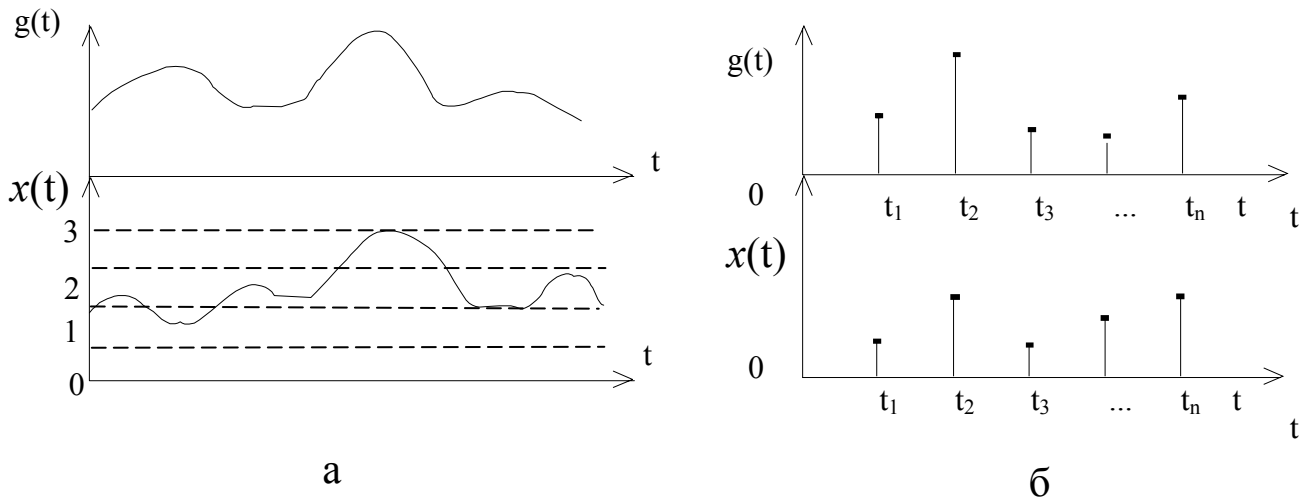


Рис. 8

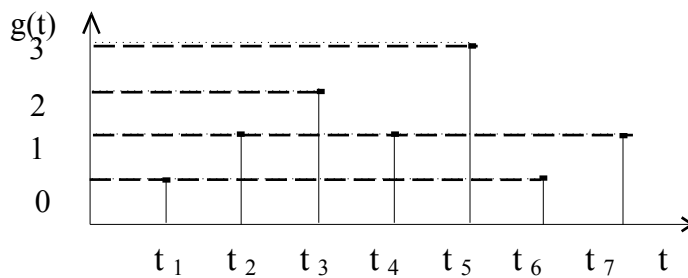


Рис. 9

ровой. Заметим, что все системы, построенные на базе ЭВМ, являются цифровыми.

Теперь остановимся на классификации систем управления, основанной на свойствах оператора A .

Систему называют **стационарной**, если вид и свойства оператора A не изменяются во времени. Если же свойства оператора A изменяются во времени, то систему называют **нестационарной**. Стационарность означает, что вид выходного сигнала системы не зависит от сдвига по времени входного сигнала.

Системы управления называют **линейными**, если выполняются принцип суперпозиции. Если этот принцип несправедлив, то систему называют **нелинейной**.

Сущность принципа суперпозиции заключается в том, что линейной комбинации произвольных входных сигналов $g_1(t), g_2(t), \dots, g_N(t)$ соответствует линейная комбинация соответствующих выходных сигналов:

$$A \sum_{k=1}^N a_k g_k(t) = \sum_{k=1}^N a_k A(g_k(t)).$$

Принцип суперпозиции всегда выполняется, если выполняются следующие два условия:

1) при суммировании любых двух входных сигналов соответствующие выходные сигналы суммируются;

2) при любом увеличении (уменьшении) входного сигнала без изменения его формы выходной сигнал увеличивается (уменьшается) во столько же раз, также не изменяя своей формы.

Оператор A , соответствующий линейной системе, называют **линейным оператором**. Примерами линейных операторов могут служить операторы дифференцирования или интегрирования:

$$x(t) = dg(t)/dt, \quad x(t) = \int_{t_0}^t g(t)dt.$$

Математическое описание линейных систем управления

Существует два основных, тесно связанных между собой, метода анализа линейных систем. Это анализ систем во временной области и анализ систем в частотной области. Рассмотрим вначале метод анализа систем во временной области. Для этого вспомним определение и свойства импульсной δ -функции Дирака. В частности,

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$. Запишем второе из этих

свойств δ - функции в виде: $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$. Тогда вы-

ходной сигнал линейной системы можно представить следующим образом:

$$x(t) = Ag(t) = A \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)A\delta(t-\tau)d\tau.$$

Введем функцию $h(t) = A\delta(t)$, которая представляет собой выходной сигнал системы управления при входном сигнале в виде δ -функции. Функция $h(t)$ называется **импульсной переходной характеристикой** системы или **весовой функцией**. Тогда выходной сигнал линейной системы при любом входном воздействии определяется по формуле:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Эта формула называется **интегралом Дюамеля** или **интегралом свертки**. Ее смысл заключается в том, что выходной сигнал любой линейной системы получается с помощью взвешивания и последующего интегрирования входного сигнала $g(t)$ с весовой функцией $h(t-\tau)$.

Наиболее прост анализ линейных систем управления в частотной области. Действительно, обозначим преобразование Лапласа от $x(t)$, через $x(p)$, т. е. $x(t) \div x(p)$; соответственно $h(t) \div H(p)$; $g(t) \div g(p)$. Учитывая свойство преобразования Лапласа свертки функций, получаем

$$x(p) = H(p)g(p).$$

Если в этом равенстве положить $p = j\omega$, то $x(j\omega) = H(j\omega)g(j\omega)$, где $x(j\omega)$, $H(j\omega)$, $g(j\omega)$ – преобразования Фурье выходного сигнала линейной системы, импульсной переходной характеристики и входного сигнала соответственно.

Функция $H(p)$ или $H(j\omega)$, играющая центральную роль в анализе систем, называется **передаточной функцией** системы управления. Эта комплексная функция действительного аргумента – частоты ω . Ее модуль $|H(j\omega)|$ называется **амплитудно-частотной характеристикой** (АЧХ) системы; аргумент $Arg(H(j\omega))$ – **фазочастотной характеристикой** (ФЧХ). Для анализа систем управления часто применяются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАХ):

$$L(\omega) = 20 \lg |H(j\omega)|.$$

Итак, если известна передаточная функция $H(p)$ линейной системы, то задача определения выходного сигнала по входному решается с помощью простого умножения $x(p) = H(p)g(p)$. Каким же образом можно найти $H(p)$?

Очень широкий класс линейных систем управления описывается с помощью линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x(t) = b_0 \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m g(t).$$

Преобразуем левую и правую часть этого уравнения по Лапласу и получим следующее выражение

$$x(p)(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) g(p)$$

или $x(p) = H(p)g(p)$, где $H(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}$ – передаточная функция системы управления.

Таким образом, при заданном описании системы в виде дифференциального уравнения передаточная функция находится очень просто и, следовательно, легко осуществляется анализ линейных систем.

Типовые звенья систем управления

Рассмотрим примеры построения частотных характеристик трех звеньев, которые встречаются во многих системах автоматического управления.

1. Интегрирующее звено

Предположим, что выходной сигнал звена системы управления определяется как интеграл

$$x(t) = k \int_0^t g(t) dt$$

от входного сигнала $g(t)$, где $k > 0$ – постоянный коэффициент. После преобразования Лапласа получим

$$x(p) = \frac{k}{p} g(p).$$

Таким образом, передаточная функция интегрирующего звена запишется в виде $H(p) = \frac{k}{p}$. Амплитудно-частотная характеристика

$|H(j\omega)| = \frac{k}{|j\omega|} = \frac{k}{\omega}$, а ФЧХ – $ArgH(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$. Для построения графика ЛАХ по оси ординат откладывают

$L(\omega) = 20\lg|H(j\omega)| = 20\lg k - 20\lg \omega$ в децибелах, а по оси абсцисс откладывают частоту ω в логарифмическом масштабе (рис. 10, а).

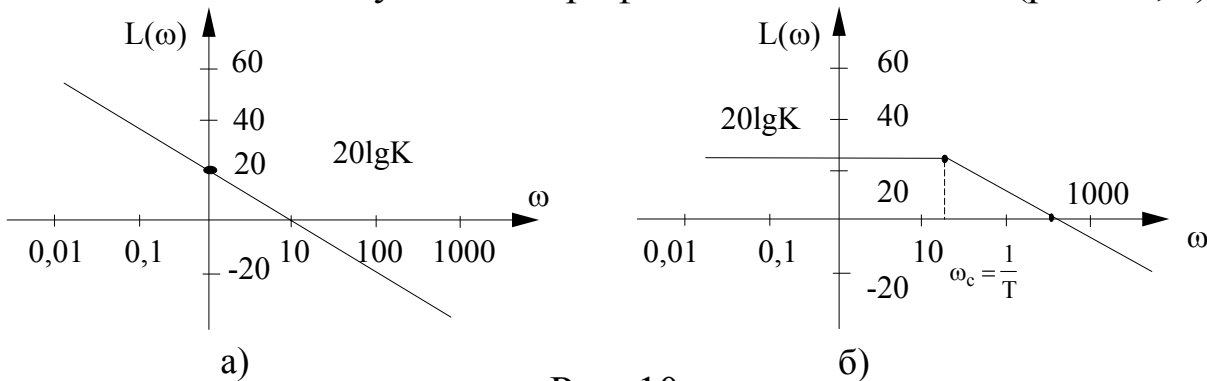


Рис. 10

При этом отрезок оси абсцисс, длина которого соответствует десятикратному изменению частоты ω , называется *декадой*. В таком масштабе ЛАХ интегрирующего звена будет представлена прямой линией, наклон которой составляет -20 децибел на декаду. Примером интегрирующего звена служит исполнительный двигатель следящей системы (рис. 6).

2. Аperiodическое звено

Аperiodическим называют звено, описываемое следующим дифференциальным уравнением

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = kU(t),$$

где T – постоянная времени аperiodического звена. Простым примером такого звена может служить интегрирующая RC цепь. Преобразуя дифференциальное уравнение по Лапласу, находим передаточную функцию аperiodического звена

$$H(p) = \frac{k}{(1 + pT)}.$$

Для аperiodического звена АЧХ $|H(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$, а ФЧХ

$\text{Arg } H(j\omega) = -\text{arctg}(\omega T)$. Рассмотрим выражение для ЛАХ, представленное в виде

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2},$$

где $\omega_c = \frac{1}{T}$.

Такая ЛАХ может быть приближенно представлена ломаной линией, показанной на рис. 10, б. Эта приближенная характеристика составлена из двух асимптот, к которым стремится ЛАХ при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$. Действительно, при малых ω отношение $\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \ll 1$ и $L(\omega) \cong 20 \lg k$. При $\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \gg 1$ $L(\omega) \cong 20 \lg k - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_c}$, то есть характеристика представляет собой прямую, имеющую наклон -20 децибел на декаду. Обе асимптоты пересекаются в точке $\omega = \omega_c$; поэтому ω_c называется *сопрягающей частотой*.

3. Дифференцирующее звено

Связь между выходным и входным сигналами идеального дифференцирующего звена определяется соотношением

$$x(t) = k \frac{dg(t)}{dt}.$$

Легко убедиться, что передаточная функция $H(p) = kp$, АЧХ $|H(j\omega)| = k\omega$, ФЧХ $\text{Arg}H(j\omega) = \pi/2$. Логарифмическая АЧХ $L(\omega) = 20 \lg k\omega$ может быть представлена на графике прямой линией, имеющей наклон к оси абсцисс $+20$ децибел на декаду.

Примером близкого к идеальному дифференцирующего звена является тахогенератор (датчик частоты вращения вала), выходное напряжение которого $U_T(t)$ пропорционально частоте вращения $\Omega(t)$ его якоря, то есть $U_T(t) = k\Omega(t)$. Если в качестве входной величины рассматривать не скорость вращения, а угол поворота $\varphi(t)$ его якоря, то $U_T(t) = k \frac{d\varphi(t)}{dt}$.

Передаточные функции систем управления с обратной связью

Предположим, что некоторая линейная система состоит из двух последовательно соединенных подсистем, имеющих передаточные функции $H_1(p)$ и $H_2(p)$ (рис. 11).

Очевидно, $X(p) = H_2(p)G_1(p) = H_2(p)H_1(p)G(p)$. Таким образом, при последовательном соединении линейных систем их передаточные функции перемножаются.

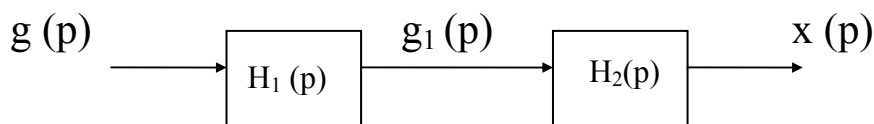


Рис. 11

При параллельном соединении систем (рис. 12) их передаточные функции складываются: $X(p) = (H_1(p) + H_2(p))G(p)$.

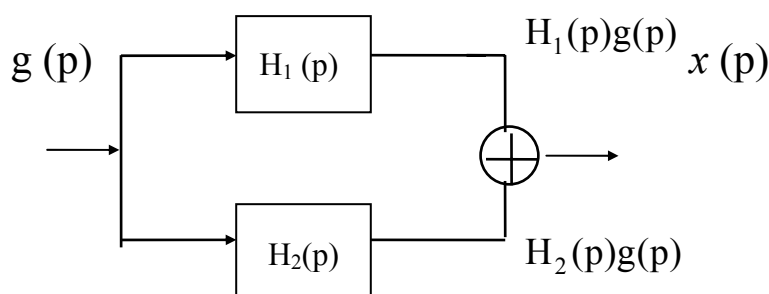


Рис. 12

Рассмотрим теперь систему с обратной связью (рис. 13).

Передаточная функция $H(p)$ называется **передаточной функцией разомкнутой системы управления**. Действительно, разрывая цепь главной обратной связи, получим $X(p) = H(p)G(p)$. Найдем передаточную функцию замкнутой системы из следующих соотношений: $X(p) = H(p)\varepsilon(p)$, $E(p) = G(p) - X(p)$. После подстановки получаем:

$$X(p) = H(p)G(p) - H(p)X(p) \text{ или } X(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)}G(p).$$

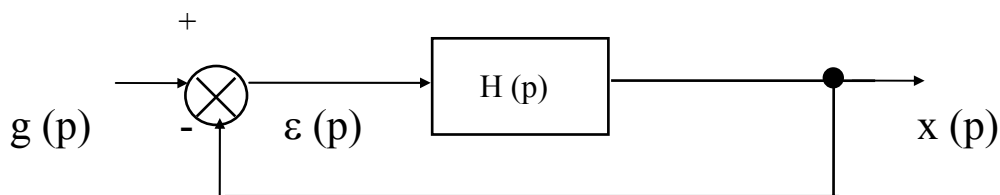


Рис. 13

Передаточная функция $W(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)}$ называется *передаточной функцией замкнутой системы управления*.

Пример 1. Реальный исполнительный двигатель обладает инерционностью и поэтому описывается следующим дифференциальным уравнением

$$T_{\text{ог}} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t) = ku(t).$$

При малой постоянной времени двигателя $T_{\text{ог}} \rightarrow 0$ частота вращения $\Omega(t)$ прямо пропорциональна входному напряжению $u(t)$.

Рассматривая в качестве выходного параметра угол поворота

$$x(t) = \int_0^t \Omega(t) dt = k \int_0^t u(t) dt,$$

видим, что при малой постоянной времени исполнительный двигатель в системе управления представляет собой интегрирующее звено.

Подставляя $\Omega(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ в дифференциальное уравнение, после преобразования по Лапласу, находим

$$x(p) = \frac{k}{p(1 + pT_{\text{ог}})} u(p),$$

т. е. реальный двигатель может быть представлен в виде последовательного соединения двух звеньев – интегрирующего с передаточной функцией k/p и апериодического с передаточной функцией $1/(1 + pT_{\text{ог}})$.

Пример 2. Предположим, что осуществлено параллельное соединение (рис. 12) интегрирующего звена с передаточной функцией $H_1(p) = k/p$ и безынерционного звена с передаточной функцией $H_2(p) = k_0 > 0$. Суммарная передаточная функция

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) = \frac{k}{p} + k_0 = k \frac{1 + pT_{\text{ог}}}{p}$$

соответствует последовательному соединению интегрирующего звена и так называемого форсирующего звена с передаточной функцией $H_{\text{ф}}(p) = 1 + pT_{\text{ф}}$, где $T_{\text{ф}} = k_0/k$ – постоянная времени форсирующего звена. Важно, что полученное при рассмотренном

параллельном соединении интегратора и усилителя форсирующее звено часто оказывается необходимым при проектировании систем автоматического управления.

Пример 3. Рассмотрим более сложную систему, в цепь обратной связи которой включено звено с передаточной функцией $H_1(p)$ (рис. 14, а).

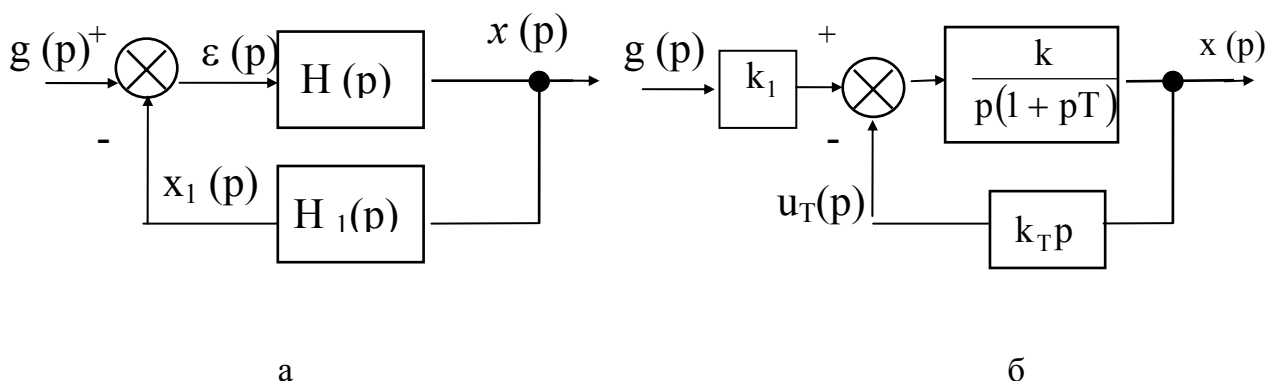


Рис. 14

Для определения передаточной функции замкнутой системы запишем

$$x(p) = H(p)\varepsilon(p),$$

$$\varepsilon(p) = g(p) - x_1(p) = g(p) - H_1(p)x(p) \quad \text{или}$$

$$x(p) = H(p)g(p) - H(p)H_1(p)x(p). \quad \text{Таким образом,}$$

$$x(p) = W(p)g(p),$$

где
$$W(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)H_1(p)}$$

передаточная функция замкнутой системы управления, представленной на рис. 14, а. Важным примером может служить система, показанная на рис. 14, б. Этой системе соответствует, например, последовательное соединение усилителя с коэффициентом усиления k_1 и двигателя, охваченного обратной связью с использованием тахогенератора. При этом вал тахогенератора вращается точно так же, как вал двигателя, а напряжение $u_T(p) = k_T p x(p)$ вычитается из напряжения, подаваемого на исполнительный двигатель. Такое включение тахогенератора позволяет уменьшить постоянную времени двигателя T , что может быть очень важно для систем слежения за быстро перемещающимися объектами. Действительно, найдем передаточную функцию замкнутой системы, показанной на рис. 14, б:

$$W(p) = k_1 \frac{\frac{k}{P(1+pT)}}{1 + \frac{k}{p(1+pT)} k_T p} = \frac{kk_1}{k_0} \frac{1}{p \left(1 + p \frac{T}{k_0} \right)},$$

где $k_0 = kk_T$. Таким образом, выбирая $k_1 = k_0$, получаем систему, в которой постоянная времени уменьшена в k_0 раз.

2. АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ

2.1. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В этом разделе рассматриваются важнейшие характеристики качества управляемых систем. Этими характеристиками являются устойчивость систем, точность и помехоустойчивость.

Понятие устойчивости относится к ситуации, когда входные сигналы системы равны нулю, т.е. внешние воздействия отсутствуют. При этом правильно построенная система должна находиться в состоянии равновесия (покоя) или постепенно приближаться к этому состоянию. В неустойчивых системах даже при нулевых входных сигналах возникают собственные колебания и, как следствие, – недопустимо большие ошибки.

Понятие точности связано с качеством работы управляемых систем при изменяющихся входных сигналах. В правильно спроектированных системах управления величина рассогласования между заданным законом управления $g(t)$ и выходным сигналом $x(t)$ должна быть мала.

Наконец, для характеристики влияния помех на системы управления используют дисперсию или среднее квадратическое отклонение составляющей ошибки за счет действия помех.

Понятие устойчивости

Одним из первых вопросов, возникающих при исследовании и проектировании линейных систем управления, является вопрос об их устойчивости. Линейная система называется *устойчивой*, ес-

ли при выведении ее внешними воздействиями из состояния равновесия (покоя) она возвращается в него после прекращения внешних воздействий. Если после прекращения внешнего воздействия система не возвращается к состоянию равновесия, то она является **неустойчивой**. Для нормального функционирования системы управления необходимо, чтобы она была устойчивой, так как в противном случае в ней возникают большие ошибки.

Определение устойчивости обычно проводят на начальном этапе создания системы управления. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, анализ устойчивости довольно прост. Во-вторых, неустойчивые системы могут быть скорректированы, т.е. преобразованы в устойчивые с помощью добавления специальных корректирующих звеньев.

Анализ устойчивости с помощью алгебраических критериев

Устойчивость системы связана с характером ее собственных колебаний. Чтобы пояснить это, предположим, что система описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = b_0 \frac{d^m g}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g}{dt^{m-1}} + \dots + b_m g$$

или, после преобразования Лапласа,

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)x(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m)g(p),$$

где $g(p)$ – входное воздействие.

Устойчивая система возвращается в состояние покоя, если входное воздействие $g(p) \equiv 0$. Таким образом, для устойчивой системы решение однородного дифференциального уравнения $(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)x(p) = 0$ должно стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Если найдены корни p_1, p_2, \dots, p_n характеристического уравнения $p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0$, то решение однородного уравнения

запишется в виде
$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{p_k t}.$$

В каких же случаях система устойчива?

