Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методические указания к лабораторным работам
по курсу «Статистическая теория радиотехнических систем»

Составители: С.М. Наместников
А.А. Морозов

Ульяновск 2006

УДК 621.391(076)
ББК 32.84я7
С78

Рецензент заведующий кафедрой «Теоретические основы радиотехники», канд. техн. наук, профессор Трефилов А. Н.

Одобрено секцией методических пособий научно-методического совета университета

С78 **Статистическая** теория радиотехнических систем: Методические указания к лабораторным работам/Сост.: С. М. Наместников, А. А. Морозов.–Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 23 с.

Сборник лабораторных работ разработан в соответствии с программой курса «Статистическая теория радиотехнических систем» и предназначен для студентов специальности «Радиотехника», но может использоваться и студентами других специальностей. Лабораторные работы посвящены моделированию случайных величин с заданными законами распределения, исследованию алгоритмов оптимального оценивания неизвестных параметров и реализации алгоритмов обнаружения сигналов на фоне помех.

Сборник подготовлен на кафедре «Телекоммуникации».

УДК 621.391(076)
ББК 32.84я73

СОДЕРЖАНИЕ

ИНТЕРФЕЙС ПРОГРАММЫ RadioStat

Главное окно программы представленное на рис. 1, состоит из четырех закладок: “Лаб №1”, “Лаб №2” , “Лаб №3” и “Лаб №4”, с помощью которых осуществляется выбор соответствующей лабораторной работы.

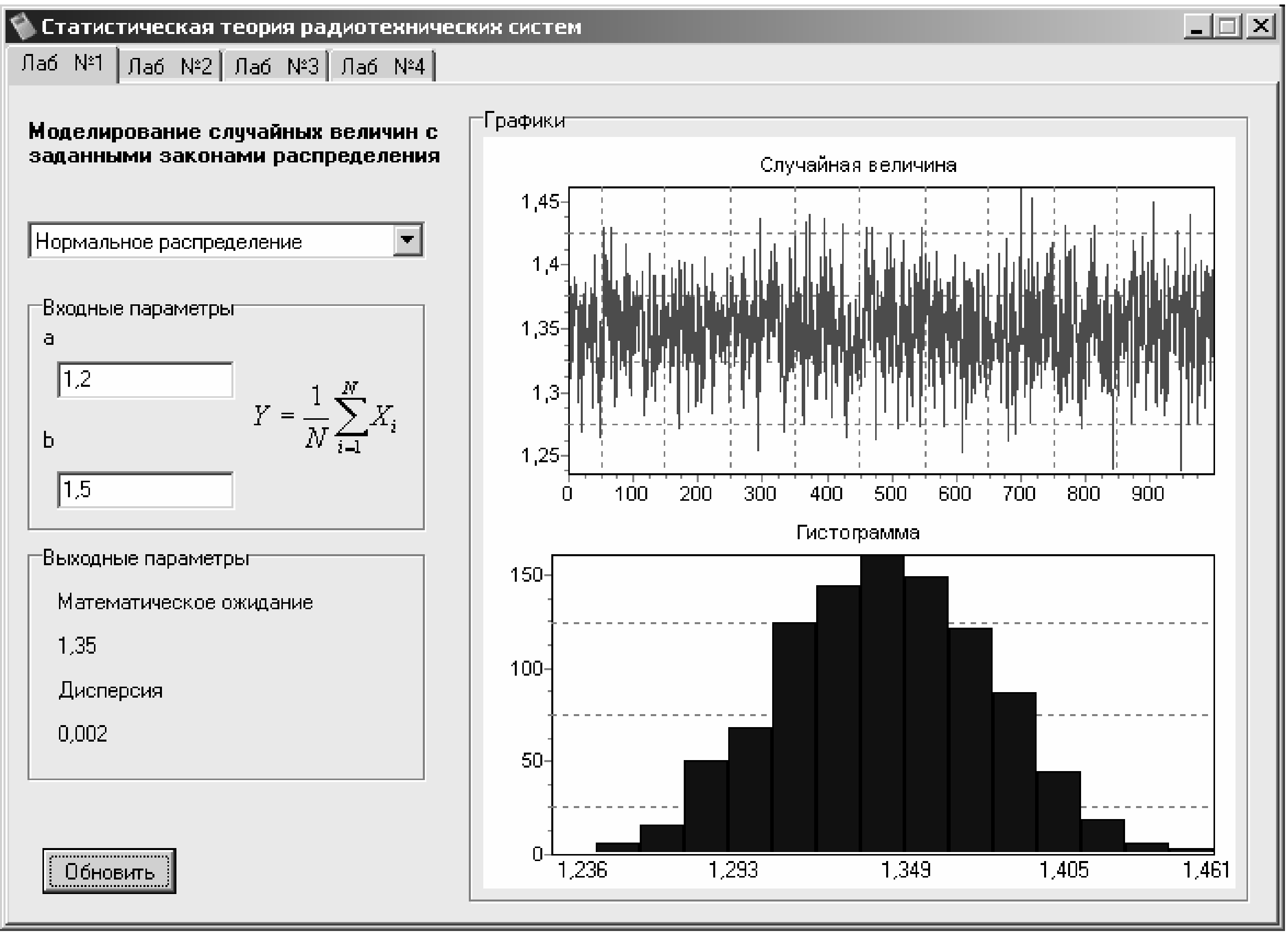
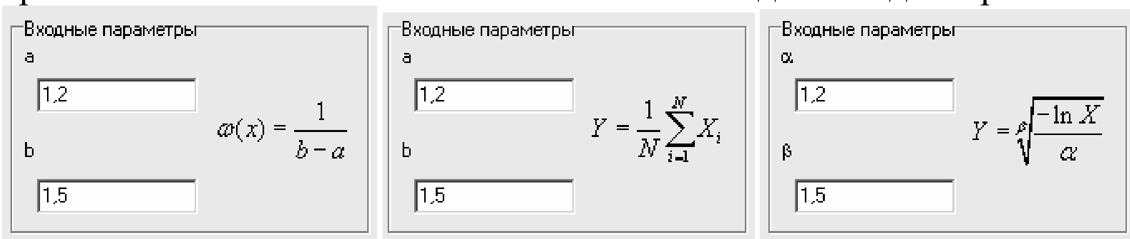
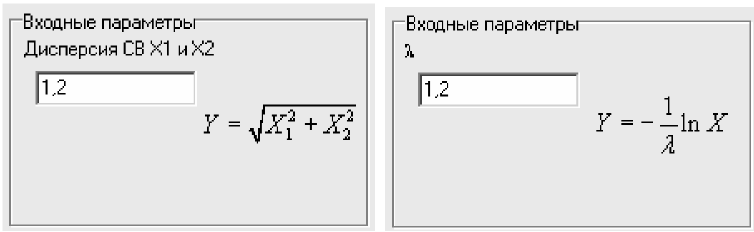