Предположим, что $p_k = a_k$ – действительный корень.

Ему соответствует слагаемое $c_k e^{a_k t}$. При $a_k < 0$ это слагаемое будет стремиться к нулю, если $t \rightarrow \infty$. Если же $a_k > 0$, то $x(t) \rightarrow \infty$, когда $t \rightarrow \infty$. Наконец, в том случае, когда $a_k = 0$, рассматриваемое слагаемое не изменяется и при $t \rightarrow \infty$, $x_k(t) = c_k$

Допустим теперь, что $p_k = a_k + j b_k$ – комплексный корень характеристического уравнения. Заметим, что в этом случае $\tilde{p}_k = a_k - j b_k$ также будет корнем характеристического уравнения. Двум комплексно-сопряженным корням будут соответствовать слагаемые вида $c_k \sin b_k t e^{a_k t}$, $c_k \cos b_k t e^{a_k t}$.

При этом, если $a_k < 0$, то в системе имеются затухающие колебания. При $a_k > 0$ – колебания возрастающей амплитуды, а при $a_k = 0$ – колебания постоянной амплитуды c_k .

Таким образом, система устойчива, если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны. Если хотя бы один корень имеет действительную часть $a_k \geq 0$, то система неустойчива. Говорят, что система находится на границе устойчивости, если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет нулевую действительную часть, а действительные части всех остальных корней отрицательны.

Это определение хорошо иллюстрируется геометрически. Представим корни характеристического уравнения точками на комплексной плоскости (рис. 15).

Если все корни лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, то система устойчива. Если хотя бы один корень лежит в правой полуплоскости комплексного переменного – система неустойчива. Если же корни находятся на мнимой оси и в левой полуплоскости, то говорят, что система находится на границе устойчивости.

Рассмотрим в качестве примера замкнутую систему управления с одним интегрирующим звеном. В этом случае $H(p) = \frac{k}{p}$, $k > 0$, а передаточная

функция замкнутой системы

$$W(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{k/p}{1 + k/p} = \frac{k}{p + k}$$

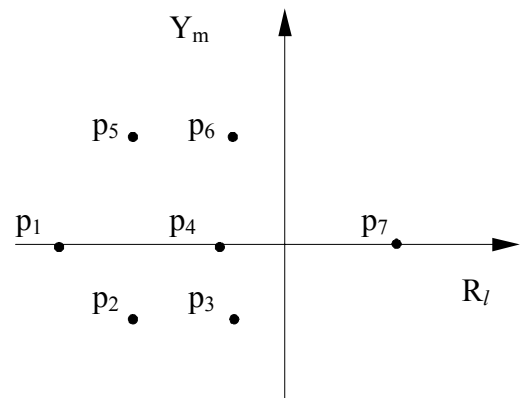


Рис. 15

Выходной сигнал системы $x(p) = W(p)g(p)$ или $x(p) = \frac{k}{p+k}g(p)$. Заметим, что характеристическое уравнение $p+k=0$ записывается с помощью приравнивания к нулю знаменателя передаточной функции замкнутой системы управления. В данном случае имеется один корень $p_1 = -k < 0$ и поэтому система управления всегда устойчива. Предположим теперь, что $H(p) = \frac{k}{p^2}$.

Тогда $W(p) = \frac{k/p^2}{1+k/p^2} = \frac{k}{p^2+k}$. Характеристическое уравнение $p^2 + k = 0$. Поэтому $p_{1,2} = \pm j\sqrt{k}$. Система находится на границе устойчивости. В ней существуют незатухающие колебания.

Анализ устойчивости с помощью частотных критериев

Основным недостатком рассмотренного алгебраического подхода к анализу устойчивости является то, что в сложных системах управления трудно установить связь между корнями знаменателя p_k , $k=1, 2, \dots, n$, и параметрами элементарных звеньев, составляющих систему управления. Это приводит к трудностям коррекции неустойчивых систем. Для того, чтобы упростить анализ устойчивости, желательно проводить этот анализ по передаточной функции $H(p)$ разомкнутой системы управления.

В 1932 г. американский ученый Найквист разработал эффективный метод анализа устойчивости усилителей с обратной связью. В 1938 г. советский ученый А.В. Михайлов обобщил метод Найквиста на замкнутые системы автоматического управления.

Критерий Найквиста основан на построении годографа передаточной функции $H(j\omega)$ разомкнутой системы управления. **Годографом передаточной функции $H(j\omega)$** называется кривая, прочерчиваемая концом вектора $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ на комплексной плоскости при измерении частоты ω от 0 до ∞ .

Наиболее просто формулируется критерий устойчивости Найквиста: замкнутая система управления устойчива, если годограф передаточной функции $H(j\omega)$ разомкнутой системы не охватывает на комплексной плоскости точку с координатами $(-1, j0)$. На

рисунках показаны примеры годографов устойчивой (рис. 16,а) и неустойчивой (рис. 16,б) систем управления.

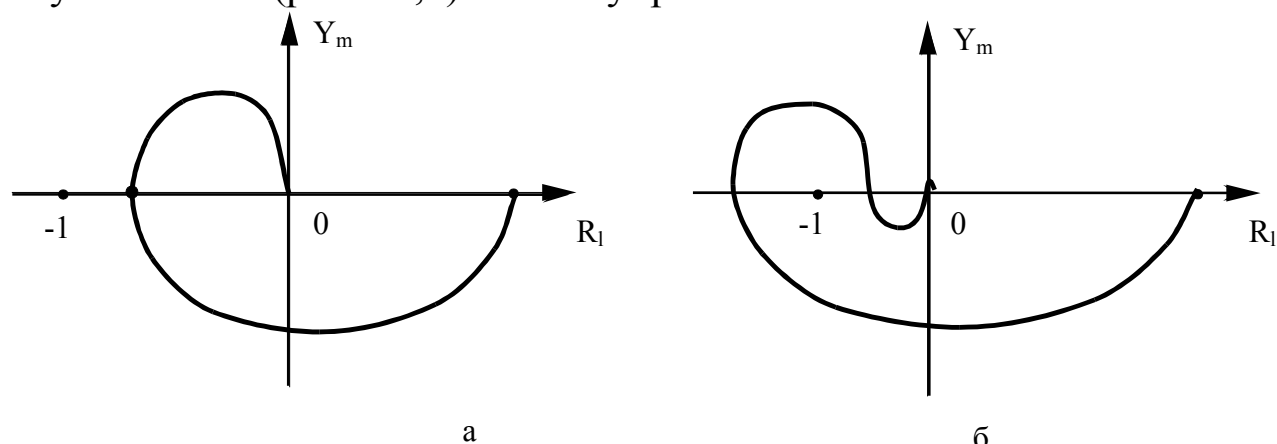


Рис. 16

Если годограф проходит через точку -1 , то говорят, что система находится на границе устойчивости. В этом случае на некоторой частоте $H(j\omega_0) = -1$ и в системе могут существовать незатухающие колебания частоты ω_0 . В неустойчивых системах уровень сигнала $x(t)$ будет нарастать со временем. В устойчивых - уменьшаться.

Запас устойчивости

Еще одним достоинством рассматриваемого критерия является возможность определения запаса устойчивости системы управления. Запас устойчивости характеризуют двумя показателями: *запасом устойчивости по усилению* и *запасом устойчивости по фазе*.

Запас устойчивости по усилению определяется величиной $\gamma = 1/|H(j\omega_0)|$, где ω_0 - частота, на которой $\text{Arg}H(j\omega_0) = -\pi$ (рис. 17,а). Запас устойчивости γ показывает, во сколько раз должен измениться (увеличиться) модуль передаточной функции разомкнутой системы управления, чтобы замкнутая система оказалась на границе устойчивости. Требуемый запас устойчивости зависит от того, насколько в процессе работы может возрасти коэффициент передачи системы по сравнению с расчетным.

Запас устойчивости по фазе оценивается величиной угла $\Delta\varphi = -180^\circ - \text{Arg}H(j\omega_{cp})$, где частота ω_{cp} , называемая *частотой среза*, определяется условием $|H(j\omega_{cp})|=1$ (рис. 17, б).

Величина $\Delta\varphi$ показывает, насколько должна измениться фазовая характеристика разомкнутой системы управления, чтобы замкнутая система оказалась на границе устойчивости. Запас устойчивости по фазе обычно считается достаточным, если $|\Delta\varphi| \geq 30^\circ$.

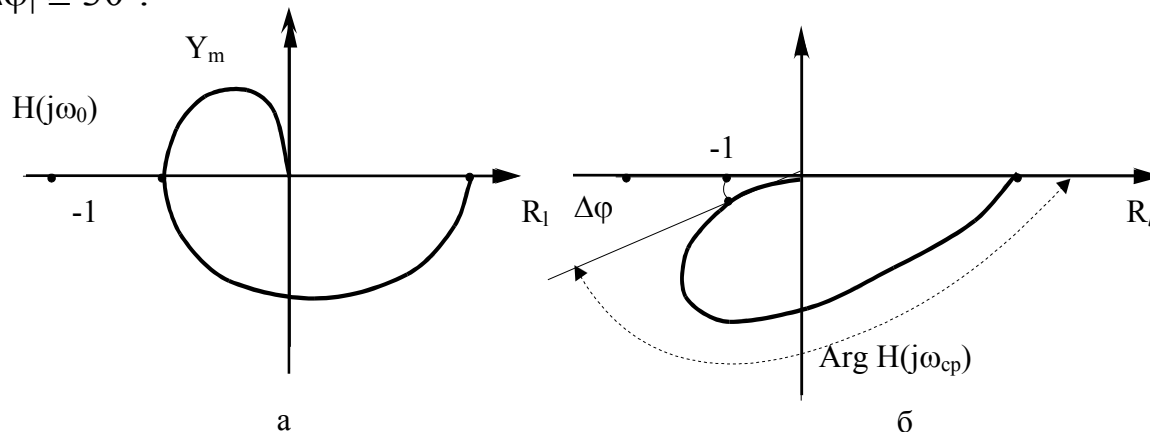


Рис. 17

Анализ устойчивости с помощью логарифмических амплитудно-частотных характеристик

Во многих случаях разомкнутую систему управления можно представить в виде последовательного соединения n типовых звеньев с передаточными функциями $H_k(j\omega)$, $k = 1, 2, \dots, n$. При этом передаточная функция разомкнутой системы определяется произведением

ведением $H_k(j\omega) = \prod_{k=1}^n H_k(j\omega)$. Логарифмическая амплитудно-

частотная характеристика $L(\omega) = 20 \lg |H(j\omega)|$ будет равна сумме ЛАХ отдельных звеньев:

$$L(\omega) = \sum_{k=1}^n L_k(\omega).$$

Поскольку ЛАХ многих элементарных звеньев могут быть аппроксимированы отрезками прямых линий, то ЛАХ $L(\omega)$ разомкнутой системы управления также будет представлена в виде отрезков прямых линий, имеющих наклоны к оси частот, кратные 20 децибелам на декаду.

Пример. Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет следующий вид

$$H(p) = \frac{k(1 + pT_1)}{p^2(1 + pT_2)}$$

Такая система содержит два интегратора, форсирующее звено с передаточной функцией $H_\phi(p) = k(1 + pT_1)$ и апериодическое звено с передаточной функцией $H_a(p) = 1/(1 + pT_2)$. Представим ЛАХ отдельных звеньев такой системы в виде графиков на рис. 18, а. Суммируя представленные графики, получим ЛАХ разомкнутой системы (рис. 18, б).

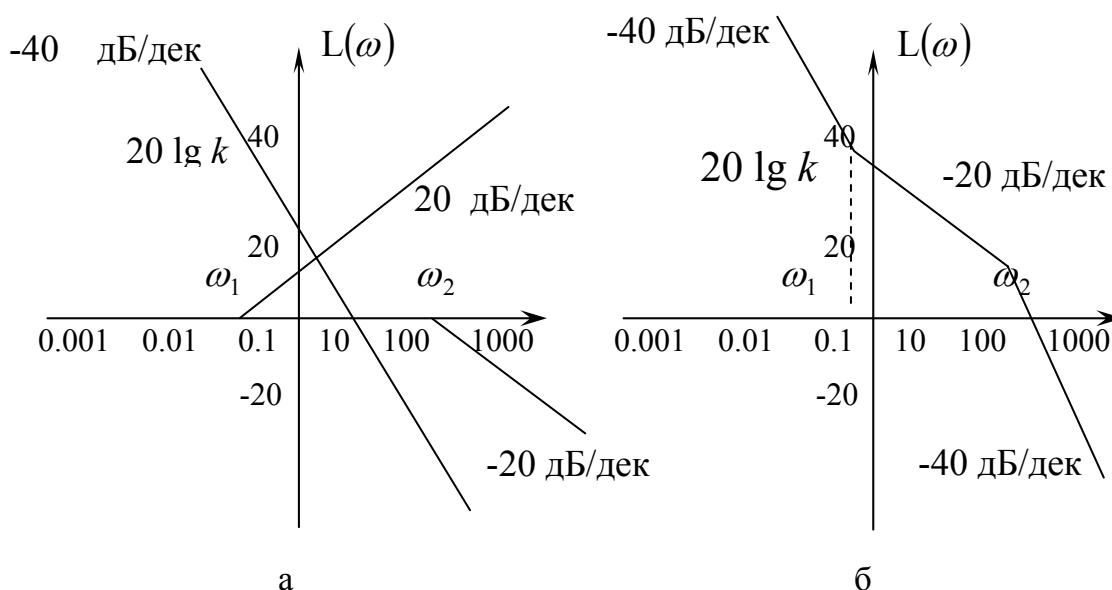


Рис. 18

Как следует из приведенных рисунков, построение суммарной ЛАХ осуществляется достаточно просто. Необходимо лишь учитывать изменение наклона ЛАХ в точках $\omega_1 = 1/T_1$ и $\omega_2 = 1/T_2$, соответствующих сопрягающим частотам форсирующего и апериодического звеньев.

Для проверки условий устойчивости замкнутой системы автоматического управления необходимо в таком же логарифмическом масштабе по оси частот построить фазочастотную характеристику $\varphi(\omega) = \text{Arg } H(j\omega)$. Однако опыт инженерных расчетов показывает, что замкнутая САУ, как правило, устойчива и обладает запасом устойчивости, если ЛАХ разомкнутой системы вблизи частоты среза имеет наклон -20 дБ/дек. При этом запас устойчивости тем больше, чем больше протяженность этого участка ЛАХ. Обычно считают, что, протяженность участка с наклоном -20 дБ/дек

должна составлять не менее 1 декады. Существуют устойчивые САУ с наклоном ЛАХ большим, чем -20 дБ/дек, но для таких систем, как правило, очень мал запас устойчивости.

Предположим, что исследуемая САУ имеет наклон около частоты среза больший, чем -20 дБ/дек (рис. 19)

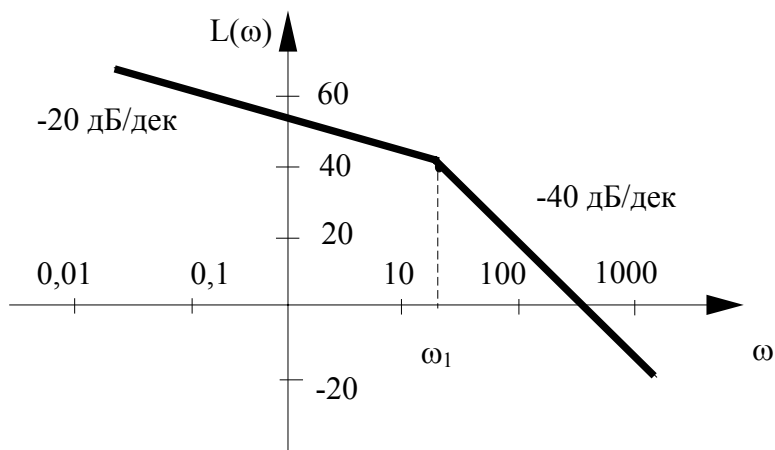


Рис. 19

Учитывая, что при последовательном соединении звеньев САУ их ЛАХ суммируются, нужно включить в САУ такое звено, которое обеспечит устойчивость системы. В рассматриваемом случае таким звеном может быть звено с ЛАХ, показанной на рис. 20.

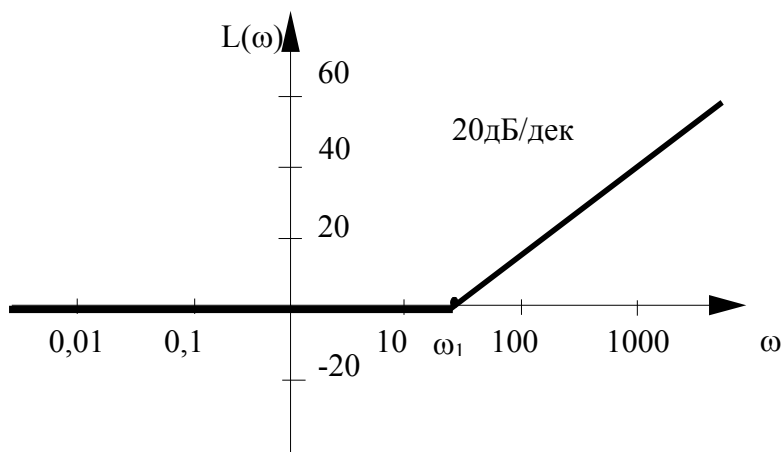


Рис. 20

Действительно, после суммирования ЛАХ системы управления (рис. 19) и дополнительного звена получим ЛАХ, имеющую постоянный наклон -20 дБ/дек на всех частотах, в том числе и на

частоте среза. В рассматриваемом примере передаточная функция дополнительного корректирующего звена $H_{\phi}(j\omega) = 1 + j\omega T_{\phi}$, причем $\omega_1 = 1/T_{\phi}$. Введение дополнительных звеньев для обеспечения устойчивости систем управления называется *коррекцией САУ*, а сами звенья – *корректирующими*.

* * *

В этом разделе были рассмотрены методы исследования одного из важнейших показателей качества систем управления - устойчивости линейных систем. Применение этих методов для анализа конкретных систем обычно осуществляется следующим образом. Вначале строят ЛАХ разомкнутой системы управления. Если система неустойчива, то подбирают и вводят в нее корректирующие звенья таким образом, чтобы наклон ЛАХ на частоте среза составлял - 20 дБ/дек и обеспечивался необходимый запас устойчивости. После этого обязательно исследуют устойчивость скорректированной системы с помощью критерия Найквиста-Михайлова и определяют точные значения запасов устойчивости по усилению и по фазе. При необходимости после этого изменяются параметры системы управления для обеспечения заданного запаса устойчивости.

2.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ОШИБКИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Точность систем управления является важнейшим показателем их качества. Чем выше точность, тем выше качество системы. Однако предъявление повышенных требований к точности вызывает неоправданное удорожание системы, усложняет ее конструкцию. Недостаточная точность может привести к несоответствию характеристик системы условиям функционирования и необходимости ее повторной разработки. Поэтому на этапе проектирования системы должно быть проведено тщательное обоснование требуемых показателей точности.

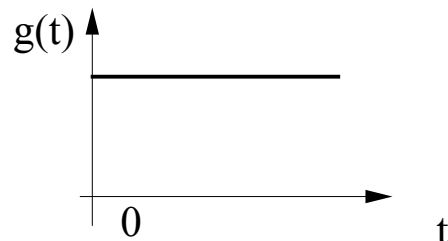
В этом разделе рассматриваются методы определения ошибок, возникающих при работе систем управления с детерминированными входными воздействиями. Вначале анализируются ошибки систем в переходном режиме. Затем особое внимание уделено

простым способам расчета ошибок систем в установившемся режиме. Будет показано, что все системы управления можно разделить по величине установившихся ошибок на системы без памяти, так называемые *статические* системы, и системы, обладающие памятью, – *астатиические* системы управления.

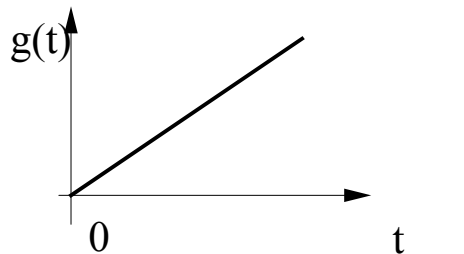
Типовые входные воздействия

Для оценки качества работы систем управления рассматривают их поведение при некоторых типовых воздействиях. Обычно такими воздействиями служат следующие три основные вида функций:

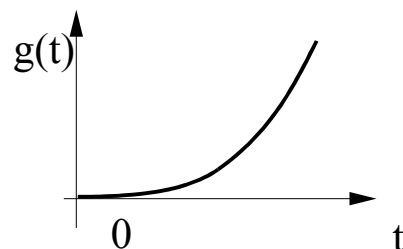
а) ступенчатое воздействие: $g(t) = \begin{cases} g_0, t > 0 \\ 0, t \leq 0 \end{cases}$, $g(p) = \frac{g_0}{p}$;



б) линейное воздействие: $g(t) = \vartheta t, t > 0$; $g(p) = \frac{\vartheta}{p^2}$;



в) квадратичное воздействие: $g(t) = at^2/2, t > 0$; $g(p) = \frac{a}{p^3}$.



В некоторых случаях рассматривают обобщенное полиномиальное воздействие:

$$g(t) = g_0 + \vartheta t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \dots + a_{n-1} t^n, \quad t > 0.$$

Ступенчатое воздействие является одним из простейших, но именно с его помощью определяется ряд важных свойств систем управления, связанных с видом переходного процесса. Линейное и квадратичное воздействия часто бывают связаны с задачами слежения за координатами движущегося объекта. Тогда линейное воздействие соответствует движению объекта с постоянной скоростью; квадратичное - движению объекта с постоянным ускорением.

Переходные процессы при типовых воздействиях можно построить следующим образом. Пусть задана передаточная функция замкнутой системы управления $W(p)$. Тогда

$$x(p) = W(p) g(p),$$

где $g(p)$ – изображение соответствующего воздействия.

Например, если $H(p) = \frac{k}{p}$, то $W(p) = \frac{k/p}{1+k/p} = \frac{k}{p+k}$ и

для $g(t) = g_0$ получим $x(p) = W(p)g(p) = \frac{k}{p+k} \cdot \frac{g_0}{p} = \frac{kg_0}{p(p+k)}$.

С помощью вычетов или по таблицам находим обратное преобразование Лапласа и получаем вид переходного процесса $x(t)$ для заданного входного воздействия:

$$x(t) = \operatorname{Res}_0 \frac{kg_0}{p(p+k)} e^{pt} + \operatorname{Res}_{-k} \frac{kg_0}{p(p+k)} e^{pt} = g_0(1 - e^{-kt}),$$

где $\operatorname{Res}_a x(p)$ – вычет функции $x(p)$ в точке a .

Обычно реакция системы на ступенчатое воздействие имеет вид, показанный на рис. 21,а или рис. 21,б.

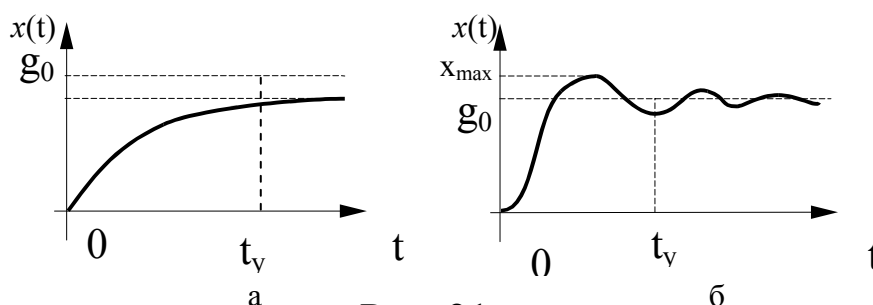


Рис. 21

Переходный процесс, как правило, характеризуют двумя параметрами – длительностью переходного процесса (временем установления) и величиной перерегулирования.

Под временем установления t_v понимают временной интервал, по истечении которого отклонение $|x(t) - x_{уст}|$ выходного процесса от установившегося значения $x_{уст}$ не превышает опреде-

ленную величину, например, $0,1g_0$. Время установления является важным параметром САУ, позволяющим оценить ее быстродействие. Величину t_y можно оценить приближенно по амплитудно-частотной характеристике системы. При заданной частоте среза $t_y \cong (1 \div 2) \cdot 2\pi / \omega_{cp}$. Для оценки качества системы используется также величина перерегулирования, определяемая соотношением $\delta = (x_{\max} - g_0) / g_0$.

В зависимости от характера собственных колебаний системы переходный процесс в ней может быть колебательным, как это показано на рис. 21, б, или плавным гладким, называемым апериодическим (рис. 21, а). Если корни характеристического уравнения системы действительны, то переходный процесс в ней апериодический. В случае комплексных корней характеристического уравнения собственные колебания устойчивой системы управления являются затухающими гармоническими и переходный процесс в системе имеет колебательный характер.

При малом запасе устойчивости САУ ее собственные колебания затухают медленно, и перерегулирование в переходном режиме получается значительным. Как следствие, величина перерегулирования может служить мерой запаса устойчивости системы. Для многих систем запас устойчивости считается достаточным, если величина перерегулирования $\delta \leq 10 \div 30\%$.

Установившийся режим

При проектировании систем управления часто требуется оценить ошибку слежения в установившемся режиме $\varepsilon_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$.

В зависимости от вида воздействия и свойств системы эта ошибка может быть нулевой, постоянной или бесконечно большой величиной.

Очень важно, что величина установившейся ошибки может быть легко найдена с помощью теоремы о предельном значении оригинала: $\varepsilon_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$.

При использовании этой теоремы нужно выразить величину ошибки $\varepsilon(p)$ через $g(p)$. Для этого рассмотрим структурную схему замкнутой системы управления (рис. 22).

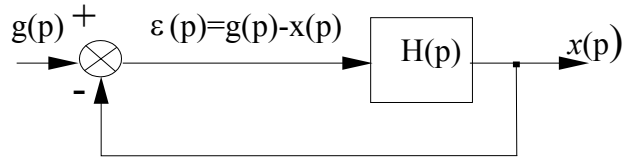


Рис. 22

Очевидно, $\varepsilon(p) = g(p) - x(p) = g(p) - H(p)\varepsilon(p)$. Отсюда $\varepsilon(p) = \frac{1}{1+H(p)}g(p)$ или $\varepsilon(p) = H_\varepsilon(p)g(p)$, где $H_\varepsilon(p) = \frac{1}{1+H(p)}$ **называется**

передаточной функцией системы управления от входного воздействия $g(p)$ к ошибке слежения $\varepsilon(p)$. Таким образом, величину установившейся ошибки можно найти с помощью следующего соотношения:

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p H_\varepsilon(p) g(p),$$

где $H_\varepsilon(p) = 1/(1+H(p))$; $g(p)$ - изображение типового входного воздействия.

Пример 1. Рассмотрим систему управления, в составе которой нет интеграторов, например,

$$H(p) = \frac{k(1+pT_3)}{(1+pT_1)(1+pT_2)}.$$

Найдем величину установившейся ошибки при ступенчатом входном воздействии $g(t) = g_0, t \geq 0$. В этом случае

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1+H(p)} \frac{g_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{g_0}{1 + \frac{k(1+pT_3)}{(1+pT_1)(1+pT_2)}} = \frac{g_0}{1+k}.$$

Предположим теперь, что входное воздействие изменяется линейно $g(t) = \mathcal{G}t$ или $g(p) = \frac{\mathcal{G}}{p^2}$.

Тогда $\varepsilon_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1+H(p)} \frac{\mathcal{G}}{p^2} \rightarrow \infty$. Соответствующие вход-

ные воздействия и переходные процессы можно представить графиками на рис. 23,а и б.

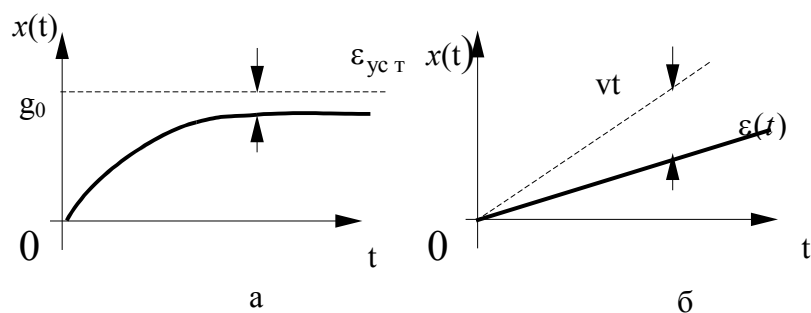


Рис. 23

Пример 2. Рассмотрим теперь систему, содержащую один интегратор. Типичным примером может быть система сервопривода (рис. 6) с $H(p) = \frac{k}{p(1 + pT_{ДВ})}$.

Для ступенчатого воздействия $g(t) = g_0$ или $g(p) = \frac{g_0}{p}$ полу-

чим

$$\varepsilon_{ycm} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{k}{p(1 + pT_{ДВ})}} \frac{g_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{g_0}{1 + \frac{k}{p}} = 0.$$

При линейном входном воздействии

$$\varepsilon_{ycm} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{k}{p(1 + pT_{ДВ})}} \frac{g}{p^2} = \frac{g}{k}.$$

Такие процессы можно проиллюстрировать соответствующими кривыми на рис.24, а и б.

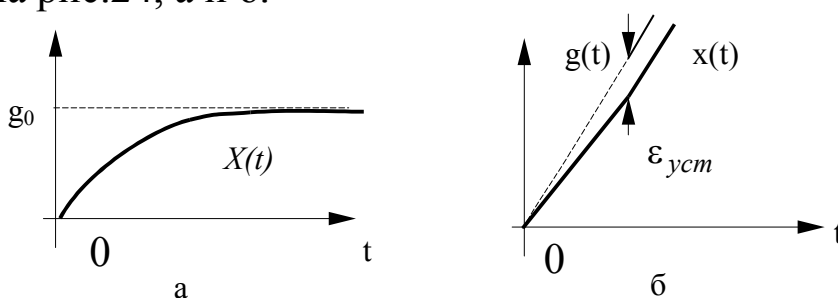


Рис. 24

Пример 3. Рассмотрим систему с двумя интеграторами. Пусть, например, $H(p) = \frac{k(1 + pT)}{p^2}$. При ступенчатом воздействии

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{k(1+pT)}{p^2}} \frac{g_0}{p} = 0.$$

При линейном $\varepsilon_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{k(1+pT)}{p^2}} \frac{g}{p^2} = 0.$

Наконец, если входное воздействие квадратичное $g(t) = at^2/2$ ($g(p) = a/p^3$), то

$$e_{\text{ст}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{k(1+pT)}{p^2}} \frac{a}{p^3} = \frac{a}{k}.$$

Таким образом, в системе с двумя интеграторами может осуществляться слежение за квадратичным входным воздействием при конечной величине установившейся ошибки. Например, можно следить за координатами объекта, движущегося с постоянным ускорением.

Статические и астатические системы управления

Анализ рассмотренных примеров показывает, что системы управления, содержащие интегрирующие звенья, выгодно отличаются от систем без интеграторов. По этому признаку все системы делятся на **статические** системы, не содержащие интегрирующих звеньев, и **астатические** системы, которые содержат интеграторы. Системы с одним интегратором называются **системами с астатизмом первого порядка**. Системы с двумя интеграторами – **системами с астатизмом второго порядка** и т.д.

Для статических систем даже при неизменяющемся воздействии $g(t) = g_0$ установившаяся ошибка имеет конечную величину $g(t) = g_0$. В системах с астатизмом первого порядка при ступенчатом воздействии установившаяся ошибка равна нулю, но при линейно изменяющемся воздействии $\varepsilon_{уст} = g/k$. Наконец, в системах с астатизмом второго порядка ненулевая установившаяся ошибка появляется только при квадратичных входных воздействиях $g(t) = at^2/2$ и составляет величину $\varepsilon_{уст} = a/k$.

Какие же физические причины лежат в основе таких свойств астатических систем управления?

Рассмотрим систему управления с астатизмом второго порядка (рис. 25)

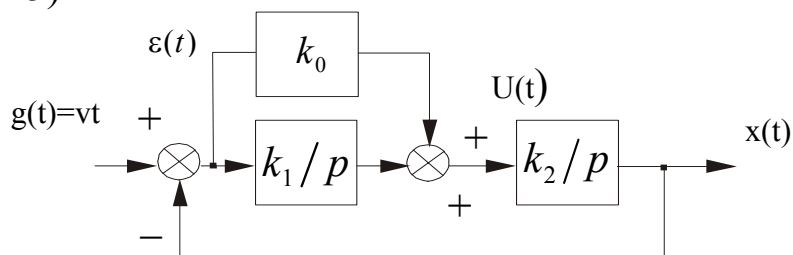


Рис. 25

Пусть входной сигнал системы управления изменяется линейно: $g(t) = \vartheta t$. Как было установлено, в такой системе установившаяся ошибка равна нулю, т.е. $\varepsilon(t) = 0$. Каким же образом система работает при нулевом сигнале ошибки? Если $x(t) = \vartheta t$, то на входе второго интегратора должен быть сигнал $U(t) = \frac{\vartheta}{k_2}$. Действи-

тельно, при нулевом рассогласовании $\varepsilon(t) = 0$ в системе с интеграторами возможно существование ненулевого выходного сигнала первого интегратора $U(t) = \vartheta / k_2$. Первый интегратор после окончания переходного процесса «запоминает» скорость изменения входного воздействия и в дальнейшем работа системы управления осуществляется по «памяти». Таким образом, физическим объяснением такого значительного различия статических и астатических систем является наличие памяти у астатических систем управления.

* * *

Итак, существуют простые возможности определения важнейшего показателя систем управления – величины их динамических ошибок. Детальный анализ переходных процессов в системах управления обычно выполняют с помощью моделирования на ПЭВМ. Вместе с тем величины установившихся ошибок легко находятся аналитически. При этом астатические системы управления, т.е. системы с интеграторами, имеют существенно лучшие показатели качества по сравнению со статическими системами.

2.3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОМЕХ

Кроме динамических ошибок, в системах управления, как правило, имеются ошибки, вызванные действием помех. Случайные помехи возникают из-за целого ряда причин. Основными из них являются погрешности измерения координат объектов или состояния системы управления, пассивные или активные помехи, существующие в информационных каналах, а также разнообразные внутренние возмущения, действующие в системах управления. При выборе параметров систем необходимо учитывать величину и характер действующих помех таким образом, чтобы минимизировать их влияние на качество работы системы управления.

Вначале кратко рассмотрим математические методы описания помех в системах управления, которые базируются на теории вероятностей и теории случайных процессов. Если изучение этого материала вызывает трудности, то следует повторить курс теории вероятностей [15]. После этого проанализируем возможности нахождения дисперсии ошибок в системах управления за счет действия помех. В заключение рассмотрим конкретные значения дисперсии помех для системы управления сервоприводом и определим оптимальные параметры системы, минимизирующие суммарную ошибку за счет действия помех и динамики изменения входных воздействий.

Математическое описание помех в системах управления

Представление о случайных процессах

Помехи в системах управления описываются методами теории случайных процессов.

Функция называется *случайной*, если в результате эксперимента она принимает тот или иной вид, заранее неизвестно, какой именно. *Случайным процессом* называется случайная функция времени. Конкретный вид, который принимает случайный процесс в результате эксперимента, называется *реализацией случайного процесса*.

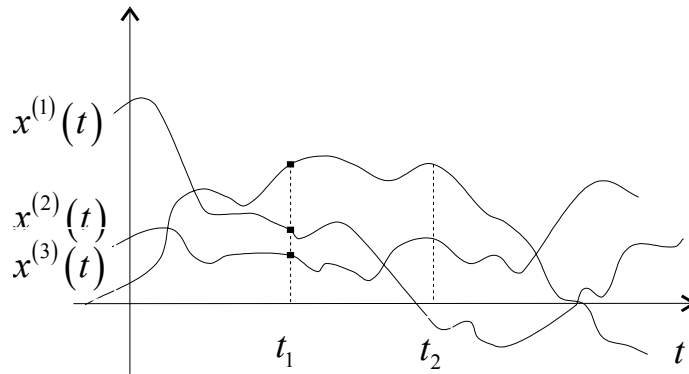


Рис. 26

На рис. 26 показана совокупность нескольких (трех) реализаций случайного процесса $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$, $x^{(3)}(t)$. Такая совокупность называется **ансамблем реализаций**. При фиксированном значении момента времени $t = t_1$ в первом эксперименте получим конкретное значение $x^{(1)}(t_1)$, во втором – $x^{(2)}(t_1)$, в третьем – $x^{(3)}(t_1)$.

Случайный процесс носит двойственный характер. С одной стороны, в каждом конкретном эксперименте он представлен своей реализацией – неслучайной функцией времени. С другой стороны, случайный процесс описывается совокупностью случайных величин.

Действительно, рассмотрим случайный процесс $X(t)$ в фиксированный момент времени $t = t_1$. Тогда $X(t_1)$ в каждом эксперименте принимает одно значение $x(t_1)$, причем заранее неизвестно, какое именно. Таким образом, случайный процесс, рассматриваемый в фиксированный момент времени $t = t_1$, является случайной величиной. Если зафиксированы два момента времени t_1 и t_2 , то в каждом эксперименте будем получать два значения $x(t_1)$ и $x(t_2)$. При этом совместное рассмотрение этих значений приводит к системе $(X(t_1), X(t_2))$ двух случайных величин. При анализе случайных процессов в N моментов времени приходим к совокупности или системе N случайных величин $(X(t_1), \dots, X(t_N))$.

Математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция случайного процесса

Поскольку случайный процесс, рассматриваемый в фиксированный момент времени, является случайной величиной, то можно говорить о математическом ожидании и дисперсии случайного процесса:

$$m(t) = M\{X(t)\}, D(t) = M\{X(t) - m(t)\}^2.$$

Так же, как и для случайной величины, дисперсия характеризует разброс значений случайного процесса относительно среднего значения $m(t)$. Чем больше $D(t)$, тем больше вероятность появления очень больших положительных и отрицательных значений процесса. Более удобной характеристикой является среднее квадратичное отклонение (СКО) $\sigma(t) = \sqrt{D(t)}$, имеющее ту же размерность, что и сам случайный процесс.

Если случайный процесс описывает, например, изменение дальности до объекта, то математическое ожидание – средняя дальность в метрах; дисперсия измеряется в квадратных метрах, а СКО – в метрах и характеризует разброс возможных значений дальности относительно средней.

Среднее значение и дисперсия являются очень важными характеристиками, позволяющими судить о поведении случайного процесса в фиксированный момент времени. Однако, если необходимо оценить «скорость» изменения процесса, то наблюдений в один момент времени недостаточно. Для этого используют две случайные величины $(X(t_1), X(t_2))$, рассматриваемые совместно. Так же, как и для случайных величин, вводится характеристика связи или зависимости между $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Для случайного процесса эта характеристика зависит от двух моментов времени t_1 и t_2 и называется **корреляционной функцией**:

$$R(t_1, t_2) = M\{(X(t_1) - m(t_1))(X(t_2) - m(t_2))\}.$$

Стационарные случайные процессы

Многие процессы в системах управления протекают однородно во времени. Их основные характеристики не изменяются. Такие процессы называются **стационарными**. Точное определение можно дать следующим образом. Случайный процесс $X(t)$ называется стационарным, если любые его вероятностные характеристики не зависят от сдвига начала отсчета времени. Для стационарного случайного процесса математическое ожидание, дисперсия и СКО постоянны: $m(t) = m$, $D(t) = D = \sigma^2$.

Корреляционная функция стационарного процесса не зависит от начала отсчета t , т.е. зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$ моментов времени:

$$R(\tau) = M\{(X(t_1) - m) \cdot (X(t_1 - \tau) - m)\}.$$

Корреляционная функция стационарного случайного процесса имеет следующие свойства:

- 1) $R(\tau = 0) = \sigma^2$; 2) $R(\tau) = R(-\tau)$; 3) $R(\tau \rightarrow \infty) = 0$.

Часто корреляционные функции процессов в системах управления имеют вид, показанный на рис. 27.

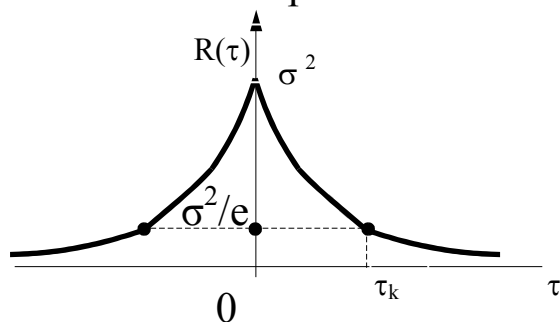


Рис. 27

Интервал времени τ_k , на котором корреляционная функция, т.е. величина связи между значениями случайного процесса, уменьшается в M раз, называется **интервалом** или **временем корреляции случайного процесса**. Обычно $M=10$ или $M=e$. Можно сказать, что значения случайного процесса, отличающиеся по времени на интервал корреляции, слабо связаны друг с другом.

Таким образом, знание корреляционной функции позволяет судить о скорости изменения случайного процесса.

Другой важной характеристикой является энергетический спектр случайного процесса. Он определяется как преобразование Фурье от корреляционной функции:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Очевидно, справедливо и обратное преобразование:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Энергетический спектр показывает распределение мощности случайного процесса, например помехи, на оси частот.

При анализе САУ очень важно определить характеристики случайного процесса на выходе линейной системы при известных

характеристиках процесса на входе САУ. Предположим, что линейная система задана импульсной переходной характеристикой $h(\tau)$. Тогда выходной сигнал в момент времени t_1 определяется интегралом Дюамеля:

$$x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)g(t_1 - \tau_1)d\tau_1,$$

где $g(t)$ – процесс на входе системы. Для нахождения корреляционной функции $R_x(t_1, t_2) = M\{x(t_1)x(t_2)\}$ запишем

$$x(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)g(t_2 - \tau_2)d\tau_2$$

и после перемножения найдем математическое ожидание

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)M\{g(t_1 - \tau_1)g(t_2 - \tau_2)\}d\tau_1d\tau_2.$$

Таким образом, связь между корреляционными функциями входного и выходного случайных процессов устанавливается с помощью следующего двойного интеграла:

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2.$$

Для стационарных процессов корреляционные функции зависят только от разности аргументов $t_1 - t_2 = u$, $(t_1 - \tau_1) - (t_2 - \tau_2) = v$ и поэтому

$$R_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_g(v)d\tau_1d\tau_2.$$

Более простое соотношение можно найти для энергетических спектров $G_g(\omega)$ и $G_x(\omega)$ входного и выходного сигналов при известной передаточной функции $W(j\omega)$ линейной системы. Действительно, найдем преобразование Фурье от левой и правой частей последнего равенства. Получим следующее выражение:

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_g(v)e^{-j\omega u}d\tau_1d\tau_2du.$$

После замены переменной $v = t_1 - t_2 - (\tau_1 - \tau_2) = u - \tau_1 - \tau_2$ или $u = v + \tau_1 - \tau_2$ тройной интеграл преобразуется в произведение

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2) e^{j\omega t_2} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\nu) e^{-j\omega \nu} d\nu.$$

Поскольку преобразование Фурье от импульсной характеристики дает передаточную функцию, находим окончательно связь между энергетическими спектрами процессов на входе и на выходе линейной системы:

$$G_x(\omega) = W(j\omega)W(-j\omega)G_g(\omega) = |W(j\omega)|^2 G_g(\omega).$$

Часто помехи в системах управления имеют очень широкий спектр. В таких случаях их удобно представить в виде так называемого белого шума – процесса с постоянным энергетическим спектром: $G(\omega) = N_0$. Корреляционная функция белого шума $R(\tau) = N_0 \delta(\tau)$, где $\delta(t)$ – импульсная дельта-функция. Это означает, что даже очень близкие по времени значения белого шума не связаны друг с другом.

Воздействие помех на системы управления

Рассмотрим воздействие помехи $n(t)$ на замкнутую линейную систему управления (рис. 28). Будем предполагать, что нам известен энергетический спектр $G_n(\omega)$ помехи.