Рис. 1. Главное окно программы RadioStat

Для выполнения первой лабораторной работы выбирается закладка “Лаб №1”. После чего на экране отображаются диалоговые элементы управления, которые позволяют выбирать закон распределения случайных величин (СВ) и задавать соответствующие параметры (рис. 2). Так как целью первой лабораторной работы является генерирование СВ с разными законами распределения с помощью известных функциональных преобразований, то в качестве входных данных используются соответствующие параметры преобразующих функций. При равномерном распределении задаются границы интервала плотности распределения вероятности (ПРВ) a и b. Для формирования нормальной СВ Y исходными данными являются границы a и b равномерно распределенных СВ X. Параметры распределения Вейбулла задаются коэффициентами α и β, которые требуется рассчитать так, чтобы соответствующая СВ имела заданное математическое ожидание и дисперсию. Для формирования СВ Y, подчиненной распределению Рэлея, задается дисперсия нормальных СВ X. Экспоненциальное распределение определяется параметром λ, от которого зависит математическое ожидание и дисперсия СВ. При нажатии кнопки «Обновить» выполняется моделирование СВ с заданным законом распределения и в главном окне программы отображаются экспериментальные значения математического ожидания и дисперсии.



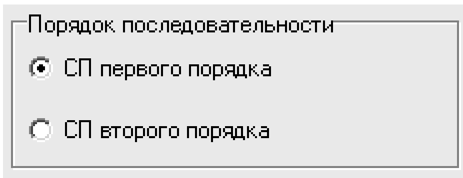
а) б) в)



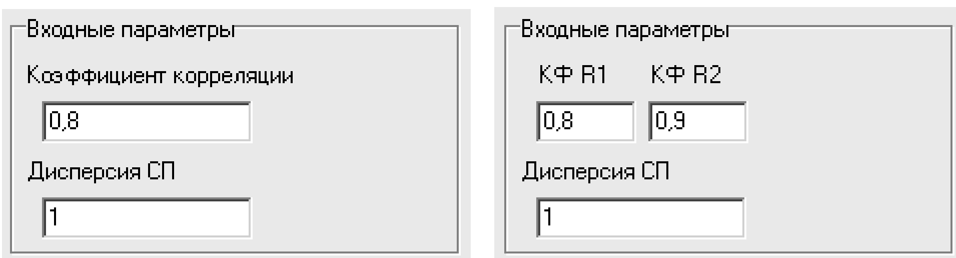
г) д)

Рис. 2. Элементы управления для первой лабораторной работы:
а) для равномерной ПРВ; б) для нормальной ПРВ; в) для распределения Вейбулла; г) для распределения Рэлея; д) для экспоненциальной ПРВ

Для выполнения второй лабораторной работы выбирается закладка «Лаб №2» и на экране появляются диалоговые элементы управления для моделирования авторегрессионных случайных последовательностей первого и второго порядков (рис. 3).



а)



б) в)

Рис. 3. Элементы управления для моделирования авторегрессионных последовательностей первого и второго порядков:
а) выбор типа авторегресионной последовательности;
б) параметры авторегресионной последовательности первого порядка;
в) параметры авторегресионной последовательности второго порядка

В зависимости от выбранного типа авторегресионной последовательности программа RadioStat предлагает ввести соответствующие параметры. Для последовательности первого порядка вводится коэффициент корреляции r между двумя соседними отсчетами и дисперсия σ_x^2. В случае авторегресионной последовательности второго порядка вводятся значения корреляционной функции $R_x(1)$ в первой точке, $R_x(2)$ во второй и значение дисперсии σ_x^2. При нажатии кнопки «Обновить» выполняется построение соответствующих случайных последовательностей и вычисление теоретической и экспериментальной корреляционных функций. Кроме того, в главном окне программы отображаются экспериментальные и теоретические значения дисперсий последовательностей.

При выполнении третьей лабораторной работы, в которой осуществляется исследование фильтра Калмана, выбирается закладка «Лаб №3» с элементами управления, представленными на рис. 4.

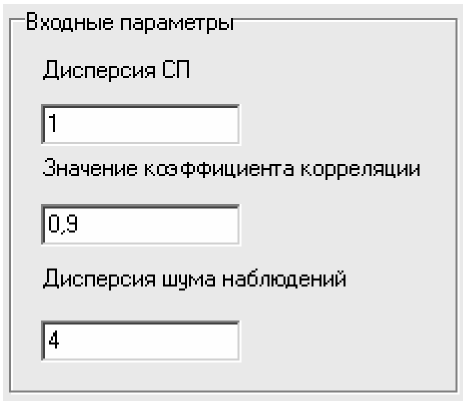


Рис. 4. Элементы управления для исследования фильтра Калмана

В качестве входных параметров используются три величины: дисперсия случайного процесса, коэффициент корреляции между двумя соседними отсчетами и дисперсия шума наблюдения. При нажатии кнопки «Обновить», выполняется генерирование авторегресионной случайной последовательности первого порядка, на которую накладывается белый гауссовский шум. Затем, зашумленная последовательность поступает на вход фильтра Калмана где строятся оценки отсчетов исходной случайной последовательности. В результате получаются три графика (рис. 5): исходная и зашумленная последовательности и результат фильтрации. Также в главном окне программы выводится график значений дисперсий ошибок оценивания в зависимости от номера отсчета (рис. 6). Таким образом, на основе полученных результатов моделирования фильтра Калмана можно оценивать качество его работы при разных входных данных: коэффициентах корреляции r и дисперсиях шума наблюдений.

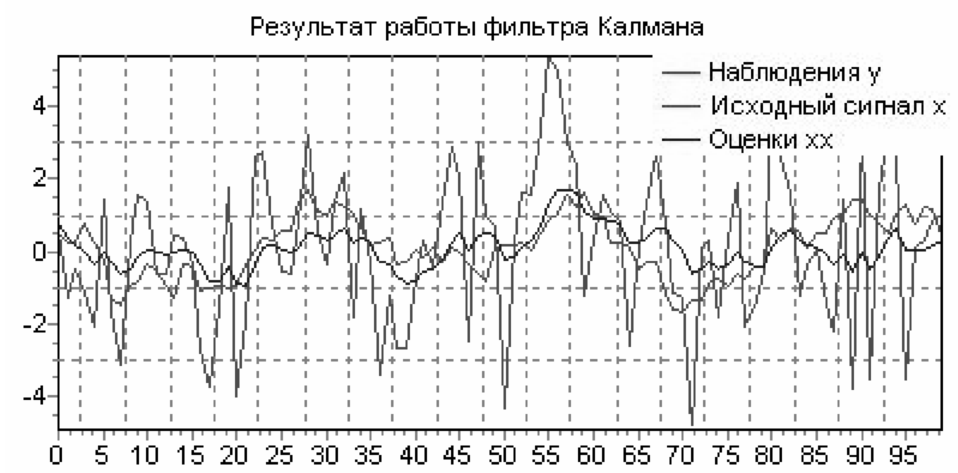
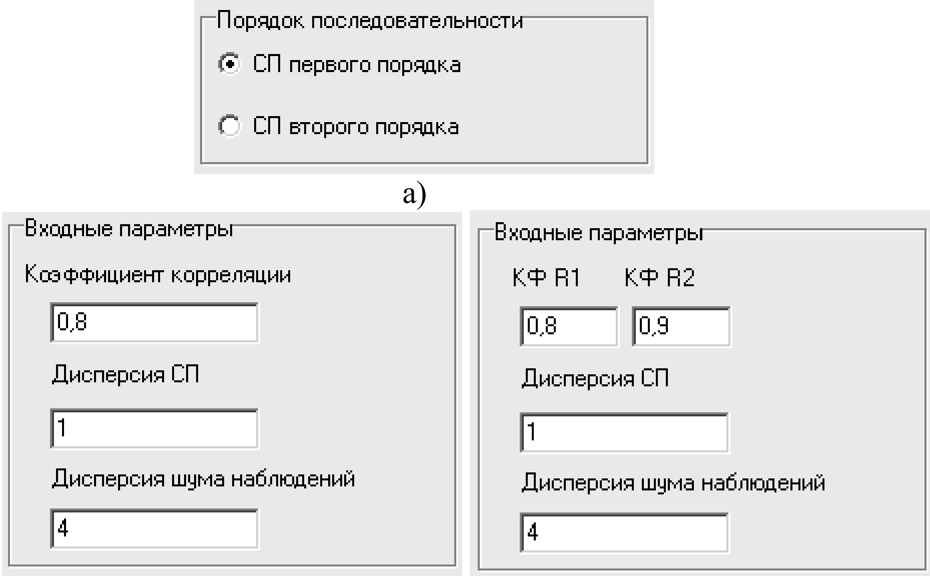


Рис. 5. Результат моделирование работы фильтра Калмана

Рис. 6. График зависимости дисперсии ошибок оценивания от номера отсчета

При выборе последней закладки «Лаб №4», в главном окне программы отображаются следующие диалоговые элементы (рис. 7). Вначале выполнения данной лабораторной работы осуществляется выбор типа авторегресионной случайной последовательности: первого или второго порядка. Затем, в зависимости от типа последовательности вводятся соответствующие параметры для проведения исследования работы фильтра Винера. После определения всех необходимых данных нажимается кнопка «Обновить» и в главном окне программы отображаются исходные, зашумленные и фильтрованные графики случайных процессов, а также график дисперсий ошибок оценивания в зависимости от номера отсчета. Данная информация позволяет проводить исследования точности построения оценок отсчетов случайных процессов при разных корреляционных функциях и дисперсиях шума наблюдения.



а)

б) в)

Рис. 7. Элементы управления для исследования фильтра Винера:
а) выбор типа случайной последовательности; б) параметры для фильтрации авторегресионной последовательности первого порядка; в) параметры для фильтрации авторегресионной последовательности второго порядка

Таким образом, программа RadioStat позволяет выполнять в полном объеме лабораторные работы, связанных с моделированием случайных величин с разными законами распределения, моделированием авторегресионных последовательностей первого и второго порядков, проводить исследования фильтров Калмана и Винера при разных входных параметрах.

Лабораторная работа №1

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН
С ЗАДАННЫМИ ЗАКОНАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель работы: Моделирование случайных величин с заданными законами распределения.

Теоретические сведения

При моделировании многих реальных сигналов и помех в радиотехнике часто используют такие плотности распределения вероятностей (ПРВ) как равномерное, нормальное, Рэлея, экспоненциальное, Вейбулла и др. Рассмотрим способы генерации случайных величин (СВ) с данными ПРВ, а также определение их числовых характеристик.

Равномерное распределение. Известно, что счетчик случайных значений ЭВМ позволяет генерировать псевдослучайные значения с равномерной ПРВ:

$$\omega(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a,b],$$

где a, b - граничные значения интервала изменения СВ. Математическое ожидание (МО) СВ X распределенной по равномерному закону имеет вид

$$m_x = M\{X\} = \frac{a+b}{2},$$

а дисперсия

$$\sigma_x^2 = M\{X^2\} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом, путем изменения значений a и b можно получать СВ с разными МО m_x и дисперсиями σ_x^2. Заметим, что моделирование СВ Y с другими законами распределения возможно только путем функциональных преобразований СВ X:

$$Y = F(X) \text{ или } Y = F(X_1, X_2, ..., X_N).$$

Нормальное распределение записывается следующим образом

$$\omega(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left\{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\},$$

где m_y и σ_y^2 - МО и дисперсия нормально распределенной СВ.