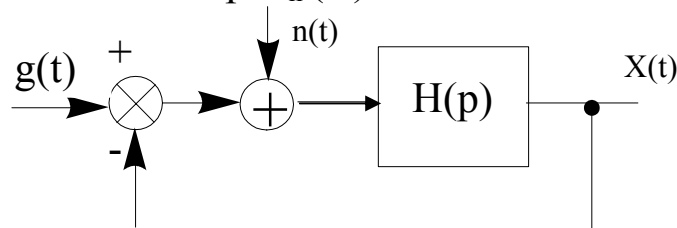


Рис. 28

Найдем дисперсию ошибки, возникающей при действии помехи $n(t)$. Для этого вначале определим энергетический спектр на выходе системы $G_{\text{вых}}(\omega) = |W(p)|^2 G_n(\omega)$, где $W(p) = H(p) / (1+H(p))$ – передаточная функция замкнутой системы управления. После этого с помощью обратного преобразования Фурье можно найти корреляционную функцию помехи на выходе системы:

$$R_{\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вых}}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Наконец, учитывая, что дисперсия $\sigma_{\text{был}}^2 = R_{\text{был}}(0)$, получаем окончательное выражение для дисперсии ошибки системы управления:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{был}}(\omega) d\omega.$$

Пример. Пусть на входе системы, содержащей один интегратор, например, в системе управления приводом, действует широкополосная помеха с энергетическим спектром $G_n(\omega) = N_0$. Передаточная функция системы с одним интегратором $H(p) = \frac{k}{p}$. Определим дисперсию ошибки, вызванной действием помехи. Для этого вначале запишем выражение для передаточной функции замкнутой системы $W(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{k}{p + k}$ и найдем квадрат ее модуля:

$|W(p)|^2 = \frac{k^2}{\omega^2 + k^2}$. Энергетический спектр помехи на выходе рассматриваемой системы

$$G_{\text{был}}(\omega) = |W(p)|^2 G_n(\omega) = \frac{k^2}{\omega^2 + k^2} \cdot N_0.$$

Таким образом, дисперсия ошибки САУ, вызванной действием помехи, находится по формуле:

$$\sigma_{\text{был}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 N_0}{\omega^2 + k^2} d\omega = \frac{kN_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2} kN_0.$$

Описание траекторий движения объектов с помощью случайных процессов

Входные сигналы САУ часто могут быть представлены с помощью типовых детерминированных воздействий. Например, движение объекта с известной постоянной скоростью определяется уравнением $g(t) = g_0 + vt$. Однако изменение входных сигналов во времени не всегда может быть задано с помощью известных детерминированных функций. Во многих случаях для более реалистичного описания, например, траектории движения самолета или корабля, необходимо использовать случайные процессы. При этом известная детерминированная составляющая входного сигнала мо-

жет рассматриваться как математическое ожидание $m(t)$ случайного процесса:

$$g(t) = m(t) + g_0(t),$$

где $g_0(t)$ – стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_g(\tau)$.

Таким образом, второе слагаемое $g_0(t)$ описывает неизвестный нам до эксперимента входной сигнал САУ в виде реализаций случайного процесса. Корреляционная функция этого случайного процесса позволяет задать дисперсию $\sigma_g^2 = R_g(\tau = 0)$ и «среднюю скорость» изменения входного сигнала, связанную с интервалом корреляции процесса $g_0(t)$. На практике приближенные значения $m(t)$ и $R_g(\tau)$ можно получить экспериментально, если в распоряжении разработчика системы имеется большое число N записей $g^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, реальных входных сигналов. Математическое ожидание в этом случае оценивается средним арифметическим

$$m^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g^{(k)}(t),$$

а для оценки корреляционной функции используется следующая формула:

$$R_g^*(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g^{(k)}(t)g^{(k)}(t + \tau).$$

Процесс $g_0(t)$ можно считать стационарным, если результаты расчетов по этой формуле мало зависят от выбора начала отсчета времени t .

Пусть входной сигнал САУ задан в виде суммы $g(t) = m(t) + g_0(t)$. Для нахождения динамических ошибок, возникающих в линейной системе управления, можно воспользоваться принципом суперпозиции. Величина установившейся динамической ошибки за счет детерминированной составляющей изменения входного сигнала находится по известной формуле:

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p),$$

где $\varepsilon(p) = H_\varepsilon(p)m(p)$; $H_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H(p)}$ – передаточная функция по ошибке; $m(p)$ – изображение $m(t)$ по Лапласу.

Случайная составляющая характеризуется величиной дисперсии динамической ошибки:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = R_{\varepsilon}(\tau = 0).$$

Для нахождения корреляционной функции $R_{\varepsilon}(\tau)$ случайной составляющей динамической ошибки вначале находят энергетический спектр $G_g(\omega)$ процесса $g_0(t)$ как преобразование Фурье $R_g(\tau)$. После этого легко находятся энергетический спектр

$$G_{\varepsilon}(\omega) = |H_{\varepsilon}(j\omega)|^2 G_g(\omega)$$

и корреляционная функция динамической ошибки

$$R_{\varepsilon}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\varepsilon}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Суммарное воздействие детерминированного $m(t)$ и случайного $g_0(t)$ входного сигнала $g(t)$ может быть оценено средним квадратом динамической ошибки

$$M\{(g(t) - x(t))^2\} = \varepsilon_{\text{уст}}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2.$$

Пример 1. Предположим, что на САУ (рис. 28) с одним интегратором ($H(p) = k/p$) поступает входной сигнал $g(t) = vt + g_0(t)$, где $g_0(t)$ – случайный процесс с корреляционной функцией $R_g(\tau) = \sigma_g^2 e^{-a|\tau|}$. Определим в отсутствие помех ($n(t) \equiv 0$) средний квадрат динамической ошибки такой системы управления.

Вначале найдем установившуюся ошибку за счет детерминированного слагаемого $m(t) = vt$ входного воздействия. Для системы с астатизмом первого порядка $\varepsilon_{\text{уст}} = v/k$. Энергетический спектр $G_g(\omega)$ случайной составляющей $g_0(t)$ входного воздействия находится как преобразование Фурье корреляционной функции:

$$G_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2}.$$

Заметим, что $T_k = 1/a$ является интервалом корреляции случайного процесса $g_0(t)$ на уровне $1/e$. С другой стороны, параметр a равен ширине энергетического спектра случайного процесса $g_0(t)$ на уровне 0.5, т.е. $G_g(\omega = a)/G_g(\omega = 0) = 0.5$.

После нахождения энергетического спектра случайной составляющей динамической ошибки

$$G_{\varepsilon}(\omega) = |H_{\varepsilon}(j\omega)|^2 G_g(\omega) = \left| \frac{1}{1 + H(j\omega)} \right|^2 G_g(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega^2 + k^2)(\omega^2 + a^2)} \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + k^2}$$

находим дисперсию динамической ошибки

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = R_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\varepsilon}(\omega) d\omega = \frac{a\sigma_g^2}{a+k}$$

Средний квадрат динамической ошибки с учетом детерминированной и случайной составляющих определяется как сумма

$$\varepsilon_{уст}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{v^2}{k^2} + \frac{a\sigma_g^2}{a+k}$$

Из полученного выражения следует, что при заданных параметрах a , v , σ_g^2 входного сигнала уменьшение динамической ошибки достигается при увеличении коэффициента k усиления звена САУ.

Оптимизация параметров системы управления

Динамические ошибки при описании входного сигнала детерминированными функциями $g(p)$ в установившемся режиме определяются по формуле:

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} H_{\varepsilon}(p)g(p),$$

где $H_{\varepsilon}(p) = \frac{1}{1 + H(p)}$; $H(p)$ - передаточная функция разомкнутой САУ.

При описании входного сигнала реализациями случайного процесса $g_0(t)$ динамические ошибки характеризуются величиной дисперсии

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\varepsilon}(j\omega)|^2 G_g(\omega) d\omega,$$

где $G_g(\omega)$ - энергетический спектр входного сигнала $g_0(t)$. При наличии детерминированных $m(t)$ и случайных $g_0(t)$ составляющих входного сигнала $g(t) = m(t) + g_0(t)$ величину динамических ошибок целесообразно оценивать средним квадратом суммарной ошибки $\varepsilon_{уст}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2$.

Кроме динамических, в САУ имеются ошибки, вызванные действием помех $n(t)$. Влияние помех можно характеризовать

дисперсией $\sigma_{\text{ВЫХ}}^2$ выходного сигнала САУ

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_n(j\omega)|^2 G_n(\omega) d\omega,$$

где $W_n(j\omega)$ - передаточная функция по помехе; $G_n(\omega)$ - энергетический спектр помехи. Как правило, помехи в САУ могут быть представлены белым шумом с постоянным на всех частотах энергетическим спектром $G_n(\omega) = N_0$. Кроме того, помехи часто действуют на вход системы и тогда передаточная функция по помехе $W_n(j\omega)$ совпадает с передаточной функцией $W(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1+H(j\omega)}$ замкнутой САУ.

Во всех современных САУ присутствуют как динамические ошибки, так и ошибки за счет действия помех. Для характеристики качества системы управления при наличии динамических и случайных ошибок используют средний квадрат суммарной ошибки:

$$\varepsilon_c^2 = \varepsilon_{\text{уст}}^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{\text{ВЫХ}}^2,$$

который зависит от параметров $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ системы. Параметры \bar{a} обычно выбираются таким образом, чтобы обеспечить условие минимума квадрата суммарной ошибки $\min_a \varepsilon_c^2$. В этом случае говорят об оптимизации параметров системы управления по критерию минимума квадрата суммарной ошибки.

Пример 2. Рассмотрим систему привода антенны или рулей летательного аппарата (см. п. 1.1), находящуюся под воздействием помех (рис. 29).

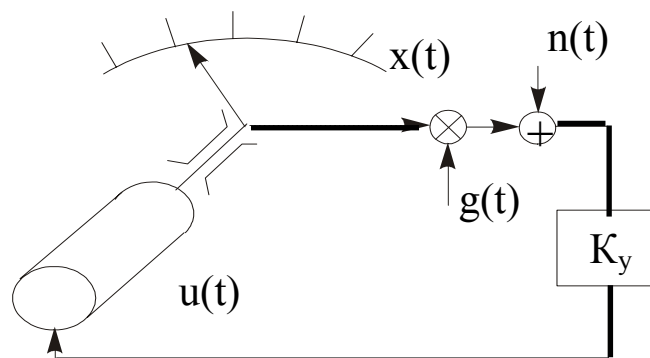


Рис. 29

В такой системе угол поворота $x(t)$ вала двигателя должен повторять заданную траекторию движения – входной сигнал $g(t)$.

Помеха $n(t)$ в данном случае описывает погрешности измерения $x(t)$.

Упрощенная эквивалентная схема такой системы представлена на рис. 30, где $H(p) = \frac{k}{p(1+pT)}$, $k = k_y k_{дв}$ – коэффициент передачи системы; T – постоянная времени двигателя.

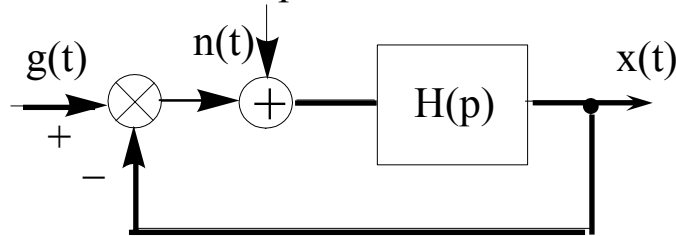


Рис. 30

Предположим, что заданная траектория движения описывается линейной функцией $g(t) = Vt$. Тогда установившиеся динамические ошибки системы с одним интегратором определяются по формуле $\varepsilon_{уст} = V/k$. Чем выше коэффициент усиления k , тем меньше величина динамической ошибки в установившемся режиме.

Будем аппроксимировать помеху белым шумом со спектральной плотностью $G_n(\omega) = N_0$. Тогда $G_{вых}(\omega) = \left| \frac{H(j\omega)}{1 + H(j\omega)} \right|^2 N_0$ и после преобразований находим: $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{N_0 K}{2}$. Из этой формулы следует, что для уменьшения влияния помех необходимо снижать коэффициент усиления k , т.е. повышать инерционность системы управления.

Квадрат суммарной ошибки определяется следующим выражением: $\varepsilon_c^2 = \varepsilon_{уст}^2 + \sigma_{вых}^2 = \frac{V^2}{k^2} + \frac{N_0 k}{2}$. На основе этой формулы можно построить график зависимости $\varepsilon_c^2 = \varepsilon_c^2(k)$ (рис. 31).

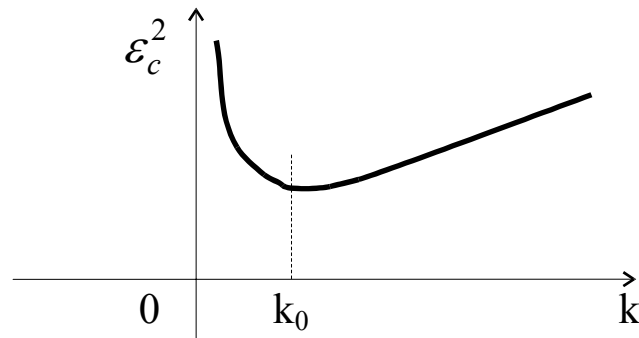


Рис. 31

Очевидно, существует оптимальное значение k_0 параметра k , обеспечивающее минимум суммарной ошибки. После дифференцирования ε_c^2 и приравнивания к нулю производной находим:

$$\frac{d\varepsilon_c^2}{dk} = -\frac{2V^2}{k^3} + \frac{N_0}{2} = 0 \quad \text{или} \quad k_0 = \sqrt[3]{\frac{4V^2}{N_0}}. \text{ Выбирая } k=k_0, \text{ мы решаем за-}$$

дачу оптимизации системы управления по параметру k .

Возвратимся к условиям рассмотренного примера 1. При этом предположим, что траектория движения вместо детерминированной функции описывается с помощью реализаций случайного процесса $g(t)$, имеющего нулевое среднее и корреляционную функцию $R_g(\tau) = \sigma_g^2 e^{-a|\tau|}$.

Динамические ошибки системы определяются величиной дисперсии

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_\varepsilon(j\omega)|^2 G_g(\omega) d\omega.$$

Для системы с одним интегратором $H_\varepsilon(j\omega) = 1/(1+k/j\omega)$. Учитывая также, что

$$G_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau) e^{-a|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2}.$$

получим дисперсию динамической ошибки в следующем виде

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a\sigma_g^2 \omega^2}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + k^2)} d\omega = \frac{a\sigma_g^2}{a+k}.$$

Как уже было показано в первом примере, дисперсия ошибки за счет действия помех определяется по формуле $\sigma_{\text{ввых}}^2 = N_0 k/2$. Вновь обратим внимание на то, что динамические ошибки уменьшаются при увеличении коэффициента усиления k системы управления. Вместе с тем влияние помех при увеличении k возрастает.

Обобщенным показателем качества для рассматриваемой системы служит средний квадрат ошибки:

$$\varepsilon_c^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{\text{ввых}}^2 = \frac{a\sigma_g^2}{a+k} + \frac{N_0 k}{2}.$$

Зависимость ε_c^2 от параметра k носит характер, близкий к графику на рис. 31. Вместе с тем определенным отличием является конечное значение $\varepsilon_c^2(k=0)$. Действительно, если $k=0$, то выходной сигнал системы $x(t) \equiv 0$ и дисперсия динамической ошибки конеч-

на: $\sigma_\varepsilon^2 = M \left\{ (x(t) - g(t))^2 \right\} = \sigma_g^2$. После дифференцирования ε_c^2 по параметру k можно определить точку минимума среднего квадрата ошибки из условия $d\varepsilon_c^2/dk = 0$.

Полученное при этом оптимальное значение k_0 обеспечивает наилучшие условия функционирования рассмотренной САУ при заданных моделях изменения входного сигнала и помех.

* * *

В этом разделе были рассмотрены важнейшие показатели эффективности систем управления. К ним относится устойчивость, характеризуемая двумя показателями: запас устойчивости по усилению и запас устойчивости по фазе. Точность систем управления определяется видом входных воздействий и построением самой системы. С точки зрения минимальных установившихся ошибок важную роль играют астатические системы, т.е. системы управления с интеграторами. Наконец, действие помех связано с появлением случайных ошибок, которые оцениваются величиной их дисперсии $\sigma_{\text{вых}}^2$ на выходе системы управления.

3. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

В предыдущих разделах были рассмотрены три важных показателя качества систем управления. Это – устойчивость, точность и дисперсия ошибки за счет действия помех, Все эти важнейшие показатели позволяют проводить *анализ* конкретных систем управления. Т.е. при заданной структуре системы управления, видах входных воздействий и характеристиках помех можно рассчитать величины динамических ошибок и ошибок за счет действия помех.

В этом разделе будет дано решение задачи *синтеза* или *построения оптимальных* систем управления, т.е. дан ответ на вопрос о том, какая именно система управления обеспечивает наименьшие ошибки при заданных внешних воздействиях.

Решение задачи математического синтеза оптимальной системы управления сложнее, чем уже рассмотренное нами решение задачи анализа систем. Задача анализа была в основном решена в 20-х годах нашего столетия. Но только через много лет советским

математиком А.Н.Колмогоровым (1940) и американским Н.Винером (1948) были даны первые примеры синтеза оптимальных систем. Обобщение и развитие результатов теории синтеза систем управления связано с важными работами Р.Калмана, выполненными в 60-х годах. В этих работах получено простое и вместе с тем довольно общее решение задачи синтеза оптимальных систем управления с изменяющимися параметрами. Именно благодаря этим результатам был достигнут существенный прогресс в управлении космическими аппаратами, ракетами, современными прокатными станами и другими сложными объектами

3.1. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ. ФИЛЬТР ВИНЕРА

Постановка задачи синтеза оптимальной системы управления

Решение задачи оптимизации параметров очень важно, но оно вызывает чувство неудовлетворенности, связанное с полностью заданной структурой исследуемой системы. Действительно, введем в систему какой-нибудь дополнительный элемент, например интегратор или апериодическое звено. Как при этом изменится суммарная ошибка? Если она окажется меньше, то, может быть, следует ввести еще какие-нибудь звенья? При этом, естественно, возникает вопрос о поиске *наилучшей структуры системы управления среди всех возможных систем.*

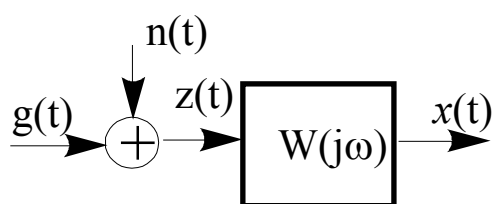


Рис. 32

Для решения задачи синтеза оптимальной системы управления перенесем помеху на её вход и представим систему в виде рис. 32, где $W(j\omega)$ – произвольная передаточная функция замкнутой системы управления. Ей соответствует импульсная переходная характеристика $h(\tau)$.

Будем теперь описывать возможные входные сигналы $g(t)$ с помощью реализаций стационарного случайного процесса с заданным математическим ожиданием, дисперсией и корреляционной функцией $R_g(\tau)$.

В такой постановке показателем качества может быть средний квадрат ошибки системы управления $\sigma_0^2 = M\{(x(t) - g(t))^2\}$.

При заданных характеристиках входного сигнала $R_g(\tau)$ и помех $R_n(\tau)$ будем искать систему управления, в которой достигается минимум среднего квадрата ошибки. Речь идет о том, чтобы минимизировать σ_0^2 не по параметрам конкретной системы, а по виду системы, заданному неизвестной передаточной функцией $W(j\omega)$ или импульсной переходной характеристикой $h(\tau)$. Таким образом, необходимо найти такую систему управления, для которой достигается $\min_{h(\tau)} \sigma_0^2$, где $h(\tau)$ – все возможные импульсные переходные характеристики.

Решение задачи синтеза оптимальной системы управления

Известно, что реакция любой линейной системы на входное воздействие $z(t)=g(t)+n(t)$ может быть записана с помощью интеграла свертки:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)z(t - \tau)d\tau.$$

Подставим $x(t)$ в формулу для среднего квадрата ошибки:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= M\left\{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)z(t - \tau)d\tau - g(t)\right)^2\right\} = \\ &= M\left\{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)z(t - \tau)d\tau\right)^2 - 2g(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)z(t - \tau)d\tau + g^2(t)\right\} \end{aligned}$$

Каждое из трех слагаемых можно легко выразить через интегралы от корреляционных функций. Например,

$$\begin{aligned} M\left\{g(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)z(t - \tau)d\tau\right\} &= M\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t)z(t - \tau)d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)M\{g(t)z(t - \tau)\}d\tau. \end{aligned}$$

$M\{g(t)z(t - \tau)\} = M\{g(t)g(t - \tau)\} + M\{g(t)n(t - \tau)\} = R_g(\tau)$, $M\{g^2(t)\} = \sigma_g^2$, то

$$\sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)h(v)(R_g(\tau - v) + R_n(\tau - v))dv d\tau - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)R_g(\tau)d\tau + \sigma_g^2.$$

Для нахождения вида импульсной переходной характеристики $h_0(\tau)$, минимизирующей σ_0^2 , необходимо применить методы вариационного исчисления [12]. Представим $h(\tau)$ в виде суммы $h(\tau) = h_0(\tau) + \gamma\chi(\tau)$ импульсной характеристики $h_0(\tau)$ оптимальной системы и ее «приращения» $\gamma\chi(\tau)$ – произвольной функции. В соответствии с теорией необходимым условием минимума σ_0^2 служит равенство $\frac{d\sigma_0^2}{d\gamma} \equiv 0 /_{\gamma=0}$.

После дифференцирования это условие можно записать в следующей форме:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) (R_g(\tau - \nu) + R_n(\tau - \nu)) d\nu - R_g(\tau) \right) d\tau \equiv 0.$$

Учитывая произвольный характер $\chi(\tau)$, получаем интегральное уравнение для переходной характеристики оптимальной системы управления:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) (R_g(\tau - \nu) + R_n(\tau - \nu)) d\nu = R_g(\tau).$$

Это уравнение впервые было найдено Н. Винером. Аналогичное соотношение для дискретного времени на несколько лет раньше Н. Винера получил советский математик А.Н. Колмогоров.

Интегральное уравнение Винера для стационарных процессов легко решается с помощью преобразования Фурье. Действительно, после преобразования Фурье левой и правой части находим:

$$W(\omega)(G_g(\omega) + G_n(\omega)) = G_g(\omega) \quad \text{или} \quad W(\omega) = \frac{G_g(\omega)}{G_g(\omega) + G_n(\omega)}.$$

Таким образом, передаточная функция оптимальной системы полностью определяется энергетическим спектром $G_g(\omega)$ входного сигнала, возможными траекториями движения объекта управления, и энергетическим спектром помехи $G_n(\omega)$, действующей в системе.

Пример. Пусть возможные траектории описываются стационарным случайным процессом с корреляционной функцией $R_g(\tau) = \sigma_g^2 e^{-a|\tau|}$, где $\frac{1}{a}$ – интервал корреляции полезного сигнала.