Для преобразования СВ X с равномерной ПРВ в СВ Y с нормальной ПРВ часто используется следующее функциональное преобразование

$$Y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i,$$

где X_i - независимые СВ с равномерной ПРВ; N - число суммируемых СВ (обычно N задается в диапазоне от 6 до 12). В результате СВ Y будет иметь МО

$$m_y = M\{Y\} = \frac{1}{N} M\left\{\sum_{i=1}^{N} X_i\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} M\{X_i\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_{xi}$$

и дисперсию

$$\sigma_y^2 = M\left\{(Y - m_y)^2\right\} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} M\left\{(X_i - m_{xi})^2\right\} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{xi}^2 .$$

Распределение Рэлея определяется следующим выражением

$$\omega(y) = \frac{y}{\sigma_y^2}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right\}, \text{ при } y \ge 0,$$

где σ_y^2 - дисперсия СВ с ПРВ Рэлея. СВ Y с данным распределением можно получить путем функционального преобразования вида

$$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2},$$

где X_1, X_2 - независимые СВ с нормальной ПРВ, имеющие нулевые МО и равные дисперсии σ_x^2. Полученная СВ Y будет иметь МО

$$m_y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_x$$

и дисперсию

$$\sigma_y^2 = (2 - \pi/2)\sigma_x^2 .$$

Экспоненциальное распределение выражается следующей формулой

$$\omega(y) = \lambda\exp\{-\lambda y\}, \text{ при } y \ge 0,$$

где $\lambda = 1/m_y$ - величина обратная МО СВ Y. Данный закон распределения можно получить воспользовавшись следующим функциональным преобразованием

$$Y = -\frac{1}{\lambda}\ln X,$$

где X - равномерно распределенная СВ в диапазоне от 0 до 1. Сгенерированная СВ Y будет иметь следующие числовые характеристики:

$$m_y = 1/\lambda;\ \sigma_y^2 = 1/\lambda^2 .$$

Распределение Вейбулла записывается как

$$\omega(y) = \alpha\beta y^{\beta-1}\exp\left\{-\alpha y^{\beta}\right\}, \text{ при } y \ge 0,$$

где α и β - параметры распределения.

Для моделирования СВ Y с данной ПРВ используется следующая формула

$$Y = \sqrt[\beta]{\frac{-\ln X}{\alpha}},$$

где X - равномерно распределенная СВ в диапазоне от 0 до 1. В результате, сформированная СВ Y будет иметь МО

$$m_y = M\{Y\} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\beta^{-1/\alpha}$$

и дисперсию

$$\sigma_y^2 = \left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)\alpha^{-2/\beta},$$

где $\Gamma(x)$ - гамма-функция.

Задание на лабораторную работу

1. Смоделировать по 10000 СВ с равномерной, нормальной, экспоненциальной, Рэлея и Вейбулла ПРВ с заданными параметрами этих распределений согласно варианту.
2. Вычислить экспериментальные значения математических ожиданий и дисперсий для всех типов смоделированных СВ.
3. Вычислить теоретические значения математических ожиданий и дисперсий для всех типов смоделированных СВ.
4. Построить гистограммы и графики всех используемых ПРВ.
5. Составить отчет о проведенных исследованиях.

Варианты заданий

Вариант	Равномерное	Нормальное	Рэлея	Экспоненциальное	Вейбулла
1	$m_x = 0{,}5$ $\sigma_x^2 = 1$	$m_y = 0$ $\sigma_y^2 = 2$	$m_y = 1$	$\sigma_y^2 = 2$	$m_y = 0{,}5$
2	$m_x = 0$ $\sigma_x^2 = 2$	$m_y = 10$ $\sigma_y^2 = 1$	$m_y = 1{,}5$	$m_y = 1$	$\sigma_y^2 = 4$
3	$m_x = -0{,}5$ $\sigma_x^2 = 4$	$m_y = 1$ $\sigma_y^2 = 2{,}5$	$m_y = 5$	$\sigma_y^2 = 20$	$m_y = 1{,}5$
4	$m_x = 1$ $\sigma_x^2 = 3$	$m_y = -2$ $\sigma_y^2 = 2$	$m_y = 3$	$m_y = 4$	$\sigma_y^2 = 8$
5	$m_x = 5$ $\sigma_x^2 = 5$	$m_y = -10$ $\sigma_y^2 = 20$	$\sigma_y^2 = 2$	$m_y = 2$	$m_y = 5$
6	$m_x = 0{,}8$ $\sigma_x^2 = 12$	$m_y = 12$ $\sigma_y^2 = 6$	$m_y = 7$	$m_y = 0{,}5$	$\sigma_y^2 = 2$
7	$m_x = 0{,}1$ $\sigma_x^2 = 2$	$m_y = 1{,}5$ $\sigma_y^2 = 2{,}5$	$m_y = 9$	$\sigma_y^2 = 8$	$m_y = 1$
8	$m_x = 0{,}5$ $\sigma_x^2 = 4$	$m_y = -8$ $\sigma_y^2 = 2$	$\sigma_y^2 = 5$	$m_y = 6$	$\sigma_y^2 = 8$
9	$m_x = 5$ $\sigma_x^2 = 15$	$m_y = -5$ $\sigma_y^2 = 5$	$m_y = 10$	$\sigma_y^2 = 2$	$m_y = 25$

Окончание

10	$m_x = 3$ $\sigma_x^2 = 0{,}5$	$m_y = 7$ $\sigma_y^2 = 100$	$\sigma_y^2 = 12$	$m_y = 5$	$m_y = 15$

Содержание отчета

1. Титульный лист с названием лабораторной работы, фамилией студента и группы.
2. Тексты программ моделирования СВ.
3. Гистограммы смоделированных СВ и графики теоретических ПРВ.
4. Экспериментальные значения МО и дисперсий смоделированных СВ.
5. Расчетные формулы с теоретическими значениями МО и дисперсий для всех типов ПРВ.
6. Выводы о проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятия ПРВ.
2. Приведите выражение для равномерной ПРВ.
3. Что такое математическое ожидание СВ?
4. Дайте определение понятия дисперсии СВ.
5. Запишите выражение для нормальной ПРВ.
6. Как вычисляется математическое ожидание для экспоненциальной ПРВ?
7. Как генерируются на ЭВМ СВ с распределением Рэлея?
8. Как вычисляется дисперсия и МО для нормальной ПРВ?
9. Запишите выражение для экспоненциальной ПРВ.
10. Как генерируются на ЭВМ СВ с экспоненциальной ПРВ?
11. Как вычисляется дисперсия для смоделированных нормальных СВ?
12. Запишите выражение для ПРВ Рэлея.

Лабораторная работа №2

МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Цель работы: Моделирование авторегрессионных случайных последовательностей первого и второго порядков с заданными статистическими характеристиками.

Теоретические сведения

При синтезе оптимальных алгоритмов обработки случайных данных в радиотехнических системах необходимо иметь полную статистическую информацию о свойствах случайной последовательности (СП). Такое статистическое описание дается с помощью многомерной ПРВ:

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \omega(x_1)\omega(x_2 \mid x_1)\omega(x_3 \mid x_1, x_2)...\omega(x_n \mid x_1, x_2, ..., x_{n-1}), \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ - возможные значения СП $X = [X_1, X_2, ..., X_n]^T$; n - длина последовательности. Анализ приведенного выражения показывает, что математические трудности применения данной формулы быстро нарастают с увеличением длины n последовательности X. Упростить данное выражение можно, если положить отсчеты СП независимыми. В этом случае условные ПРВ $\omega(x_i \mid x_1, ..., x_{i-1}) = \omega(x_i)$ и формула (1) принимает вид

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \omega(x_i).$$

Главным недостатком данной модели является описание довольно узкого класса реальных процессов. Действительно, с помощью СП с независимыми значениями невозможно дать описание коррелированных помех или медленно изменяющихся параметров полезных сигналов, например, координат радиолокационной цели. Поэтому во многих задачах необходимо использовать модели СП с зависимыми СВ. Очевидно, что наиболее простое выражение для многомерной ПРВ можно получить, если положить $\omega(x_i \mid x_1, ..., x_{i-1}) = \omega(x_i \mid x_{i-1})$. Это равенство означает, что значение СВ в i момент времени зависит от того, какое значение приняла СВ в момент $i-1$, и не зависит от других СВ в предшествующие моменты времени. Многомерная ПРВ в этом случае записывается следующим образом:

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \omega(x_1)\prod_{i=2}^{n} \omega(x_i \mid x_{i-1}).$$

Если СП удовлетворяют данному выражению, то они называются марковскими. Примером марковской СП может быть процесс, полученный с помощью линейного преобразования последовательности ξ_1, $\xi_2, \ldots$, $\xi_i, \ldots$ независимых гауссовских СВ с нулевым МО и дисперсией σ_ξ^2 согласно уравнению авторегрессии первого порядка:

$$x_i = rx_{i-1} + \xi_i,\ i = 1,2,3,..., \qquad (2)$$

где $|r| < 1$ - коэффициент корреляции между двумя соседними СВ. Для того чтобы полученная реализация СП $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ обладала свойством стационарности, начальное значение x_1 следует моделировать как гауссовскую СВ с нулевым МО и дисперсией $M\{x_1^2\} = \sigma_x^2$. Кроме того, полагая, что дисперсия СП σ_x^2 постоянна для любых x_i, можно записать

$$\sigma_x^2 = M\{x_i^2\} = M\{(rx_{i-1} + \xi_i)^2\} = M\{r^2 x_{i-1}^2\} + 2rM\{x_{i-1}\xi_i\} + M\{\xi_i^2\} = r^2\sigma_x^2 + \sigma_\xi^2,$$

откуда

$$\sigma_\xi^2 = \sigma_x^2\left(1 - r^2\right).$$

Полученное выражение определяет дисперсию случайных добавок ξ_i таким образом, чтобы сформированные отсчеты СП имели постоянную дисперсию σ_x^2.

Найдем корреляционную функцию (КФ) для СП заданного авторегрессионным уравнением первого порядка. Учитывая, что СП является стационарным, КФ будет иметь один аргумент k, характеризующий расстояние между любыми двумя СВ последовательности. В случае, когда $k = 1$, имеем

$$R_x(1) = M\{x_i x_{i-1}\}/\sigma_x^2 = M\{x_{i-1}(rx_{i-1} + \xi_i)\}/\sigma_x^2 = M\{rx_{i-1}^2\}/\sigma_x^2 + M\{x_{i-1}\xi_i\}/\sigma_x^2 = r.$$

Повторяя аналогичные операции при $k = 2,3,...$, приходим к следующему выражению для КФ:

$$R_x(k) = M\{x_i x_{i-k}\}/\sigma_x^2 = r^{|k|}.$$

Уравнение (2) авторегрессии первого порядка представляет довольно узкий класс гауссовских марковских СП с экспоненциальной КФ. Одним из способов расширения этого класса является описание СП с помощью авторегрессионных уравнений более высокого порядка, например второго:

$$x_i = r_1 x_{i-1} + r_2 x_{i-2} + \xi_i, i = 1,2,3,...,$$

где r_1, r_2 - некоторые коэффициенты, которые влияют на характер СП. Данные коэффициенты связаны со значениями КФ выражением

$$R_x(k) = r_1 R_x(k-1) + r_2 R_x(k-2), k > 0$$

с начальными условиями $R_x(0) = 1$ и $R(1) = r_1/(1 - r_2)$. Коэффициенты r_1, r_2 можно найти из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} r_1 + r_2 R_x(1) = R_x(1), \\ r_1 R_x(1) + r_2 = R_x(2), \end{cases}$$

при известных $R_x(1) = M\{x_i x_{i-1}\}/\sigma_x^2$ и $R_x(2) = M\{x_i x_{i-2}\}/\sigma_x^2$, т.е. корреляциях между первым и вторым отсчетами, а также между вторым и третьим.

Дисперсия сформированного таким образом СП определяется выражением

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{1 - r_1 R_x(1) - r_2 R_x(2)}.$$

Для того чтобы СП являлся устойчивым, т.е. значения $\{x_i\}$ не устремлялись к бесконечности, коэффициенты r_1, r_2 должны удовлетворять условию

$$r_1^2 + 4r_2 \geq 0.$$

В этом случае КФ процесса будет состоять из суммы двух затухающих экспонент.