Помеха, действующая на систему, – белый шум $G_n(\omega) = N_0$. С помо-

щью преобразования Фурье корреляционной функции $R_g(\tau)$ найдем спектр полезного сигнала:

$$G_g(\omega) = \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2}$$

Тогда оптимальная система управления должна иметь передаточную функцию следующего вида:

$$W(\omega) = \frac{G_g(\omega)}{G_g(\omega) + G_n(\omega)} = \frac{\frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2}}{\frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2} + N_0} = \frac{2q}{(\omega/a)^2 + (1+2q)},$$

где $q = \frac{\sigma_g^2}{N_0 a}$ - отношение мощности полезной составляющей и мощности помехи в полосе полезного сигнала.

Импульсная переходная характеристика находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h(\tau) = \frac{aq}{\sqrt{1+2q}} e^{-a|\tau|\sqrt{1+2q}}.$$

Таким образом, по заданным характеристикам входных воздействий и помех получаем передаточную функцию и импульсную характеристику оптимальной системы управления, т.е. системы управления, для которой достигается минимум среднего квадрата ошибки.

Рассмотренный подход имеет ряд недостатков. Во-первых, полученное решение физически нереализуемо. Действительно, представим импульсную переходную характеристику оптимальной системы управления в виде графика (рис. 33).

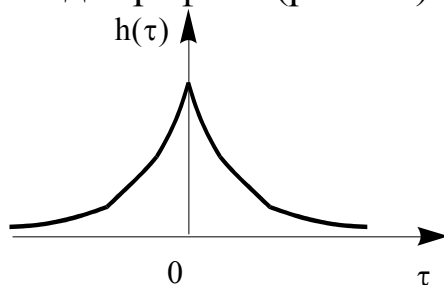


Рис. 33

Эта характеристика по определению является реакцией системы на δ -функцию – импульс в начале координат. У всех физически реализуемых систем отклик будет только после появления входного воздействия, т.е. у всех физически реализуемых систем

$h(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0$. Вторым недостатком – требование стационарности входных воздействий. Это не позволяет рассматривать целый ряд систем управления, например, управление ракетой. Динамика такого управления изменяется по мере сгорания топлива. Кроме того, стационарный режим не позволяет учесть переходные процессы на начальном этапе работы САУ. Наконец, само решение уравнения Н. Винера во многих случаях оказывается очень сложным. Названные недостатки устраняются с помощью методов, рассматриваемых в следующем разделе.

* * *

Несмотря на недостатки рассмотренного метода синтеза оптимальных систем, следует заметить, что Н. Винер впервые поставил и решил важнейшую задачу о поиске структуры оптимальной системы управления, т.е. задачу синтеза оптимальной системы. Имея в своем распоряжении структуру оптимальной системы, разработчик реальных систем управления может опираться на основные рекомендации теории, может осуществлять сравнение конкретных систем с оптимальной по заданному показателю качества – среднему квадрату суммарной ошибки.

3.2. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗУЕМЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ. ФИЛЬТР КАЛМАНА

Как уже отмечалось, наряду с принципиальной возможностью синтеза оптимальной системы управления, метод Н. Винера обладает существенными недостатками. Главные из этих недостатков – нереализуемость фильтра, требование стационарности входных воздействий и трудности решения интегрального уравнения Винера-Хопфа в общем случае. В этом разделе вначале будет предпринята попытка извлечь все то полезное, что имеется в подходе Н. Винера. Это, прежде всего, возможность определить минимально достижимую дисперсию ошибки управления, а также построение фильтров для некоторых конкретных примеров. Затем анализируются возможности получения физически реализуемых систем на основе решения уравнения Н. Винера. Важным шагом будет представление входных сигналов и реализуемой системы

управления в форме стохастических дифференциальных уравнений. В заключение рассматривается обобщение полученных результатов на случай нестационарных воздействий на конечном интервале времени.

Потенциальная эффективность нереализуемых систем управления

Важным достоинством уравнений Н. Винера является возможность довольно простого нахождения дисперсии ошибки оптимальной системы управления, т.е. минимально достижимой дисперсии ошибки для всех возможных систем при заданных характеристиках сигналов и помех. Это позволяет сравнивать дисперсию ошибки реальной системы с полученным граничным значением и тем самым оценивать реальную эффективность конкретных систем в виде величины проигрыша $Q = \sigma_0^2 / \sigma_{0\min}^2$ по отношению к оптимальной САУ.

Минимальную дисперсию ошибки можно найти с помощью подстановки в формулу (см. п. 3.1)

$$\sigma_{0\min}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)h(\tau)R_z(\tau - \nu)d\nu d\tau - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)R_g(\tau)d\tau + \sigma_g^2$$

импульсной переходной характеристики $h(\tau)$ оптимальной системы управления. Эта характеристика находится из решения интегрального уравнения Н. Винера $\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)R_z(\tau - \nu)d\nu = R_g(\tau)$, где

$$R_z(\tau - \nu) = R_g(\tau - \nu) + R_h(\tau - \nu).$$

Преобразуем формулу для дисперсии ошибки:

$$\begin{aligned} \sigma_{0\min}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)R_z(\tau - \nu)d\nu - R_g(\tau) \right) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)R_g(\tau)d\tau + \sigma_g^2 = \\ &= \sigma_g^2 - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)R_g(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Полученное выражение значительно упрощается для случая, когда помеха может быть представлена белым шумом с корреляционной функцией $R_n(\nu) = N_0 \delta(\nu)$. Действительно, полагая $\tau = 0$ в уравнении Н. Винера, найдем следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(v) (R_g(v) + R_n(v)) dv = \sigma_g^2$$

или $\sigma_g^2 - \int_{-\infty}^{\infty} h(v)R_g(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)R_n(v)dv$. Таким образом

$$\sigma_{0\min}^2 = \sigma_g^2 - \int_{-\infty}^{\infty} h(v)R_g(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)R_n(v)dv$$

и, после подстановки $R_n(v) = N_0\delta(v)$, окончательно запишем:

$$\sigma_{0\min}^2 = N_0 h(0).$$

Пример 1. Пусть $R_g(\tau) = \sigma_g^2 e^{-a|\tau|}$, $G_n(\omega) = N_0$. В этом случае

$$G_g(\omega) = \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2}, \quad W(j\omega) = \frac{G_g(\omega)}{G_g(\omega) + G_n(\omega)} = \frac{2a^2 q}{\omega^2 + a^2(1+2q)}$$

$$h(\tau) = \frac{aq}{\sqrt{1+2q}} e^{-a|\tau|\sqrt{1+2q}}, \quad q = \frac{\sigma_g^2}{N_0 a}.$$

Таким образом, в рассмотренном примере

$$\sigma_{0\min}^2 = N_0 \cdot \frac{aq}{\sqrt{1+2q}} = \frac{\sigma_g^2}{\sqrt{1+2q}}.$$

Построим зависимость $\sigma_{0\min}^2 / \sigma_g^2(q)$ относительной дисперсии ошибки оптимальной системы от величины отношения q дисперсий полезного сигнала σ_g^2 и помехи в полосе сигнала $N_0 a$ (рис. 34).

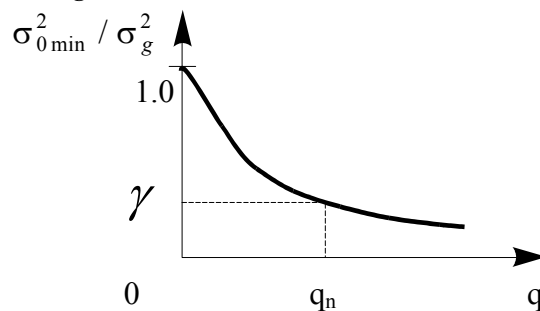


Рис. 34

Задавая требуемое значение дисперсии ошибки с помощью найденной зависимости, можно определить пороговое отношение сигнал/помеха q_n , начиная с которого будет обеспечена заданная точность. Таким образом, при заданном показателе качества $\gamma = \sigma_{0\min}^2 / \sigma_g^2$ формируются требования к характеристикам входно-

го воздействия и к уровню помехи, необходимые при проектировании САУ.

Физически реализуемые системы. Фильтр Винера

Обратимся к уже рассмотренному примеру, в котором импульсная переходная характеристика $h(\tau) = \frac{aq}{\sqrt{1+2q}} e^{-a|\tau|\sqrt{1+2q}}$. Представим такую характеристику в виде графика на рис. 33. Еще раз отметим, что на рис. 33 представлена реакция конкретной линейной системы на действие короткого импульса в момент времени $\tau = 0$. При этом реакция системы появляется раньше, чем воздействие на систему. Такие системы называются **физически нереализуемыми**

При выводе уравнения Н.Винера это обстоятельство не учитывалось. Именно поэтому решение задачи построения оптимальной системы и приводит к физически нереализуемым устройствам.

Тем не менее, можно произвести модификацию уравнения Н.Винера и получить на его основе физически реализуемые системы. Это осуществляется следующим образом. Представим синтезируемую систему в виде рис. 35.

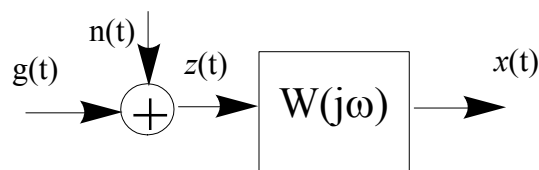


Рис. 35

Система получается физически нереализуемой. Однако, если бы входное воздействие $z(t)$ было белым шумом, то можно импульсную переходную характеристику оптимальной реализуемой системы просто положить равной нулю при $\tau < 0$. Для реальных воздействий $z(t)$ сделаем дополнительное преобразование с коэффициентом передачи $H_1(j\omega)$, такое, чтобы свести задачу к построению системы управления, на входе которой присутствует белый шум $z_1(t)$ (рис. 36).

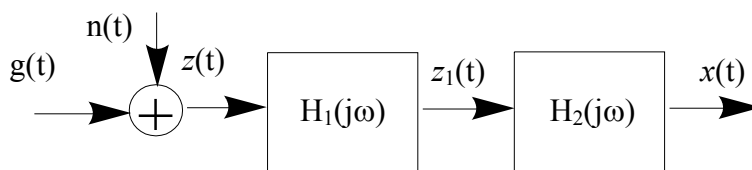


Рис. 36

После этого с помощью уравнения Винера найдем передаточную функцию $H_2(j\omega)$ и выделим ее реализуемую часть $H_{2P}(j\omega)$. Общая передаточная функция оптимальной реализуемой системы запишется в виде: $W(j\omega) = H_1(j\omega) H_{2P}(j\omega)$.

Каким же образом превратить $z(t)$ в белый шум с помощью фильтра? Нам известен энергетический спектр $G_z(\omega) = G_g(\omega) + G_n(\omega)$. Необходимо, чтобы $G_z(\omega) |H_1(j\omega)|^2 = N_1$, где N_1 - спектральная плотность белого шума z_1 , например, $N_1 = 1$. Запишем это выражение по-другому. Представим энергетический спектр $G_z(\omega)$ в виде произведения $G_z(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega)$, а $|H_1(j\omega)|^2 = H_1(j\omega)H_1(-j\omega)$. Тогда требуется, чтобы

$$\psi(j\omega)\psi(-j\omega)H_1(j\omega)H_1(-j\omega) = 1.$$

Для этого необходимо выбрать фильтр с передаточной функцией $H_1(j\omega) = 1/\psi(j\omega)$. Такой фильтр превращает входное воздействие в белый шум и называется **обеляющим**. Заметим, что введение обеляющего фильтра не приводит к потере оптимальности системы. Действительно, всегда можно восстановить входной сигнал с помощью фильтра с передаточной функцией $H_1(j\omega)$. Вместе с тем, преобразование $z(t)$ в белый шум $z_1(t)$ позволяет построить оптимальную реализуемую систему. Для этого из уравнения Н.Винера найдем передаточную функцию $H_2(j\omega)$ оптимальной нереализуемой системы, выделим реализуемую часть и в результате получим оптимальный реализуемый фильтр Винера. Наиболее просто это осуществляется, если помеха $n(t)$ является белым шумом со спектральной плотностью N_0 .

Тогда передаточная функция оптимального реализуемого фильтра записывается в виде $W_P(j\omega) = 1 - \frac{\sqrt{N_0}}{\psi(j\omega)}$. Для по-

строения такого фильтра достаточно представить энергетический спектр $G_z(\omega) = G_g(\omega) + N_0$ в виде произведения двух комплексно-

сопряженных сомножителей $G_z(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega)$ и воспользоваться записанной формулой для передаточной функции оптимальной реализуемой системы управления.

Пример 2. Пусть $R_g(\tau) = \sigma_g^2 e^{-a|\tau|}$, $G_g(\omega) = \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2}$, $G_n(\omega) = N_0$.

Разложим $G_z(\omega) = G_g(\omega) + G_n(\omega)$ на комплексно-сопряженные множители:

$$\begin{aligned} G_z(\omega) &= \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2} + N_0 = N_0 \frac{\omega^2 + a^2(1+2q)}{\omega^2 + a^2} = \\ &= \sqrt{N_0} \frac{a\sqrt{1+2q} + j\omega}{a + j\omega} \sqrt{N_0} \frac{a\sqrt{1+2q} - j\omega}{a - j\omega}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\psi(j\omega) = \sqrt{N_0} \frac{a\sqrt{1+2q} + j\omega}{a + j\omega}$. Найдем теперь передаточную функцию оптимального реализуемого фильтра:

$$W_p(j\omega) = 1 - \frac{\sqrt{N_0}}{\psi(j\omega)} = 1 - \frac{a + j\omega}{a\sqrt{1+2q} + j\omega} = \frac{2q}{\sqrt{1+2q}(\sqrt{1+2q} + 1)(1 + j\omega T)},$$

где $T = \frac{1}{a\sqrt{1+2q}}$. Импульсная характеристика такого фильтра определяется с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h(\tau) = \frac{2aq}{\sqrt{1+2q} + 1} e^{-a\sqrt{1+2q}\tau}, \quad \tau \geq 0.$$

Точно так же, как и раньше, может быть найдена минимально достижимая дисперсия ошибки реализуемой системы:

$$\sigma_{0p}^2 = N_0 h(0) = \frac{2aqN_0}{\sqrt{1+2q} + 1} = \frac{2\sigma_g^2}{\sqrt{1+2q} + 1}.$$

Заметим, что найденная дисперсия ошибки σ_{0p}^2 больше, чем дисперсия ошибки $\sigma_{0min}^2 = \frac{\sigma_g^2}{\sqrt{1+2q}}$ нереализуемой системы управления (см. пример 1).

Таким образом, подход Винера хотя и с дополнительными усложнениями, но все-таки дает возможность построения физически реализуемой системы управления и определения ее точностных характеристик для стационарных входных воздействий и бесконечного времени наблюдения.

Фильтр Калмана для стационарных процессов

Полученное в последнем примере решение задачи синтеза оптимальной реализуемой системы дает возможность определить импульсную переходную характеристику $h(\tau)$ или передаточную функцию $W_p(j\omega)$. Вместе с тем, существует еще одна форма представления оптимальной системы с помощью дифференциального уравнения. На это обстоятельство в 1959 г. обратил внимание Р. Калман. Помимо простоты реализации оптимальных САУ для определенного, но достаточно широкого класса входных сигналов, метод Р. Калмана позволяет произвести синтез оптимальных многомерных нестационарных САУ.

Рассмотрим вначале возможности описания оптимальной системы, с помощью дифференциального уравнения. Как было установлено, передаточная функция оптимальной реализуемой системы управления записывается в виде:

$$W_p(j\omega) = \frac{2q}{\sqrt{1+2q}(\sqrt{1+2q}+1)(1+j\omega T)},$$

где $T = \frac{1}{a\sqrt{1+2q}}$. При этом выходной сигнал

$$x(p) = W_p(p)z(p) \quad \text{или}$$

$$x(p) = \frac{2q}{\sqrt{1+2q}(\sqrt{1+2q}+1)(1+pT)} z(p).$$

После несложных преобразований:

$$x(p) + pTx(p) = \frac{2q}{\sqrt{1+2q}(\sqrt{1+2q}+1)} z(p),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{T}x(t) = \frac{2q/T}{\sqrt{1+2q}(\sqrt{1+2q}+1)} z(t),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = \frac{2aq}{(\sqrt{1+2q}+1)} (z(t) - x(t)),$$

получим следующее дифференциальное уравнение, описывающее оптимальную систему:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + VN_0^{-1}(z(t) - x(t)),$$

где $V = \sigma_{0P}^2 = \frac{2\sigma_g^2}{\sqrt{1+2q+1}}$. Такую систему можно представить с помощью структурной схемы на рис.37, где $K=VN_0^{-1}$.

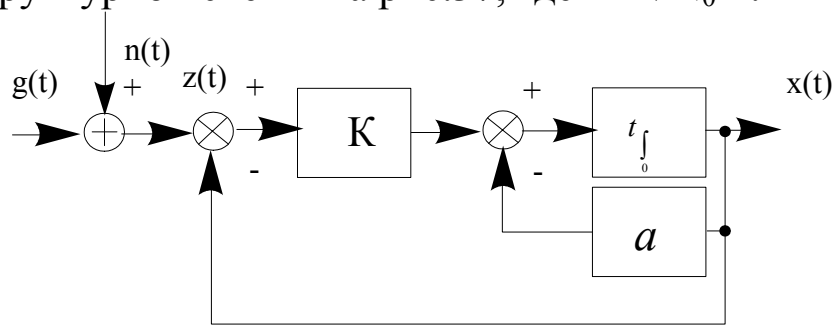


Рис. 37

Эта структурная схема и является решением Калмана рассматриваемой задачи. Оказывается, процедуру оптимального управления можно представить в виде системы с обратной связью. Очень важно, что структура не изменяется и остается оптимальной, если изменяются параметры сигналов и помех, а также на этапе переходного процесса. В этих случаях оптимальная система (рис. 37) становится системой с переменными параметрами $k=k(t)$ и $a = a(t)$.

Р. Калман обратил также внимание, что часть системы управления полностью определяется видом входного сигнала. Действительно, если спектр входного воздействия $G_g(\omega) = \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2}$, то такое воздействие может быть сформировано из белого шума $\xi(t)$ с помощью фильтра, описываемого дифференциальным уравнением $\frac{dg(t)}{dt} + ag(t) = a\xi(t)$.

Найдем величину N_ξ энергетического спектра белого шума $\xi(t)$, обеспечивающего формирование сигнала $g(t)$ с заданным спектром $G_g(\omega) = 2a\sigma_g^2 / (\omega^2 + a^2)$. После преобразования по Лапласу дифференциальное уравнение запишется в виде $pg + ag = a\xi(p)$ – энергетический спектр. При этом передаточная функция соответствующего фильтра $H_\phi(p) = \frac{a}{p+a}$ или

$|H_\phi(j\omega)|^2 = \frac{a^2}{\omega^2 + a^2}$. Таким образом, спектр сигнала $g(t)$ на выходе фильтра $G_g(\omega) = N_\xi |H_\phi(j\omega)|^2 = \frac{N_\xi a^2}{\omega^2 + a^2}$, т.е. для полного соответствия

спектру входного воздействия достаточно выбрать $N_{\xi} a^2 = 2a\sigma g^2$ или $N_{\xi} = 2\sigma_g^2/a$.

С другой стороны, рассмотренное дифференциальное уравнение можно представить как уравнение, описывающее систему с обратной связью, показанную на рис. 38.

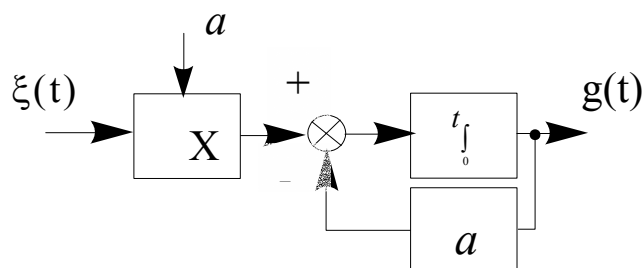


Рис. 38

Сравним структурные схемы оптимальной САУ (рис. 37) и полученной системы (рис.38), формирующей входной сигнал $g(t)$. Анализ структурных схем и связанных с ними дифференциальных уравнений показывает полное соответствие формирующего фильтра и значительной части структуры оптимальной САУ.

* * *

Таким образом, Р.Калман предложил другое представление для решения задачи построения оптимальной системы управления, данной Н.Винером. Но это представление решения в виде замкнутой системы, близкой по виду к формирующему фильтру, имело далеко идущие последствия. Было установлено, что структура системы управления не изменяется и при управлении одновременно несколькими параметрами, а также при нестационарных воздействиях. Эта структура сохраняется и остается оптимальной для широкого класса возможных входных сигналов и помех.

3.3. МНОГОМЕРНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Вначале подытожим основные результаты, полученные при решении задачи синтеза одномерной оптимальной реализуемой системы управления.

Пусть входное воздействие $g(t)$ представляется реализацией случайного процесса с энергетическим спектром $G_g(\omega) = \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2}$ и в сумме $z(t) = g(t) + n(t)$ с белым шумом (помехой) $n(t)$ поступает на систему управления. В соответствии с методом Винера оптимальная реализуемая система имеет передаточную функцию

$$W_P(j\omega) = 1 - \frac{\sqrt{N_0}}{\psi(j\omega)} = \frac{2q}{\sqrt{1+2q}(\sqrt{1+2q}+1)(1+j\omega T)},$$

где $q = \frac{\sigma_g^2}{N_0 a}$, $x(j\omega) = W_P(j\omega)Z(j\omega)$.

Р.Калман предложил другое представление того же решения в виде дифференциального уравнения $\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + VN_0^{-1}(z(t) - x(t))$.

При этом входное воздействие $g(t)$ удобно представить в виде выходного сигнала фильтра (рис.38), описываемого дифференциальным уравнением $\frac{dg(t)}{dt} = -ag(t) + \xi(t)$.

Фильтр, с помощью которого моделируется входное воздействие $g(t)$, обычно называют **формирующим фильтром**. Само же входное воздействие $g(t)$ при этом является состоянием формирующей системы.

Было установлено, что при описании входных сигналов в виде состояния некоторой системы всегда получается решение в виде точно такой же по виду системы с обратной связью. При этом структура САУ сохраняется для любого интервала времени, в том числе и во время переходного процесса, при изменении коэффициентов a , N_0 , σ_g^2 во времени, а также в случае, когда $x(t)$ является вектором, т.е. при одновременном управлении по нескольким параметрам. И во всех этих случаях структура системы управления оказывается оптимальной в смысле минимума дисперсии ошибки $\sigma_0^2(t) = M\{x(t) - g(t)\}^2$.

В этом разделе вначале рассматриваются математические модели входных многомерных нестационарных воздействий. После этого обсуждается структура оптимальной многомерной системы, которая называется фильтром Калмана.

Описание входных воздействий

Пусть нам необходимо осуществлять управление одновременно n выходными сигналами системы $x_1(t), \dots, x_n(t)$. При этом мы хотим получить наименьшие отличия этих сигналов от заданных функций – входных воздействий $\bar{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \dots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$. Будем описывать

входные воздействия с помощью системы линейных дифференциальных уравнений состояния:

$$\frac{d\bar{g}(t)}{dt} = A(t)\bar{g}(t) + V(t)\bar{\xi}(t),$$

где $A(t)$ – $(n \times n)$ – матрица: $\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$; $\bar{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \dots \\ \xi_m(t) \end{pmatrix}$ – век-

торный белый шум с энергетическим спектром каждой компоненты $N_{\xi_1}(t), N_{\xi_2}(t), \dots, N_{\xi_m}(t)$ соответственно.

$$V(t) - (n \times m)\text{-матрица } V(t) = \begin{pmatrix} v_{11}(t) & \dots & v_{1m}(t) \\ v_{21}(t) & \dots & v_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n1}(t) & \dots & v_{nm}(t) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Уравнение состояния для трех независимых параметров.

Предположим, что необходимо обеспечить измерение траектории по 3 координатам, не связанным друг с другом. Эти координаты описываются случайными процессами, соответствующими дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{dg_1(t)}{dt} = -a_1(t)g_1(t) + \xi_1(t), \\ \frac{dg_2(t)}{dt} = -a_2(t)g_2(t) + \xi_2(t), \\ \frac{dg_3(t)}{dt} = -a_3(t)g_3(t) + \xi_3(t). \end{cases}$$

Введем вектор $\bar{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix}$, матрицу $A(t) = \begin{pmatrix} -a_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & -a_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & -a_3(t) \end{pmatrix}$ и

белый шум $\bar{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{pmatrix}$. Тогда одновекторное уравнение состояния

$$\frac{d\bar{g}(t)}{dt} = A(t)\bar{g}(t) + \bar{\xi}(t)$$

в точности описывает все заданные входные воздействия. Для проверки достаточно раскрыть в этом уравнении матричные и векторные обозначения.

Пример 2. Входное воздействие с дробно-рациональным энергетическим спектром.

Пусть $g(t)$ описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d^3 g(t)}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dg(t)}{dt} + a_3 g(t) = \xi(t).$$

Найдем энергетический спектр такого воздействия. Для этого вначале выполним преобразование Лапласа $p^3 g(p) + a_1 p^2 g(p) + a_2 p g(p) + a_3 g(p) = \xi(p)$ и запишем передаточную функцию формирующего фильтра

$$H_\varphi(p) = \frac{1}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}.$$

Энергетический спектр входного воздействия находится по формуле $G_g(\omega) = |H_g(j\omega)|^2 N_\xi$. При выборе различных коэффициентов a_1, a_2, a_3 могут быть получены энергетические спектры разнообразной формы.

Но рассматриваемое уравнение имеет третий порядок. Преобразуем его в одно векторное уравнение. Введем вспомогательные переменные: $\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = g_2(t)$, $\frac{dg(t)}{dt} = g_1(t)$. Тогда исходное уравнение переписется в форме:

$$\begin{cases} \frac{dg_2(t)}{dt} = -a_1 g_2(t) - a_2 g_1(t) - a_3 g(t) + \xi(t) \\ \frac{dg_1(t)}{dt} = g_2(t) \\ \frac{dg(t)}{dt} = g_1(t) \end{cases}.$$

Введем теперь вектор $\bar{g}(t) = \begin{pmatrix} g_2(t) \\ g_1(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ и тогда

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{g}(t) + \bar{\xi}(t), \text{ где } \bar{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Таким}$$

образом дифференциальное уравнение третьего порядка удается преобразовать к стандартной векторной форме. Очевидно, что точно так же к векторному уравнению первого порядка можно преобразовать дифференциальное уравнение произвольного порядка.

Пример 3. Полиномиальное воздействие.

Пусть $g(t) = g_0 + Vt + at^2/2$. Такой входной сигнал получается как решение следующего дифференциального уравнения $\frac{d^3g}{dt^3} = 0$. Заметим, что этот результат можно рассматривать как частный случай предыдущего примера, полагая $a_1 = a_2 = a_3 = \xi \equiv 0$. Тогда $\frac{d^3g}{dt^3} = 0$,

$\frac{d^2g}{dt^2} = a$, $\frac{dg}{dt} = at + V$, $g(t) = Vt + at^2/2 + g_0$, a, V, g_0 — начальные условия.

Введем вспомогательные переменные $\frac{d^2g(t)}{dt^2} = g_2(t)$, $\frac{dg(t)}{dt} = g_1(t)$.

Тогда уравнения состояния запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{dg_2(t)}{dt} = 0, \\ \frac{dg_1(t)}{dt} = g_2(t), \\ \frac{dg(t)}{dt} = g_1(t), \end{cases}$$

или в стандартной форме:

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = A\bar{g}(t) + \bar{\xi}(t),$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{\xi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение состояния $\frac{d\bar{g}}{dt} = A(t)\bar{g}(t) + \bar{\xi}(t)$ описывает широкий класс реальных случайных процессов.

Пусть теперь $\bar{g}(t)$ передается по каналу связи и вместе с помехой поступает на вход системы управления:

$$\bar{Z}(t) = C(t)\bar{g}(t) + \bar{n}(t), \text{ где } \bar{Z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \dots \\ z_m(t) \end{pmatrix}, C(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & \dots & c_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1}(t) & \dots & c_{mn}(t) \end{pmatrix};$$

$$\bar{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ \dots \\ n_m(t) \end{pmatrix} - \text{помеха в виде векторного белого шума со спектральными плотностями каждой компоненты } N_{01}(t), N_{02}(t), \dots, N_{0m}(t) \text{ соответственно.}$$

Рассмотренная векторная модель позволяет дать математическое описание различных ситуаций, возникающих при формировании входных сигналов проектируемых САУ.

Пример 4. Предположим, что один и тот же входной сигнал $g(t)$ передается по двум независимым каналам связи. При этом на выходе первого канала наблюдается смесь $z_1(t) = c_1(t)g(t) + n_1(t)$ сигнала $g(t)$ с помехой $n_1(t)$, а на выходе второго канала наблюдается процесс $z_2(t) = c_2(t)g(t) + n_2(t)$. Для того, чтобы представить такие наблюдения в стандартной векторной форме, введем векторы $\bar{z}(t) = (z_1(t) \ z_2(t))^T$, $\bar{n}(t) = (n_1(t) \ n_2(t))^T$ и матрицу

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}. \text{ В этом случае одно векторное уравнение}$$

$$\bar{z}(t) = c(t)g(t) + \bar{n}(t) \text{ или } \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} g(t) + \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix} \text{ описывает}$$

двухканальную систему наблюдений скалярного процесса $g(t)$.

Пример 5. Пусть входной сигнал $g(t)$ имеет сложный энергетический спектр и описывается дифференциальным уравнением третьего порядка (см. пример 2). В этом случае уравнение состоя-

ния включает трехмерный вектор $\bar{g}(t) = \begin{pmatrix} g_2(t) \\ g_1(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$. Производятся наблюдения сигнала $g(t)$ на фоне помехи $n(t)$: $z(t) = c(t)g(t) + n(t)$. Для того, чтобы получить стандартное представление наблюдений $z(t) = c(t)\bar{g}(t) + n(t)$ необходимо ввести матрицу $\bar{C}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C(t) \end{pmatrix}$.

Многомерный фильтр Калмана

Наблюдаемый многомерный сигнал $\bar{z}(t)$ поступает на систему управления. В наилучшей системе обеспечивается минимум суммарной ошибки:

$$\sigma_0^2 = M\{(g_1 - x_1)^2\} + M\{(g_2 - x_2)^2\} + \dots + M\{(g_n - x_n)^2\}.$$

Структура оптимальной системы описывается следующим уравнением:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t)\bar{x}(t) + K(t)(\bar{z}(t) - C(t)\bar{x}(t)),$$

где $K(t) = V(t)N_0^{-1}C^T(t)$; $N_0(t) = \begin{pmatrix} N_{01}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{02}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_{0m}(t) \end{pmatrix}$,

а $\frac{dV(t)}{dt} = A(t)V(t) + V(t)A^T(t) - V(t)N_0^{-1}V(t) + N_\xi(t)$. Последнее уравнение является дифференциальным уравнением Риккати и обычно требует ЭВМ для решения. Но это решение находится, как правило, один раз до проведения эксперимента. После этого значения $V(t)$ могут храниться в памяти. Уравнение для матрицы $V(t)$ называется **дисперсионным**, поскольку $V(t)$ – точная матрица дисперсий и взаимных ковариаций ошибок управления.

Итак, и в многомерном нестационарном случае система управления сохраняет свою структуру (рис. 39). По-прежнему это система, в которой формируется сигнал ошибки $\bar{z}(t) - C(t)\bar{x}(t)$. Он поступает на фильтр, включающий переменный коэффициент усиления $K(t)$ и интеграторы, охваченные обратной связью.

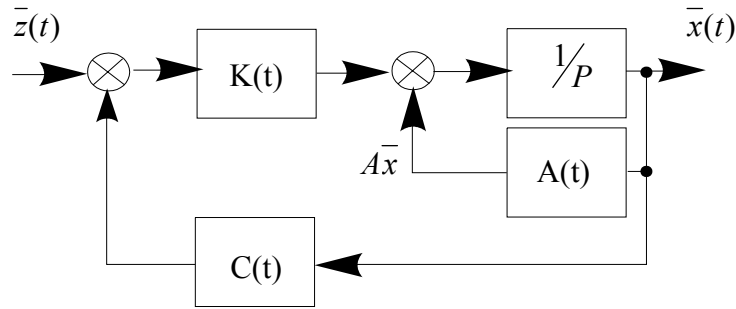


Рис. 39

При этом часть системы в точности соответствует формирующему фильтру.

Пример 6. Еще раз рассмотрим систему управления при входном сигнале, заданном уравнением:

$$\frac{dg}{dt} = -ag(t) + \xi(t), \quad t \geq 0,$$

где $N_x(t) = 2as_g^2$.

В этом случае уравнение Калмана для наблюдений $z(t)=g(t)+n(t)$ запишется в виде:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + K(t)(z(t) - x(t)), \quad t \geq 0,$$

где $K(t)=V(t)N_0^{-1}$;

$$\frac{dV(t)}{dt} = -2aV(t) - V^2N_0^{-1} + N_\xi.$$

Существенной особенностью записанного уравнения фильтрации является зависимость коэффициента усиления $K(t)$ от времени. Это связано

с тем, что фильтр Калмана учитывает переходный процесс в системе и оптимален для каждого момента времени t . Характерную зависимость $V(t)$ можно проиллюстрировать графиком на рис. 40.

В начальный момент времени ($t=0$) рассогласование между выходным сигналом $x(t=0)=0$ системы управления и заданной траекторией движения $g(t=0)=g(0)$ может быть большим. Поэтому и коэффициент усиления $K(t=0)=\sigma_g^2/N_0$ в этот момент наибольший. По мере уменьшения динамической ошибки в процессе работы системы коэффициент усиления уменьшается и стремится к оптимальному для установившегося режима значению $\sigma_{0\min}^2$. Это значение можно найти, полагая $\frac{dV(t)}{dt}=0$ в установившемся режиме. То-

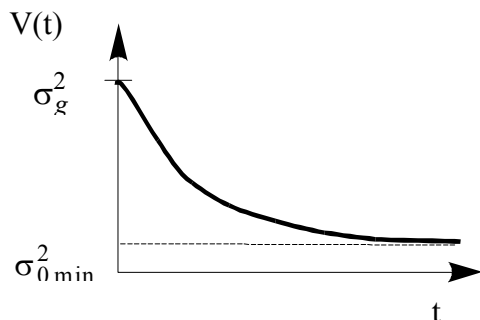


Рис. 40

гда из уравнения Риккати получаем: $-2aV - V^2 N_0^{-1} + N_\xi = 0$, где $N_x = 2as_g^2$ или $V^2 + 2aN_0V - 2as_g^2 = 0$. Решение этого уравнения $\sigma_{0\min}^2 = V = \frac{2\sigma_g^2}{\sqrt{1+2q}+1}$ совпадает с известной величиной дисперсии

ошибки стационарного реализуемого фильтра Винера.

Итак, для одномерного случая отличием приведенного решения является учет переходного процесса и выбор оптимальных параметров системы управления в каждый момент времени.

Оптимальное управление предполагает точное знание моделей входных воздействий и характеристик помех. Однако на практике численные значения параметров моделей известны не точно. Кроме того, вычислительные трудности ограничивают применение сложных моделей высокой размерности, предопределяя применение более грубых и более простых приближений к реальным процессам.

Указанные причины приводят к отклонению действительных характеристик эффективности от расчетных. Величина отклонений действительных характеристик систем управления от потенциальных за счет изменения параметров внешних воздействий называется **чувствительностью системы управления**.

Предположим, что Q – некоторый показатель качества, например, средний квадрат ошибки системы, зависящий от некоторого параметра α входного сигнала. При отклонении α от заданного значения α_0 показатель качества Q также отклоняется от оптимального значения Q_0 . В этом случае чувствительность можно характеризовать отношением: $\frac{\Delta Q}{Q} \frac{\alpha}{\Delta \alpha}$, а при малых отклонениях – величиной

$\gamma = \frac{\alpha dQ}{Q d\alpha}$. Чем выше чувствительность, тем больше опасений, что в реальных условиях система управления будет иметь худшие характеристики качества по сравнению с расчетными. Если, наоборот, величина γ мала, то допустимы значительные отклонения параметров внешних воздействий. В предельном случае, когда $\gamma=0$, показатель качества системы вообще не зависит от параметра α . В таком случае говорят, что **система управления инвариантна** относительно параметра α .

В этом разделе рассмотрены два подхода к построению оптимальных систем управления. Первый подход связан с именем Н.

Винера и основан на нахождении структуры оптимальной системы с помощью решения интегрального уравнения. Главные недостатки этого метода – сложность решения задач синтеза САУ и требования к стационарности входных воздействий. Поэтому при проектировании современных нестационарных систем управления применяется метод пространства состояний, предложенный Р. Калманом. Этот метод позволяет на инженерном уровне решать сложные задачи построения оптимальных многомерных систем с учетом переходных процессов в условиях нестационарных помех и нестационарных воздействий.

4. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

4.1. ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотренные в предыдущем разделе пособия аналоговые системы управления обладают рядом недостатков. Отметим основные из них.

1. Нестабильность параметров. При изменении внешних воздействий, особенно таких, как температура, влажность, вибрация, давление изменяются параметры аналоговых усилителей, фильтров, интеграторов и других элементов. Это приводит к изменению основных показателей качества системы управления.

2. Сложность централизованного управления несколькими объектами. Этот недостаток связан с проблемой точной передачи аналоговых сигналов на большие расстояния. При прохождении непрерывных сигналов по кабелям, проводам или радиоканалам они претерпевают искажения за счет ограниченности полосы пропускания канала связи, нелинейности приемопередающего тракта, а также из-за действия разнообразных помех.

3. Сложность серийного производства аналоговых систем управления. Обычно системы управления являются сложными объектами, включающими большое число аналоговых элементов и устройств. При серийном производстве таких систем возникают значительные трудности индивидуальной настройки каждой отдельной системы управления. В итоге все выпускаемые системы

отличаются друг от друга параметрами и требуют постоянных довольно сложных и трудоемких регулировок.

Названные и ряд других причин обусловили широкое распространение цифровых систем управления. В цифровых системах информация заключена не в таких параметрах сигналов, как величина напряжения или тока, а в числах, представленных обычно в двоичном коде. Для формирования, передачи и преобразования двоичных сигналов в цифровых системах управления используются отдельные элементы цифровой техники, т.е. регистры, счетчики, логические элементы, а также микропроцессорные комплекты, специализированные или универсальные цифровые вычислительные машины.

Применение цифровых систем позволяет устранить основные недостатки аналоговых систем управления. Вместе с тем, следует отметить, что широкое использование цифровых систем управления пока еще сдерживается их большой стоимостью и ограниченным быстродействием.

Очень важным является то, что математическое описание и анализ большинства современных цифровых систем управления базируются на методах анализа аналоговых систем. Поэтому остановимся лишь на тех особенностях, которые возникают при проектировании и расчете характеристик цифровых систем управления.

Структурная схема цифровой системы управления

Структурная схема аналоговой следящей системы имеет следующий вид (рис.41).

Основная задача такой САУ – обеспечить минимальное рассогласование $\varepsilon(t)$ между выходным сигналом системы $x(t)$, например, реальной траекторией движения ракеты, и входным сигналом $g(t)$ – заданной траекторией движения.

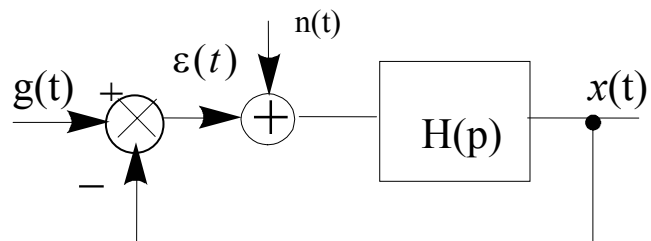


Рис. 41

Фильтр с передаточной функцией $H(p)$ выбирается как раз с учетом требования минимизации ошибки за счет динамики движения объекта и помех $n(t)$, действующих на систему управления.

При этом передаточная функция $H(p)$ учитывает как элементы, которые включаются специально для улучшения характеристик системы, так и устройства с заданными передаточными функциями, например, рулевые устройства ракеты. Рассмотрим с точки зрения преобразования в цифровую систему управления уже знакомую нам систему управления двигателем (рис. 42).

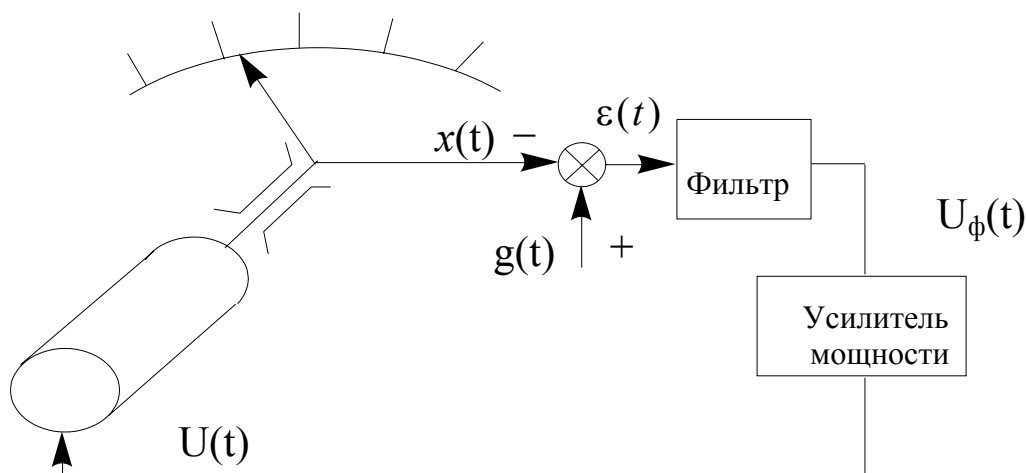


Рис. 42

Анализ такой системы показывает, что основным нестабильным элементом является фильтр. В меньшей степени при изменении климатических воздействий изменяются характеристики усилителя мощности и двигателя.

Таким образом, для повышения стабильности рассматриваемой системы было бы целесообразно, в первую очередь, заменить аналоговый фильтр цифровым. Это можно сделать следующим образом.

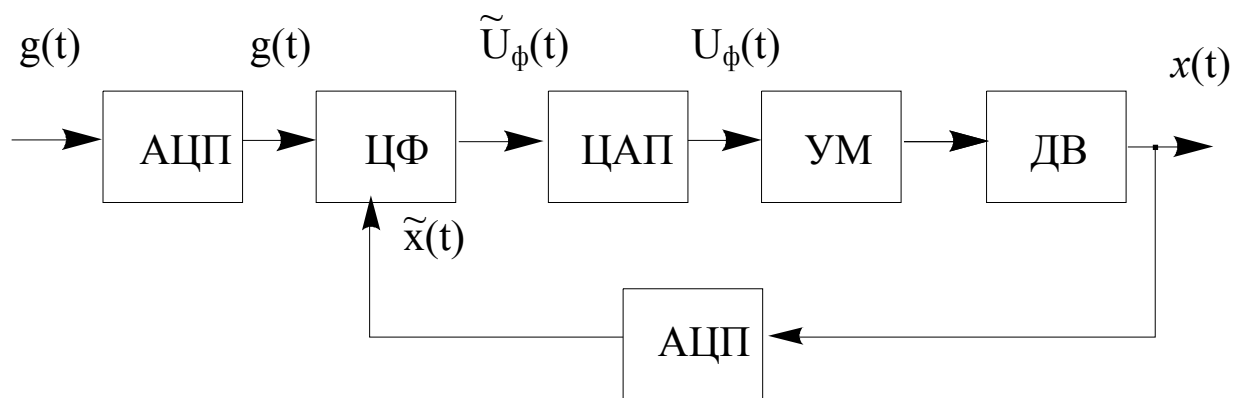


Рис.43

Преобразуем входной и выходной сигналы $g(t)$ и $x(t)$ в цифровые коды. Тогда фильтр можно будет реализовать на ЦВМ. Выходные коды $\tilde{U}_{\text{TM}}(t)$ преобразуем в аналоговый сигнал $U_{\text{TM}}(t)$. В этом случае система будет иметь вид, показанный на рис. 43.

Преобразование аналоговых сигналов $g(t)$ и $x(t)$ в цифровые $\tilde{g}(t)$ и $\tilde{x}(t)$ осуществляется с помощью аналого-цифровых преобразователей АЦП. В цифровом фильтре реализуются те же операции, что и в аналоговом, например, интегрирование или коррекция. Обычно такой фильтр реализуется в виде специализированной цифровой вычислительной машины. В цифроаналоговом преобразователе числа на выходе цифрового фильтра превращаются в напряжение, поступающее на усилитель мощности.