Для стационарных эргодических последовательностей, к которым относятся рассмотренные авторегрессионные СП первого и второго порядков, КФ можно вычислить непосредственно по смоделированным отсчетам $\{x_i\}$:

$$R_x(k) \approx \frac{1}{\sigma_x^2} \frac{1}{N-k-1} \sum_{i=1}^{N-k} x_i x_{i+k}.$$

Задание на лабораторную работу

1. Смоделировать СП с помощью авторегрессионного уравнения первого порядка с заданными дисперсией σ_x^2 и коэффициентом корреляции r согласно варианту.
2. Рассчитать экспериментальные и теоретические значения КФ смоделированного случайного процесса.
3. Смоделировать СП с помощью авторегрессионного уравнения второго порядка с заданными дисперсией σ_x^2 и корреляционными связями $R_x(1)$ и $R_x(2)$ согласно варианту.
4. Рассчитать экспериментальные и теоретические значения КФ смоделированного случайного процесса.
5. Составить отчет о проведенных исследованиях.

Варианты заданий

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_x^2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r	0,99	0,95	0,9	0,85	0,8	0,95	0,92	0,9	0,999	0,99
$R_x(1)$	0,9	0,95	0,9	0,8	0,8	0,92	0,9	0,9	0,95	0,9
$R_x(2)$	0,8	0,9	0,95	0,9	0,5	0,85	0,75	0,8	0,92	0,85

Содержание отчета

1. Титульный лист с названием лабораторной работы, фамилией студента и группы.
2. Текст программы моделирования авторегрессионных СП первого порядка.
3. График смоделированного СП с его теоретическими и экспериментальными значениями КФ.

4. Экспериментальные и теоретические значения дисперсий СП.
5. Текст программы моделирования авторегрессионных СП второго порядка.
6. График смоделированного СП с его теоретическими и экспериментальными значениями КФ.
7. Экспериментальные и теоретические значения дисперсий СП.
8. Выводы о проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятия марковского процесса.
2. Запишите авторегрессионное уравнение первого порядка.
3. Что характеризует корреляционная функция СП?
4. Как задается начальное значение отсчета авторегрессионного СП первого порядка?
5. Запишите авторегрессионное уравнение второго порядка.
6. Как вычисляются коэффициенты авторегрессионного уравнения второго порядка?
7. Запишите формулу для КФ авторегрессионного уравнения второго порядка.

Лабораторная работа №3

ИССЛЕДОВАНИЕ СКАЛЯРНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Цель работы: Реализация и исследование скалярного фильтра Калмана при построении оценок отсчетов авторегрессионной последовательности первого порядка.

Теоретические сведения

При проектировании различных радиотехнических устройств часто возникают задачи выделения полезного сигнала из входных зашумленных данных. Допустим, что на вход приемника поступает зашумленный сигнал вида

$$y_i = x_i + \eta_i \text{, при } i = 1,2,...,$$

где x_i - истинное значение отсчета; η_i - гауссовская шумовая составляющая с нулевым МО и дисперсией σ^2. Если отсчеты полезного сигнала $x_i, i = 1,2,...$ образуют авторегрессионную последовательность первого порядка, то оптимальные оценки, в смысле их минимума дисперсии ошибок, можно вычислить с помощью скалярного фильтра Калмана. Процесс построения таких оценок называется фильтрацией СП.

Так как сигнал $x_i, i = 1,2,...$ является гауссовским, а наблюдения $\{y_i\}$ описываются аддитивной моделью с гауссовским шумом, то оптимальная оценка может быть построена на основе линейного алгоритма. Кроме того, учитывая, что СП $x_i, i = 1,2,...$ марковский, то наилучшую оценку можно вычислить с помощью рекуррентного выражения

$$\widehat{x}_i = A_i \widehat{x}_{i-1} + B_i y_i , \qquad (3)$$

где $\widehat{x}_i$ - текущая оценка; $\widehat{x}_{i-1}$ - предыдущая оценка. Анализ данного выражения показывает, что для построения оптимальной оценки по всем поступившим наблюдениям $y_1, y_2, ..., y_i$ достаточно использовать предыдущее значение оценки $\widehat{x}_{i-1}$ и текущее наблюдение y_i.

Неизвестные коэффициенты A_i и B_i для каждого i должны быть выбраны так, чтобы минимизировалась дисперсия ошибки оценивания:

$$\sigma^2_{\varepsilon i} = M\left\{\varepsilon_i^2\right\} = M\left\{\left(\widehat{x}_i - x_i\right)^2\right\}.$$

Для нахождения коэффициентов A_i и B_i распишем выражение для ошибки оценивания:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i &= \widehat{x}_i - x_i = A_i \widehat{x}_{i-1} + B_i\left(x_i + \eta_i\right) - x_i = \\
&= A_i\left(x_{i-1} + \varepsilon_{i-1}\right) + \left(B_i - 1\right)\ \left(r_{i-1}\ \ x_{i-1} + \xi_i\right) + B_i \eta_i = \\
&= \left(A_i + r_{i-1}\left(B_i - 1\right)\right)\ x_{i-1} + A_i \varepsilon_{i-1} + \left(B_i - 1\right)\quad \xi_i + B_i \eta_i,
\end{aligned}$$

где $r_{i-1} = M\{x_i x_{i-1}\} / \sigma_x^2$ - коэффициент корреляции; ξ_i - гауссовские случайные добавки авторегрессионной модели сигнала $\{x_i\}$. Полагая $A_i + r_{i-1}(B_i - 1) = 0$, получаем следующую формулу для ошибки оценивания на i-м шаге

$$\varepsilon_i = r_{i-1}(1-B_i)\varepsilon_{i-1} + (B_i - 1)\xi_i + B_i\eta_i .$$

Первое слагаемое в данном выражении учитывает ошибку $\varepsilon_{i-1} = \hat{x}_{i-1} - x_{i-1}$ на предыдущем шаге. Второе определяется величиной ξ_i изменения $x_i = r_{i-1}\, x_{i-1} + \xi_i$ параметра, т.е. динамикой СП. Составляющая $B_i\eta_i$ ошибки связана с помехой η_i, возникающей при наблюдении $y_i = x_i + \eta_i$. Поскольку все слагаемые являются независимыми СВ, то дисперсия ошибки фильтрации равна сумме дисперсий каждого из слагаемых:

$$\sigma_\varepsilon^2 = r_{i-1}^2(1-B_i)^2 P_{i-1} + (B_i - 1)^2 V_{\xi i} + B_i^2 V_i ,$$

где $P_{i-1} = M\{\varepsilon_{i-1}^2\}$ - дисперсия ошибки оценивания на $i-1$ шаге; $V_{\xi i} = M\{\xi_i^2\}$ - дисперсия порождающего шума; $V_i = M\{\eta_i^2\}$ - дисперсия шума наблюдения.

Параметр B_i, при котором достигается минимальное значение дисперсии ошибки оценивания, находится из решения уравнения $d\sigma_{\varepsilon i}^2 / dB_i = 0$ и достигается при

$$B_i = V_i^{-1}\, P_{\acute{Y}i} \big/ \left(1 + V_i^{-1}\, P_{\acute{Y}i}\right),$$

где $P_{\acute{Y}i} = M\left\{\left(x_i - r_{i-1}\hat{x}_{i-1}\right)^2\right\} = r_{i-1}^2 \quad P_{i-1} + V_{\xi i}$ - дисперсия ошибки экстраполяции на i-м шаге. Учитывая, что $A_i = r_{i-1}(1-B_i)$, получим после подстановки оптимальных значений коэффициентов A_i и B_i в формулу (3) следующий алгоритм фильтрации:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{\acute{Y}i} + P_i V_i^{-1}\left(y_i - \hat{x}_{\acute{Y}i}\right), \tag{4}$$

$$P_i = P_{\acute{Y}i} \big/ \left(1 + V_i^{-1} P_{\acute{Y}i}\right),$$

где $\hat{x}_{\acute{Y}i} = r_{i-1}\hat{x}_{i-1}$ - оценка экстраполяции; $P_i = M\left\{\left(\hat{x}_i - x_i\right)^2\right\} = P_{\acute{Y}i} \big/ \left(1 + V_i^{-1} P_{\acute{Y}i}\right)$ - дисперсия ошибок оценивания. В приведенных выражениях величина $\hat{x}_{\acute{Y}i}$ является экстраполированной на один шаг оценкой параметра x_i (прогнозом x_i) на основе наблюдений $y_1, y_2, ..., y_{i-1}$. Действительно, до наблюдения имеется лишь оценка $\hat{x}_{i-1}$ и описание $x_i = r_{i-1}\, x_{i-1} + \xi_i$ одношагового изменения параметра. Поскольку $\{\xi_i\}$ – последовательность независимых СВ, то лучшим прогнозом будет $\hat{x}_{\acute{Y}i} = r_{i-1} \quad \hat{x}_{i-1}$. Дисперсия ошибки прогноза

$$M\left\{\left(\hat{x}_{\acute{Y}i} - x_i\right)^2\right\} = M\left\{\left(r_{i-1}\left(\hat{x}_{i-1} - x_{i-1}\right) + \xi_i\right)^2\right\} = r_{i-1}^2 \quad P_{i-1} + V_{\xi i} .$$

в точности равна $P_{\acute{y}i}$.

С учетом приведенных рассуждений определим начальные условия для алгоритма (4). До первого наблюдения y_1 известно, что x_1 подчиняется нормальному закону распределения с нулевым средним и дисперсией $V_{x1} = M\{x_1^2\}$. Следовательно, лучший прогноз $\hat{x}_{\acute{Y}1} = 0$, а дисперсия ошибки этого прогноза $P_{\acute{Y}1} = M\left\{\left(\hat{x}_{\acute{Y}1} - x_1\right)^2\right\} = V_{x1}$. Таким образом, коэффициент $P_1 = M\left\{\left(\hat{x}_1 - x_1\right)^2\right\}$ для рекуррентной процедуры (4) определяется по формуле $P_1 = V_{x1} \big/ \left(1 + V_1^{-1}\, V_{x1}\right)$.

Задание на лабораторную работу

1. Реализовать скалярный фильтр Калмана для построения оценок авторегрессионной СП с заданным параметром дисперсии шума наблюдения и коэффициентом корреляции согласно варианту.
2. Исследовать поведение фильтра Калмана при разных значениях коэффициента корреляции авторегрессионной СП в диапазоне [0;1).
3. Объяснить полученные результаты построения оценок при разных значениях коэффициентов корреляции.
4. Исследовать поведение фильтра Калмана при разных значениях дисперсии шума наблюдения в диапазоне от 0 до 1000.
5. Объяснить полученные результаты построения оценок при разных значениях дисперсии шума наблюдения.
6. Составить отчет о проведенных исследованиях.

Варианты заданий

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	0,99	0,95	0,9	0,85	0,8	0,95	0,92	0,9	0,999	0,99
σ^2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,8	0,9	1	0,5	0,7	0,5

Содержание отчета

1. Титульный лист с названием лабораторной работы, фамилией студента и группы.
2. Текст программы реализации фильтра Калмана.
3. Графики исходного, зашумленного и отфильтрованного сигналов.
4. График дисперсий ошибок оценивания.
5. Графики исходного, зашумленного и отфильтрованного сигналов, полученных при проведении исследований.
6. Графики дисперсий ошибок оценивания, полученных при проведении исследований.
7. Объяснение полученных результатов фильтрации и графиков дисперсий ошибок оценивания.
8. Выводы о проведенных исследованиях.

Контрольные вопросы

1. Запишите модель наблюдений, используемую в фильтре Калмана.
2. Какой критерий оптимальности применяется в фильтре Калмана?
3. Для какой модели сигналов фильтр Калмана приводит к оптимальным результатам оценивания?

4. На основе каких исходных данных строится текущая оценка в скалярном фильтре Калмана?

5. Из каких трех составляющих складывается ошибка оценивания на i-м шаге?

6. Запишите выражение для вычисления дисперсии ошибки оценивания, которое используется в фильтре Калмана.

7. Что такое ошибка экстраполяции?

8. Сформулируйте начальные условия для построения оценок в фильтре Калмана.

9. Запишите выражение для вычисления дисперсии ошибки экстраполяции, которое используется в фильтре Калмана.

10. Как влияет величина дисперсии шума наблюдений на качество построения оценок?

11. К чему приводит увеличение корреляционных связей между отсчетами сигнала при построении оценок?