В рассматриваемом случае систему можно было бы сделать полностью цифровой. Например, если двигатель приводит в движение спутниковую антенну, то вместо двигателя и обычной антенны можно применить фазированную антенную решетку с цифровым управлением диаграммой направленности. Но это приведет к значительному повышению стоимости такой системы при небольшом улучшении характеристик. Поэтому реальные цифровые системы управления, как правило, включают в себя аналоговые исполнительные устройства, а все схемы фильтрации и коррекции выполняются в цифровом виде. Таким образом, структурная схема цифровой системы управления приобретает вид, показанный на рис. 44.

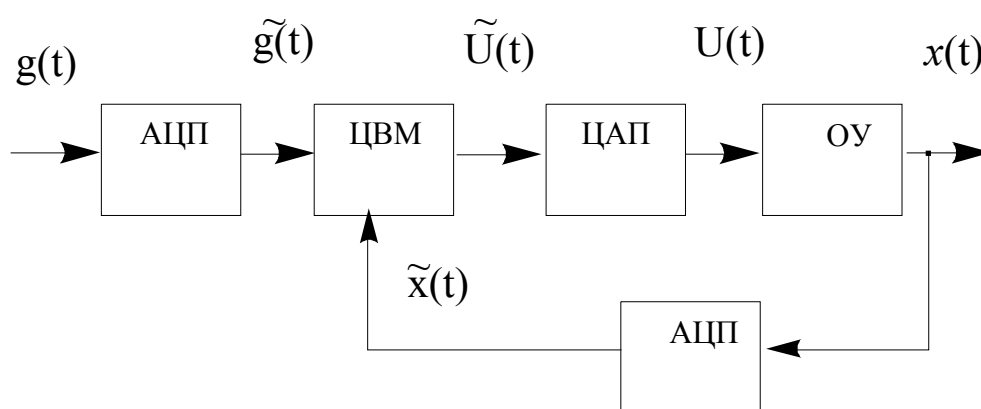


Рис. 44

Аналого-цифровые преобразования

Итак, для реализации основных операций управления на ЦВМ необходимо аналоговый входной сигнал $g(t)$ преобразовать в

цифровую форму $\tilde{g}(t)$, т.е. представить его в виде последовательности кодов, поступающих с определенным тактовым интервалом (рис. 44). Такое преобразование включает в себя два этапа: амплитудное квантование и временное квантование.

Амплитудное квантование сигналов

Квантование по уровню заключается в округлении значений процесса $g(t)$ до величин $\tilde{g}(t)$, представленных конечным числом разрядов. Этот процесс можно пояснить графиком, представленными на рис. 45.

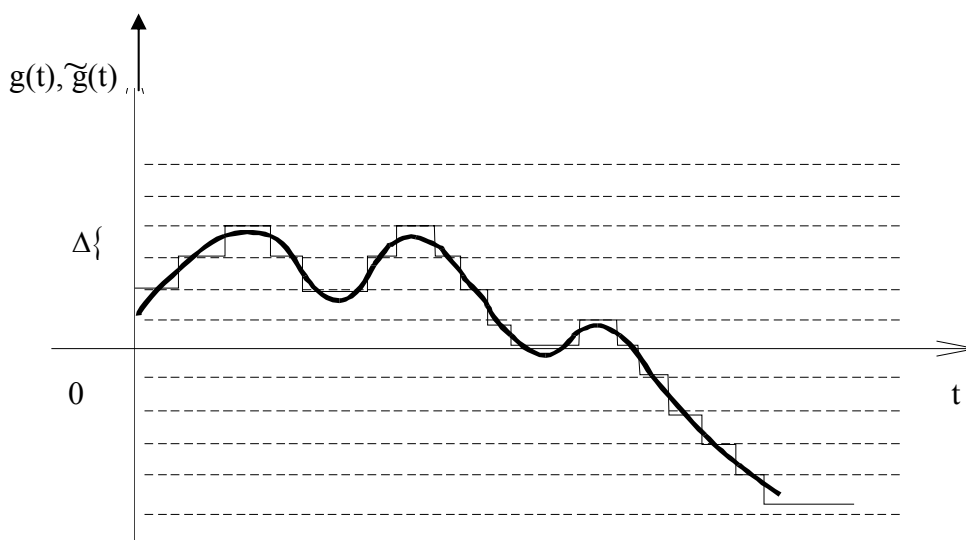


Рис. 45

Процесс с непрерывными значениями сравнивается по величине с расположенными через интервал Δ амплитудного квантования уровнями. При этом вместо $g(t)$ выбирается номер $\tilde{g}(t)$ ближайшего уровня квантования.

Предположим, что динамический диапазон значений входного сигнала $g(t)$ ограничен и составляет интервал (g_{\min}, g_{\max}) . Очевидно, общее число N уровней квантования определяется по формуле
$$N = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{\Delta}.$$

При заданном числе уровней квантования N можно определить необходимое число разрядов для передачи $\tilde{g}(t)$. Например, для наиболее часто встречающейся двоичной системы число разрядов

$n = \log_2 N$. Если, скажем, $N = 1024$, то необходимо применять десятиразрядный двоичный код.

Как правильно выбрать число уровней N или интервал Δ квантования?

При замене аналогового сигнала $g(t)$ числом $\tilde{g}(t)$ с конечным числом разрядов возникает случайная ошибка амплитудного квантования $\varepsilon(t) = \tilde{g}(t) - g(t)$.

Диапазон возможных значений этой ошибки ограничен: $-\Delta/2 < \varepsilon(t) < \Delta/2$. При большом числе уровней квантования считается, что ошибка имеет равномерное распределение в пределах этого диапазона (рис. 46).

Нетрудно найти дисперсию случайной ошибки с равномерным распределением: $\sigma_\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\Delta^2}{12}$

Поскольку $\tilde{g}(t) = g(t) + \varepsilon(t)$, можно считать, что амплитудное квантование приводит к появлению дополнительной помехи $\varepsilon(t)$ с дисперсией $\Delta^2/12$. Таким образом, эквивалентная схема процесса амплитудного квантования может быть представлена в виде рис. 47.

Число уровней квантования обычно выбирают исходя из анализа действия этой дополнительной помехи $\varepsilon(t)$ на систему управления. Обычно применяют стандартные схемы преобразования аналоговых сигналов в 8-, 10-, 12- или 16-разрядный двоичный код. При этом соответственно число уровней квантования $2^8 = 256$, $2^{10} = 1024$, $2^{12} = 4096$ или $2^{16} = 64000$.

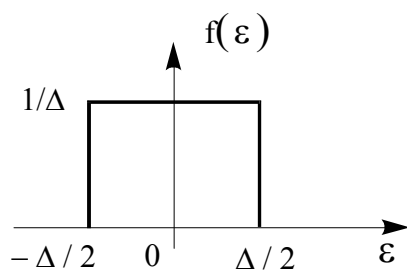


Рис. 46

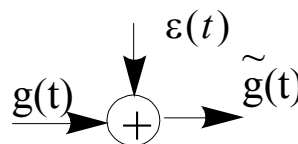


Рис. 47

Временное квантование сигналов

Как мы хорошо знаем, вся цифровая техника работает в дискретном времени, т.е. с определенной тактовой частотой. Процесс преобразования непрерывного по времени сигнала $g(t)$ в последовательность $g(t_i)$ называется **временным квантованием** (рис. 48).

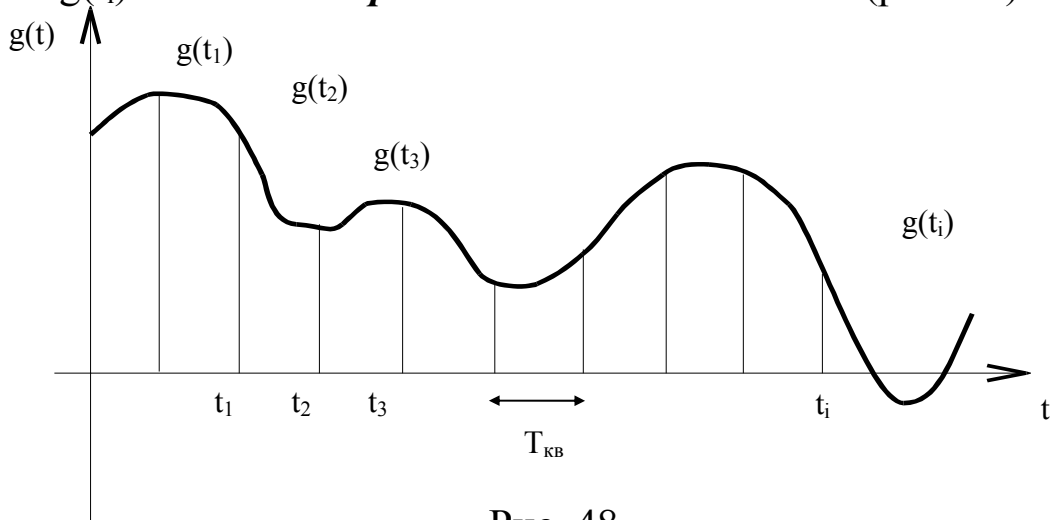


Рис. 48

Период $T_{кв}$, через который берутся отсчеты входного процесса, обычно называется **периодом** или **интервалом временного квантования**. Большой интервал временного квантования может привести к значительной потере информации. Малый интервал потребует увеличения быстродействия цифровой системы. Для выбора интервала временного квантования часто используют теорему Котельникова. Ее суть заключается в следующем. Пусть $g(t)$ – процесс с ограниченным некоторой частотой f_m спектром. Тогда при выборе интервала временного квантования $T_{кв} = 1/2f_m$ функция $g(t)$ может быть абсолютно точно восстановлена по отсчетам $g(kT_{кв})$:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT_{кв}) \frac{\sin n2\pi f_m (t - kT_{кв})}{2\pi f_m (t - kT_{кв})}.$$

Приведенное разложение непрерывной во времени функции $g(t)$ по функциям вида $\frac{\sin x}{x}$ называется обычно **рядом Котельникова**.

Однако при использовании теоремы Котельникова возникают две проблемы. Одна из них – ограниченность спектра. Дело в том, что процессы $g(t)$, заданные на конечном интервале времени, всегда имеют спектр бесконечной ширины. Таким образом, строго указать

f_m для реальных процессов не удастся. Вторая проблема – слишком высокая частота временного квантования, которая получается при использовании теоремы Котельникова. Поэтому при проектировании систем управления обычно производят расчеты дополнительных погрешностей системы, вызванных временной дискретизацией. Интервал квантования $T_{кв}$ при этом выбирается исходя из заданной величины погрешности за счет временного квантования.

* * *

Итак, в современных цифровых системах управления обычно выбирается достаточно малый интервал амплитудного квантования. При этом дополнительные погрешности системы, вызванные амплитудной дискретизацией, оказываются малыми. Во многих случаях ими пренебрегают. Вместе с тем выбор интервала временного квантования в соответствии с теоремой Котельникова часто приводит к неоправданному повышению тактовой частоты вычислительной машины. Поэтому для анализа систем управления, работающих в дискретном времени, применяют специальные методы анализа, которые мы рассмотрим на следующих занятиях.

4.2. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Как мы уже знаем, основные операции, которые выполняет ЦВМ в контуре управления, связаны с реализацией цифровых фильтров. На этой лекции вначале мы установим связь между уже известными нам аналоговыми фильтрами и соответствующими цифровыми фильтрами. Затем познакомимся с основными методами и алгоритмами цифровой фильтрации сигналов. Рассматриваемые методы важны не только для систем управления. Они применяются в самых различных системах обработки сигналов, например, в системах цифровой связи.

Связь аналоговых и цифровых фильтров

Любой линейный аналоговый фильтр с передаточной функцией $H(p)$ описывается дифференциальным уравнением следующего общего вида:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x(t) = b_0 \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_m g(t).$$

Предположим, что входные и выходные сигналы этого фильтра наблюдаются в дискретные моменты времени $t_i = iT_{\text{кв}}$. При малых интервалах временного квантования $T_{\text{кв}}$ можно приближенно заменить производную первого порядка на отношение разностей:

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{x(t_i) - x(t_i - T_{\text{кв}})}{T_{\text{кв}}} + (x_i - x_{i-1}) = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{T_{\text{кв}}} = \frac{x_i - x_{i-1}}{T_{\text{кв}}} = \frac{\Delta x_i}{T_{\text{кв}}}.$$

Соответственно вторая производная может быть приближенно записана в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \cong \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{T_{\text{кв}}^2} = \frac{1}{T_{\text{кв}}^2} (x_i - x_{i-1} - x_{i-1} + x_{i-2}) = \frac{1}{T_{\text{кв}}^2} (x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}) = \frac{\Delta_2 x_i}{T_{\text{кв}}^2}.$$

Третья производная

$$\frac{d^3 x}{dt^3} \cong \frac{\Delta_2 x_i - \Delta_2 x_{i-1}}{T_{\text{кв}}^2} = \frac{x_i - 2x_{i-1} - x_{i-1} + 2x_{i-2} - x_{i-3}}{T_{\text{кв}}^2} = \frac{x_i - 3x_{i-1} + 3x_{i-2} - x_{i-3}}{T_{\text{кв}}^2} = \frac{\Delta_3 x_{i-1}}{T_{\text{кв}}^2}.$$

Продолжая этот процесс замены производных конечными разностями, получим

$$\frac{d^n x}{dt^n} \cong \frac{1}{T_{\text{кв}}^n} (x_i + c_1 x_{i-1} + c_2 x_{i-2} + \dots + c_{n-1} x_{i-n}).$$

Подставим теперь все выражения для производных в дифференциальное уравнение аналогового фильтра. Получим следующее выражение для эквивалентного цифрового фильтра: $x_i = \alpha_1 x_{i-1} + d_2 x_{i-2} + \dots + \alpha_n x_{i-n} + \beta_0 g_i + \beta_1 g_{i-1} + \dots + \beta_m g_{i-m}$.

Таким образом, мы нашли цифровой эквивалент аналогового фильтра; все операции цифровой фильтрации могут выполняться теперь на ЭВМ.

Пример 1. Пусть имеется апериодическое звено с передаточной функцией $H(p) = \frac{k}{1+pT}$. Выходной сигнал этого звена

$x(p) = H(p) g(p)$ или $x(p) (1+pT) = kg(p)$. Во временной области функционирование звена описывается соответствующим дифференциальным уравнением: $T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = kg(t)$.

Найдем эквивалентный этому звену цифровой фильтр. Для этого заменим $dx(t)/dt \cong (x_i - x_{i-1})/T_{кв}$ и тогда

$$\frac{T}{T_{кв}}(x_i - x_{i-1}) + x_i = kgi.$$

После элементарных преобразований получим:

$$x_i = \frac{1}{1+T/T_{кв}}x_{i-1} + \frac{k}{1+T/T_{кв}}gi \quad \text{или} \quad x_i = \alpha_1x_{i-1} + \beta_0gi,$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{1+T/T_{кв}}, \quad \beta_0 = \frac{k}{1+T/T_{кв}}.$

Анализ общего выражения для цифрового фильтра показывает, что фильтр состоит из двух частей. Первая часть, соответствующая случаю $\beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_m = 0$, записывается в виде

$$x_i = \alpha_1x_{i-1} + \alpha_2x_{i-2} + \dots + \alpha_nx_{i-n} + \beta_0gi.$$

Вычисление каждого следующего значения x_i выходного сигнала фильтра осуществляется с помощью взвешивания предыдущих выходных значений фильтра x_{i-1}, \dots, x_{i-n} и одного входного значения g_i . Такой фильтр называется **рекурсивным фильтром n -го порядка**. Если же $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то

$$x_i = \beta_0gi + \beta_1g_{i-1} + \dots + \beta_mg_{i-m}.$$

В этом случае для фильтрации используется только текущее g_i и предыдущие значения входного сигнала, взвешиваемые с коэффициентами β_0, \dots, β_m . Такой фильтр называется **нерекурсивным**, или **фильтром скользящего окна**.

Математическое описание цифровых систем

Пусть процесс с дискретным временем g_i поступает на вход цифрового фильтра. На выходе будет уже другой процесс x_i . Как можно описать характеристики процесса g_i , и как они изменятся после прохождения через цифровой фильтр?

Для процессов с непрерывным временем подобная проблема решается на основе преобразования Лапласа или преобразования Фурье. Действительно, если известен спектр непрерывного входного процесса $g(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt$, то спектр выходного сигнала

$$G(j\omega) = H(j\omega) g(j\omega), \quad \text{где } H(j\omega) \text{ – передаточная функция фильтра.}$$

Для процессов с дискретным временем существуют точно такие же по смыслу соотношения. Для них вводится дискретное преобразование Фурье:

$$g(j\omega) = \sum_{v=0}^{\infty} g_v e^{-j\omega v T} \quad \text{или} \quad g(j\omega) = \Phi\{g_i\}.$$

Отметим следующие два важных свойства дискретного преобразования Фурье:

- 1) линейность $\Phi\{agi + bvi\} = a\Phi\{gi\} + b\Phi\{vi\}$;
- 2) $\Phi\{g_{i-m}\} = \Phi\{g_i\} e^{-j\omega T m}$.

Применение этих свойств позволяет легко находить спектр процесса на выходе цифрового фильтра.

Пример 2. Пусть цифровой фильтр описывается следующим выражением: $x_i = \alpha_1 x_{i-1} + \alpha_2 x_{i-2} + \beta g_i$. Преобразуем по Фурье левую и правую часть этого выражения:

$$x(j\omega) = \alpha_1 e^{-j\omega T} x(j\omega) + \alpha_2 e^{-2j\omega T} x(j\omega) + \beta g(j\omega).$$

$$\text{Тогда} \quad x(j\omega) = H(j\omega)g(j\omega), \quad \text{где} \quad H(j\omega) = \frac{\beta}{1 - \alpha_1 e^{-j\omega T} - \alpha_2 e^{-2j\omega T}} \quad -$$

передаточная функция цифрового фильтра.

Так же, как и в системах с непрерывным временем, $|H(j\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой цифрового фильтра, а $\text{Arg } H(j\omega)$ – фазочастотной характеристикой. Если $H(j\omega)$ – передаточная функция замкнутой цифровой системы управления, то полюсы p_1 и p_2 (нули знаменателя) $H(p) = \frac{\beta}{1 - \alpha_1 e^{-pT_{кв}} - \alpha_2 e^{-2pT_{кв}}}$ должны лежать в левой полуплоскости комплексного переменного.

Вместе с тем, появляется очевидное неудобство использования дискретного преобразования Фурье: передаточные функции содержат экспоненты в знаменателе и числителе. Поэтому было предложено в дискретном преобразовании Фурье ввести новую переменную $e^{j\omega T_{кв}} = z$. Тогда дискретное преобразование Фурье

$g(j\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i e^{-j\omega i T_{кв}}$ превращается в так называемое Z -преобразование:

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^{-i}. \quad \text{Обычно записывают} \quad g(z) = Z\{g_i\}.$$

Z – преобразование имеет ряд свойств, аналогичных дискретному преобразованию Фурье. Отметим линейность Z – преобразования и $Z\{g_i - m\} = Z\{g_i\} z^{-m}$.

Пример 3. Рассмотрим цифровой фильтр, описываемый уравнением: $x_i = \alpha_1 x_{i-1} + \alpha_2 x_{i-2} + \beta_0 g_i + \beta_1 g_{i-1}$. Применим Z-преобразование к правой и левой части. Тогда $x(z) = \alpha_1 z^{-1} x(z) + \alpha_2 z^{-2} x(z) + \beta_0 g(z) + \beta_1 z^{-1} g(z)$, т.е. $x(z) = H(z)g(z)$, где $H(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z}{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}}$. Для нахождения амплитудно-частотной характеристики фильтра можно подставить $z = e^{j\omega T}$ и найти $|H(w)| = |H(z = e^{j\omega T})|$.

Таким образом, с помощью Z-преобразования легко получить передаточную функцию любого линейного цифрового фильтра.

Устойчивость систем управления принято проверять с помощью анализа передаточной функции $H(z)$. Если $z = e^{j\omega T_{кв}} = e^{p T_{кв}}$, то в том случае, когда корень $p = a + jb$ находится в левой полуплоскости комплексного переменного, т.е. когда система устойчива, то

$z = e^{(a+j\beta)T_{кв}} = e^{aT_{кв}} \cdot e^{j\beta T_{кв}}$, и если $a < 0$, то $|z| < 1$.

Таким образом, условие устойчивости можно сформулировать следующим образом.

Цифровая система управления или цифровой фильтр устойчив, если все корни знаменателя передаточной функции $H(z)$ находится внутри единичного круга на плоскости комплексного переменного (рис. 49).

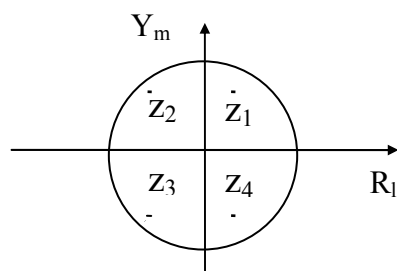


Рис. 49

* * *

Полученные результаты позволяют реализовать процесс фильтрации в виде программы для специализированной или универсальной ЭВМ. Как мы видели, существует приближенный способ построения цифрового фильтра, основанный на аналоговом прототипе. Точный способ заключается в подборе подходящих коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ цифрового фильтра. Более подробные сведения о цифровой фильтрации можно найти в книгах [16–18].

4.3. ДЕЙСТВИЕ ПОМЕХ НА ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим особенности анализа цифровых систем управления, находящихся под воздействием помех. Вначале приведем основные формулы, позволяющие определить дисперсию ошибки сопровождения, обусловленную действием помех. Затем кратко проанализируем методы построения оптимальных линейных дискретных систем, которые в настоящее время широко используются при проектировании и анализе цифровых систем управления.

Дисперсия ошибки в цифровых системах управления

Цифровую систему управления с учетом действия помех можно представить в виде рис. 50.

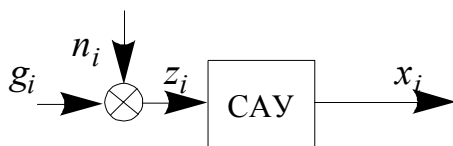


Рис. 50

На вход системы действует сумма z_i управляющего воздействия $g_i = \tilde{g}(t_i)$ и помех $N_i = N(t_i)$. В результате действия помехи в выходном сигнале x_i содержится случайная составляющая, которую можно охарактеризовать величиной

дисперсии σ_x^2 . При этом цифровая система управления описывается разностным уравнением:

$$x_i = \alpha_1 x_{i-1} + \dots + \alpha_n x_{i-n} + \beta_0 z_i + \dots + \beta_1 z_{i-1} + \dots + \beta_m z_{i-m} .$$

Поскольку система управления линейна, то можно отдельно рассматривать прохождение сигналов и помех через эту систему. Таким образом, достаточно найти дисперсию процесса, описываемого следующим уравнением общего вида:

$$x_i = \alpha_1 x_{i-1} + \dots + \alpha_n x_{i-n} + \beta_0 N_i + \beta_1 N_{i-1} + \dots + \beta_m N_{i-m} .$$

Помехой в системе управления обычно служат независимые отсчеты N_i гауссовских случайных величин с нулевым средним и дисперсией σ_n^2 . В общем случае дисперсия результирующего процесса x_i находится с помощью известных методов теории вероятностей. Действительно, разностное уравнение представляет собой закон преобразования случайных величин $\{N_i\}$ в случайные величины $\{x_i\}$. Поэтому любые вероятностные характеристики $\{x_i\}$ выражаются через известные характеристики помех.

Пример. Система первого порядка.

Пусть система управления описывается простейшим разностным уравнением вида $x_i = \alpha_1 x_{i-1} + \beta_0 N_i$.

Найдем дисперсию ошибки на выходе такой системы. Для этого возведем левую и правую части в квадрат и найдем математическое ожидание. После возведения в квадрат получаем $x_i^2 = \alpha_1^2 x_{i-1}^2 + 2\alpha_1 \beta_0 x_{i-1} N_i + \beta_0^2 N_i^2$.

Теперь находим математическое ожидание левой и правой частей: $\sigma_x^2 = \alpha_1^2 \sigma_x^2 + \beta_0^2 \sigma_n^2$.

Таким образом, дисперсия ошибки за счет действия помех $\sigma_x^2 = \frac{\beta_0^2}{1 - \alpha_1^2} \sigma_n^2$. Заметим, что $|\alpha_1| < 1$, т.к. в противном случае система управления будет неустойчивой.

Оптимальные цифровые системы

Описания динамики движения объектов в цифровых системах

В непрерывных системах для описания динамики движения объекта или входного сигнала системы управления используется следующее стохастическое дифференциальное уравнение: $\frac{dg(t)}{dt} + ag(t) = \xi(t)$, где $\xi(t)$ – белый шум. В этом случае траектория движения объекта представляет собой одну из множества реализаций случайного процесса $g(t)$.

В цифровых системах дифференциальному уравнению первого порядка будет соответствовать разностное уравнение $g_i = \nu g_{i-1} + \xi_i$, где ν – постоянный коэффициент; ξ_i – гауссовские независимые случайные величины с дисперсией σ_ξ^2 . Определим вероятностные характеристики возможных траекторий объекта в дискретном времени. Так же, как и в рассмотренном примере, возведем левую и правую части уравнения движения объекта в квадрат и найдем математическое ожидание. Получим $\sigma_g^2 = \nu \sigma_g^2 + \sigma_\xi^2$ или $\sigma_g^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{1 - \nu}$. Эта величина дисперсии σ_g^2 определяет динамический диапазон возможных отклонений траектории от среднего значения.

Другим параметром, описывающим движение объекта, является характеристика скорости изменения траектории. В рассматриваемом случае мерой этой скорости может быть коэффициент корреляции двух соседних значений $g(t_{i-1}) = g_{i-1}$ и $g(t_i) = g_i$ траектории. Для его нахождения умножим левую и правую части уравнения на g_{i-1} и найдем их средние значения: $M\{g_i g_{i-1}\} = \nu M\{g_{i-1}^2\} + M\{\xi_i g_{i-1}\}$. Поскольку $M\{\xi_i g_{i-1}\} = 0$, то коэффициент корреляции $\frac{M\{g_i g_{i-1}\}}{M\{g_{i-1}^2\}} = \nu$. Таким образом, параметр $|\nu| < 1$ называется равным значению коэффициента корреляции двух соседних значений траектории.

Нормированная корреляционная функция последовательности $\{g_i\}$ описывается при этом простым выражением $R(m) = \nu^{|m|}$.

Допустим, что с помощью приведенного уравнения мы хотим описать траекторию движения объекта, значительно изменяющегося за 100 тактовых интервалов. Это означает, что $R(100) = \nu^{100} = 0,5$. В этом случае можно выбрать $\nu = \sqrt[100]{0,5} \cong 0,993$.

Оптимальная цифровая линейная система управления

Пусть на вход линейной системы управления действует сумма $z_i = g_i + n_i$ управляющего сигнала g_i , который описывается уравнением $g_i = \nu g_{i-1} + \xi_i$ и помехи n_i в виде независимых отсчетов мешающего процесса с дисперсией σ_n^2 .

Состояние цифровой линейной системы управления x_i связано с входным сигналом следующим разностным уравнением $x_i = \alpha_i x_{i-1} + \beta_i z_i$.

Основной задачей системы является минимизация дисперсии ошибки $\varepsilon_i = x_i - g_i$ управления. Рассмотрим возможности построения оптимальной системы, для которой дисперсия ошибки минимальна. Для минимизации дисперсии имеется возможность выбора коэффициентов α_i и β_i системы управления.

Итак, необходимо найти $\min M\{(\xi_i)^2\} = \min M\{(x_i - g_i)^2\}$. Подставим в формулу для ошибки известные соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \alpha_i x_{i-1} + \beta_i (g_i + n_i) - g_i = \alpha_i x_{i-1} + (\beta - 1)(\nu g_{i-1} + \xi_i) + \beta_i n_i = \\ &= (\alpha_i + \nu(\beta_i - 1))g_{i-1} + \alpha_i \varepsilon_{i-1} + (\beta_i - 1)\xi_i + \beta_i n_i. \end{aligned}$$

Величины g_{i-1} имеют большие значения. Если необходимо минимизировать ошибки, то нужно положить $\alpha + v(\beta_i - 1) = 0$. Тогда $\varepsilon_i = \alpha_i \varepsilon_{i-1} + (\beta_i - 1)\varepsilon_i + \beta_i n_i$ или $\varepsilon_i = v(1 - \beta_i)\varepsilon_{i-1} + (\beta_i - 1)\varepsilon_i + \beta_i n_i$.

В этой формуле отражены три составляющие ошибки системы управления. Первое слагаемое учитывает ошибку $\varepsilon_{i-1} = x_{i-1} - g_{i-1}$ на предыдущем шаге работы системы. Второе слагаемое – динамическая ошибка за счет изменения траектории движения. Третье слагаемое $\beta_i n_i$ – ошибка, вызванная действием помех на систему управления. Поскольку все слагаемые являются независимыми, то дисперсия будет равна сумме дисперсий ошибок всех трех слагаемых:

$$D_i = v^2(1 - \beta_i)^2 D_{i-1} + (\beta_i - 1)^2 \sigma_\xi^2 + \beta_i^2 \sigma_n^2,$$

где $D_i = M\{\varepsilon_i^2\}$, $\sigma_\xi^2 = M\{\xi_i^2\}$, $\sigma_n^2 = M\{n_i^2\}$.

Продифференцируем D_i по β_i и приравняем производную к нулю. Легко подсчитать, что минимальное значение $P_i = D_i \min$ дисперсии ошибки достигается при $\beta_i = (\sigma_n^2)^{-1} P_{\beta i} / (1 + (\sigma_n^2)^{-1} P_{\beta i})$, где $P_{\beta i} = v^2 P_{i-1} + \sigma_\xi^2$. После подстановки оптимального значения β_i в уравнение системы получаем следующий алгоритм функционирования оптимальной цифровой системы управления:

$$x_i = x_{\beta i} + P_i \frac{1}{\sigma_n^2} (Z_i - x_{\beta i}), \quad P_i = P_{\beta i} / (1 + \frac{1}{\sigma_n^2} P_{\beta i}), \quad P_{\beta i} = v^2 P_{i-1} + \sigma_\xi^2,$$

где $x_{\beta i} = vx_{i-1}$.

В этом уравнении величина $x_{\beta i}$ является экстраполированной на один шаг траекторией объекта или прогнозом значения траектории. Действительно, на предыдущем шаге состояние системы было x_{i-1} . Динамика изменения траектории описывается уравнением $g_i = vg_{i-1} + \xi_i$. Лучшее, что мы можем сделать с точки зрения прогноза траектории движения g_i – предсказать, что сигнал g_i будет иметь величину $x_{\beta i} = vx_{i-1}$.

Таким образом, в найденной системе управления вначале формируется прогноз $x_{\beta i}$ траектории движения. Затем определяется рассогласование $z_i - x_{\beta i}$ между сделанным прогнозом и очередным сигналом управления z_i , искаженным помехами. После этого очередное состояние системы x_i формируется как сумма прогноза $x_{\beta i}$ и взвешенного рассогласования.

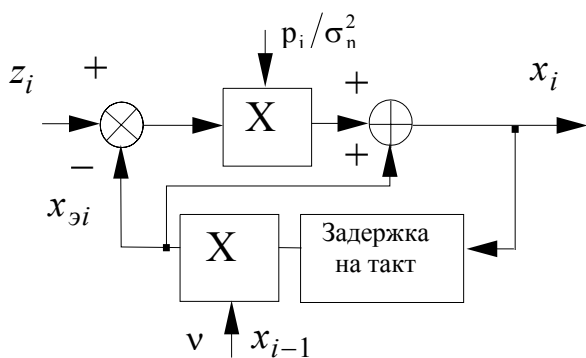


Рис. 51

Весовым коэффициентом p_i/σ_n^2 служит отношение дисперсии ошибки системы управления p_i и дисперсии помех, действующих на систему управления.

Структурная схема рассмотренной оптимальной цифровой системы управления может быть представлена в виде рис.51.

* * *

Рассмотренные вопросы действия помех на цифровые системы управления позволяют решить две важные задачи. Во-первых, для любой заданной линейной системы управления можно дать оценку ее эффективности, т.е. оценить дисперсию ошибки за счет действия помех. Вторая важная задача – построение оптимальной цифровой системы управления, учитывающей как динамику движения объекта, так и величину помехи, действующей на систему управления.

4.4. МНОГОМЕРНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим два вопроса, связанные с современными методами построения систем управления. Вначале проанализируем многомерный дискретный фильтр Калмана, который применяется при управлении системами по нескольким параметрам одновременно. Затем кратко рассмотрим адаптивные системы, которые предназначены для работы в условиях изменяющихся внешних воздействий.

Многомерный цифровой фильтр Калмана

Модели входных сигналов

В предыдущем разделе была рассмотрена модель движения объекта в виде скалярного разностного уравнения $g_i = v g_{i-1} + \xi_i$. При

управлении несколькими параметрами их объединяют в один вектор:

$$\bar{g}_i = \begin{pmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ \dots \\ g_{mi} \end{pmatrix}.$$

В этом случае одномерное уравнение заменяется следующим векторным разностным уравнением для описания входных сигналов:

$$\bar{g}_i = \Gamma \bar{g}_{i-1} + V\xi_i,$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ - & - & - & - \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mm} \end{pmatrix}$$

– $m \cdot m$ – матрица, коэффициенты которой определяют динамику изменения входных воздействий точно так же, как параметр v в рассмотренном одномерном случае. Вместе с тем векторное описание дает возможность не только задавать одновременно изменение нескольких параметров пространственной траектории, но и описывать более сложные входные процессы.

Пример 1. Движение объекта со случайным ускорением.

Предположим, что траектория движения некоторого объекта описывается следующей системой уравнений в дискретном времени:

$$\begin{cases} g_i = g_{i-1} + v_{i-1}, \\ v_i = v_{i-1} + a_{i-1}, \\ a_i = va_{i-1} + \xi_i. \end{cases}$$

Такая система определяет следующую траекторию движения объекта $g_i = g_0 + v_0i + a_i \frac{i^2}{2}$, т.е. движение со случайно изменяющимся ускорением.

Для записи в стандартной форме введем вектор $\bar{g}_i = \begin{pmatrix} g_i \\ v_i \\ a_i \end{pmatrix}$ и

определим элементы матрицы Γ в уравнении:

$$\begin{pmatrix} g_i \\ v_i \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{i-1} \\ v_{i-1} \\ a_{i-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{1i} \\ \xi_{2i} \\ \xi_{3i} \end{pmatrix}.$$

Анализ показывает, что представленные три уравнения запишутся в виде одного векторного следующим образом

$$\begin{pmatrix} g_i \\ v_i \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{i-1} \\ v_{i-1} \\ a_{i-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_i \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \bar{g}_i = \Gamma \bar{g}_{i-1} + \bar{\xi}_i, \text{ где } \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \bar{\xi}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_i \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Векторная форма для линейного цифрового фильтра произвольного порядка.

Известно, что любой линейный цифровой фильтр описывается следующим уравнением:

$g_i = a_1 g_{i-1} + \dots + a_n g_{i-n} + \beta_0 \xi_i + \beta_1 \xi_{i-1} + \dots + \beta_m \xi_{i-m}$. Для записи этого уравнения в стандартной форме введем векторы $\bar{g}_i = (g_i g_{i-1} \dots g_{i-n+1})^T$ и $\bar{g}_{i-1} = (g_{i-1} g_{i-2} \dots g_{i-n})^T$. Положим $\bar{\xi}_i = (\xi_i \xi_{i-1} \dots \xi_{i-m})^T$. Запишем теперь:

$$\begin{pmatrix} g_i \\ g_{i-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{i-n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{i-1} \\ g_{i-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{i-m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \xi_{i-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{i-m} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторное уравнение вида $\bar{g}_i = \Gamma \bar{g}_{i-1} + V \bar{\xi}_i$,

где $\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, описывает в ком-

пактной форме любой линейный цифровой фильтр с постоянными параметрами.

Многомерная цифровая оптимальная система управления

Предположим, что входной сигнал \bar{g}_i в сумме с помехой \bar{n}_i поступает на цифровую систему управления объектом одновременно по m параметрам. Представим такую систему в виде рис.52.

Во многих приложениях построить оптимальную цифровую систему, обеспечивающую минимизацию ошибок по всем параметрам одновременно и учитывающую как динамику изменения входного сигнала \bar{g}_i , так и помехи \bar{n}_i .

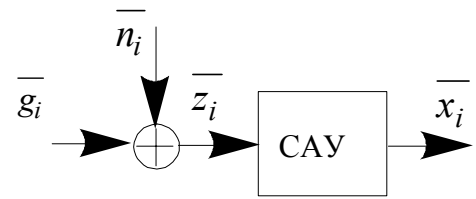


Рис. 52

Повторяя те же выкладки, что и для одномерного варианта цифровой системы, получим следующие уравнения, описывающие многомерную оптимальную цифровую систему:

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{\partial i} + P_i \bar{v}_n^{-1} (\bar{z}_i - \bar{x}_{\partial i}),$$

где $\bar{x}_{\partial i} = \Gamma \bar{x}_{i-1}$, $p_i = p_{\partial i} (1 + \bar{v}_n^{-1} p_{\partial i})^{-1}$, $P_{\partial i} = \Gamma^t P_{i-1} \Gamma + v_{\xi}$; V_n – ковариационная матрица помехи, V_{ξ} – ковариационная матрица случайного процесса $\bar{\xi}_i$.

Структурная схема оптимальной многомерной системы управления показана на рис. 53.

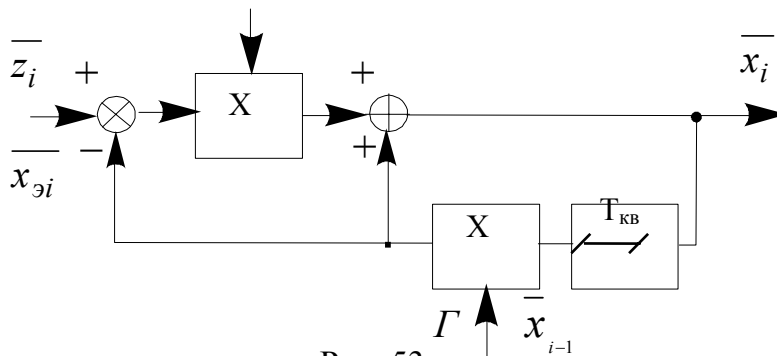


Рис. 53

Приведенные результаты обобщают алгоритмы оптимального цифрового управления системами по одному параметру. При этом сохраняются все основные особенности оптимальной системы управления. Вначале на основе предыдущего состояния системы \bar{x}_{i-1} осуществляется прогноз следующего значения траектории $\bar{x}_{\partial i} = \Gamma \bar{x}_{i-1}$. Затем с помощью сравнения входного сигнала \bar{z}_i и прогноза $\bar{x}_{\partial i}$ вырабатывается сигнал ошибки $\bar{\varepsilon}_i = \bar{z}_i - \bar{x}_{\partial i}$. Эти ошибки взвешиваются с учетом динамики изменения траектории и уровней помех и корректируется прогнозируемое значение. В результате очередное состояние объекта управления получается как взвешенная сумма $\bar{x}_i = \bar{x}_{\partial i} + k_i \bar{\varepsilon}_i$ прогноза и ошибки.

Адаптивные системы управления

Условия работы реальных систем управления часто таковы, что характеристики входных сигналов и помех либо известны не точно, либо существенно изменяются во времени. Определенным случайным изменениям могут быть подвержены также параметры самих систем управления, особенно аналоговых. Поэтому качество работы системы управления, спроектированной в расчете на неизменяющиеся условия работы, на практике может оказаться существенно ниже ожидаемого. Избежать этого позволяет применение адаптивных систем, параметры или даже структура которых при изменении внешних условий автоматически изменяются, поддерживая тем самым близкий к оптимальному режим работы.

Адаптивные системы с перестройкой только параметров *называют самонастраивающимися*, с перестройкой структуры – *самоорганизующимися*.

Самонастраивающиеся системы обычно содержат, кроме основной системы управления, устройство для оценки наилучших параметров. Упрощенная схема самонастраивающейся системы приведена на рис. 54.



Рис. 54

Кроме сигналов, поступающих от основной системы, в устройстве настройки параметров может быть использована также дополнительная полезная информация о ходе процесса управления.

Самонастраивающиеся системы классифицируют по различным признакам. Например, по способу получения исходной информации для настройки параметров системы классифицируют на самонастраивающиеся:

- по сигналам внешних воздействий;
- по динамическим характеристикам объектов;

– по сигналам внешних воздействий и динамическим характеристикам (комбинированные).

Самонастраиваемые системы разделяют, кроме того, на разомкнутые и замкнутые относительно контура самонастройки и выхода системы, а также на аналитические, поисковые, комбинированные, с активной и пассивной самонастройкой и т.д.

Имеется существенное различие между настраиваемыми и самонастраиваемыми системами. Зная общие характеристики объекта, а также их зависимость от окружающих условий, можно ввести в систему соответствующую программу, которая произведет необходимую настройку регулятора. При этом получается система программной настройки. Самонастраиваемая система не требует полной информации обо всех данных и при изменении внешних условий ее параметры автоматически настраиваются, обеспечивая заданные показатели качества. Для обнаружения отклонения параметров объекта от оптимальных в самонастраиваемых системах используются различные средства, например, организация автоматических пробных движений системы с последующим анализом исходной и вырабатываемой информации. Автоматический поиск является наиболее характерным признаком самонастраиваемых систем. В качестве пробных движений в ряде случаев используют имеющиеся в системе случайные изменения состояния.

Элементы самонастройки вводят в систему, если закон изменения характеристик объекта во времени неизвестен, а разовая или программная настройка не позволяет получить желаемое качество работы системы.

Для обеспечения самонастройки широко применяются вычислительные средства, корректирующие устройства с изменяемыми параметрами, регуляторы с изменяющимися параметрами и др.

Самонастраиваемые системы являются, прежде всего, динамически устойчивыми системами, работающими по принципу измерения отклонения регулируемой переменной или с использованием комбинированного принципа регулирования. Такие системы имеют следующие характерные черты:

- наличие не менее двух контуров – основного и самонастройки;
- наличие элементов с изменяющимися параметрами;
- наличие вычислительных средств;

- повышенная чувствительность к изменению параметров системы и входных сигналов;
- использование случайных сигналов для осуществления автоматического поиска экстремума.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрены основные вопросы построения и анализа систем автоматического управления. Основными характеристиками качества систем являются устойчивость, точность и помехоустойчивость. При определенных условиях удастся построить оптимальные системы управления с непрерывным или дискретным временем, в которых обеспечивается минимальная дисперсия ошибки управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика. – М.: Высш. шк., 1990.– 335 с.
2. Радиоавтоматика / В.А. Бесекерский, А.А.Елисеев, А.В. Небылов и др.; Под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Высшая шк., 1985. – 271 с.
3. Максимов М.В. , Меркулов В.И. Радиоэлектронные следящие системы (Синтез методами теории оптимального управления). – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.
4. Первачев С.В. Радиоавтоматика: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1982.–296 с.
5. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. – Л.:Энергия,1975.– 412 с.
6. Вагапов В.Б., Автоматика радиоэлектронных систем. – К.: Вища шк., 1988. – 351 с.
7. Задачник по теории автоматического управления: Учеб. пособие для вузов / Под ред. А.С. Шаталова. – М.: Энергия, 1979. – 544 с.
8. Васильев К.К. Методы обработки сигналов. – Ульяновск: УлПИ, 1990. – 96с.
9. Теория автоматического управления / Под ред. А.В.Нетушила. – М.: Высшая школа, 1976. – 432 с.
10. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. – М.: Наука, 1968. – 400 с.

11. Сеницын И.Н., Пугачев В.С. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
12. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978. – 552 с.
13. Васильев К.К., Цветов М.А. Системы автоматического управления: Сборник лабораторных работ. – Ульяновск: УлГТУ, 1996. – 28 с.
14. Васильев К.К., Цветов М.А. Теория автоматического управления: Сборник лабораторных работ. – Ульяновск: УлГТУ, 1999. – 40 с.
15. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971. – 328 с.
16. Мизин И.А., Матвеев А.А. Цифровые фильтры. – М.: Связь, 1979. – 240 с.
17. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.
18. Рабинер П., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.

Учебное издание
ВАСИЛЬЕВ Константин Константинович
Теория автоматического управления
(следящие системы)
Учебное пособие
Редактор Н. А. Евдокимова

Изд. лиц. 020640 от 22.10.97. Подписано в печать
Формат 60x84/16. Бумага писчая. Усл. печ. л. 5,58. Уч.–изд. л. 5,20.
Тираж 200 экз. Заказ

Ульяновский государственный технический университет.
432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32
Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.