12. Запишите рекуррентное выражение построения оценок в скалярном фильтре Калмана.

Лабораторная работа №4

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРА ВИНЕРА

Цель работы: Исследование фильтра Винера при построении оценок отсчетов авторегрессионных последовательностей первого и второго порядков.

Теоретические сведения

Представленный скалярный фильтр Калмана дает оптимальные оценки только для авторегрессионных моделей СП первого порядка. Рассмотрим общий подход, позволяющий строить оптимальные оценки для любых моделей гауссовских последовательностей.

Пусть имеется аддитивная модель наблюдений

$$y_i = x_i + \eta_i \text{, при } i = 1,2,...,$$

где x_i - значения отсчетов исходного гауссовского сигнала; η_i - гауссовская шумовая составляющая с нулевым МО и дисперсией σ^2. Оптимальную оценку отсчета $\hat{x}_i$ можно построить на основе линейного алгоритма:

$$\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} y_j = \alpha_i^T Y,$$

где $\overline{\alpha}_i = [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{iN}]^T$ - вектор весовых коэффициентов; $Y = [y_1, y_2, ..., y_N]^T$ - вектор наблюдений; N - число наблюдений, по которым строится оценка. Коэффициенты $\overline{\alpha}_i$ выбираются таким образом, чтобы минимизировать выбранный показатель качества. Если в качестве критерия качества построения оценок выбрать дисперсию ошибки фильтрации

$$\sigma_{\varepsilon i}^2 = M\left\{\varepsilon_i^2\right\} = M\left\{\left(x_i - \hat{x}_i\right)^2\right\},$$

то оптимальный вектор весовых коэффициентов можно найти из решения уравнения

$$\frac{\partial \sigma_{\varepsilon i}^2}{\partial \overline{\alpha}_i^T} = -2M\left\{\left(x_i - \overline{\alpha}_i^T Y\right) Y^T\right\} = -2M\left\{\left(x_i - \overline{\alpha}_i^T \left(X + \overline{\eta}\right)\right)\left(X^T + \overline{\eta}^T\right)\right\} = 0,$$

где $X = [x_1, ..., x_N]^T$ - вектор из N отсчетов сигнала $\{x_i\}$; $\overline{\eta} = [\eta_1, ..., \eta_N]^T$ - вектор шума наблюдений. Раскрывая знак МО, получаем

$$\overline{\alpha}_i^T \left(B_x + V_\eta\right) = P_i^T \Rightarrow \overline{\alpha}_{i(opt)}^T = P_i^T \left(B_x + V_\eta\right)^{-1},$$

где $P_i^T = M\left\{x_i X^T\right\}$ - вектор взаимной корреляции оцениваемого отсчета с элементами вектора X; $B_x = M\left\{X X^T\right\}$ - ковариационная матрица отсчетов вектора X; $V_\eta = M\left\{\overline{\eta}\,\overline{\eta}^T\right\}$ - диагональная матрица дисперсий шума наблюдений.

Подставляя вычисленные оптимальные коэффициенты $\overline{\alpha}_{i(opt)}^T$ в выражение дисперсии ошибки, и раскрывая знак МО, можно записать

$$\sigma_{\varepsilon i}^2 = \sigma_x^2 - 2\overline{\alpha}_{i(opt)}^T P_i + \overline{\alpha}_{i(opt)}^T (B_x + V_\eta)\overline{\alpha}_{i(opt)}.$$

Задание на лабораторную работу

1. Реализовать фильтр Винера для построения оценок авторегрессионных СП первого и второго порядков с заданным параметром дисперсии шума наблюдения согласно варианту.
2. Исследовать поведение фильтра Винера при разных значениях коэффициента корреляции авторегрессионных СП.
3. Объяснить полученные результаты построения оценок при разных значениях коэффициентов корреляции.
4. Исследовать фильтра Винера при разных значениях дисперсии шума наблюдения.
5. Объяснить полученные результаты построения оценок при разных значениях дисперсии шума наблюдения.
6. Составить отчет о проведенных исследованиях.

Варианты заданий

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ^2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,8	0,9	1	0,5	0,7	0,5

Содержание отчета

1. Титульный лист с названием лабораторной работы, фамилией студента и группы.
2. Текст программы реализации фильтра Винера.
3. Графики исходного, зашумленного и отфильтрованного сигналов.
4. График дисперсий ошибок оценивания.
5. Графики исходного, зашумленного и отфильтрованного сигналов, полученных при проведении исследований.
6. Графики экспериментальных дисперсий ошибок оценивания.
7. Объяснение полученных результатов фильтрации и графиков дисперсий ошибок оценивания.
8. Выводы о проведенных исследованиях.

Контрольные вопросы

1. Какой критерий оптимальности применяется в фильтре Винера?
2. Для каких сигналов фильтр Винера дает оптимальные оценки?
3. Каким образом строятся оценки отсчетов сигнала в фильтре Винера?
4. Какие априорные сведения о сигнале необходимы для вычисления оптимальных оценок?
5. Для каких сигналов оценки фильтра Винера и Калмана будут совпадать?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адаптивные фильтры: Пер. с англ./под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П. М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.

2. Васильев, К. К. Методы обработки сигналов: учебное пособие / К. К. Васильев. – Ульяновск, 2001. – 80 с.

3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей: учебник для вузов / Е. С. Вентцель. – М.: Высш. шк., 1999. – 576 с.

4. Перов, А. И. Статистическая теория радиотехнических систем: учебное пособие для вузов / А. И. Перов. – М.: Радиотехника, 2003. – 400 с.

5. Сейдж, Э. П. Теория оценивания и её применение в связи и управлении/ пер. с англ.; под ред. Б. Р. Левина; Э. П. Сейдж, Дж. Мелс – М.: Связь, 1976. – 495 с.

6. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. – М.: Сов.радио, 1977. – 488 с.

Учебное издание

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методические указания к лабораторным работам

Составители: **Наместников** Сергей Михайлович, **Морозов** Андрей Алексеевич

Редактор Н.А. Евдокимова

Подписано в печать 30. 08. 2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Усл.печ.л. 1,39. Уч.-изд.л. 1,00.
Тираж 50 экз. Заказ
Ульяновский государственный технический университет,
432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.
Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.